平面有向几何学

●喻德生 著



科学出版社

(O-5457.01)



作者简介

喻德生，江西高安人．南昌航空大学数学与信息科学学院教授，硕士研究生导师．1990年江西师范大学数学系硕士研究生毕业，获理学硕士学位．江西省第六批中青年骨干教师，中国教育数学学会常务理事，《数学研究期刊》编委，南昌航空大学省优质课程《高等数学》负责人．主要从事几何学、计算机辅助几何设计和数学教育等方面的研究．参与国家自然科学基金课题3项，主持或参与省部级教学科研课题8项、校级教学科研课题10项．在国内外学术刊物发表论文60余篇，主编出版教材8种．作为主持人获江西省优秀教学成果奖2项，指导学生参加全国数学建模竞赛获全国二等奖1项、省级一等奖2项，获江西省优秀教学成果荣誉2项，南昌航空工业学院优秀教学成果奖4项．

www.sciencep.com


ISBN 978-7-03-040153-3

科学数理分社
电 话：(010) 64011058
E-mail：chenyuzhuo@mail.sciencep.com
网 址：http://www.math-phy.cn
销售分类建议：高等数学

定 价：128.00 元

平面有向几何学

喻德生　著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书主要以平面有向度量为研究对象，以平面有向度量定值法为研究方法，构造平面有向度量的定值定理，创立平面有向几何学的知识体系. 内容主要包括两点间有向距离、点到直线间有向距离公式及应用，二次曲线中有向距离的定值定理及应用，多边形、分点多边形和线型三角形有向面积公式及应用，内(外)多边形、垂足多边形、各类二次曲线切多边形和一般圆锥曲线外切多边形中有向面积的定值定理及应用等. 它对开拓数学的研究领域，揭示事物之间本质的联系，探索数学研究的新思想、新方法具有重要的理论意义；对丰富几何学各学科、以及相关数学学科的教学内容，促进大、中学数学教学内容改革的发展具有重要的现实意义；此外，有向几何学的研究成果和研究方法，对数学定理的机械化证明也具有重要的应用和参考价值.

本书可供数学研究工作者、大学和中学数学教师、大学数学专业学生和研究生以及高中生阅读，可以作为平面有向几何学和中学数学竞赛的教材，也可供相关学科专业师生参考.

图书在版编目(CIP)数据

平面有向几何学/喻德生著. —北京：科学出版社，2014.3
ISBN 978-7-03-040153-3
Ⅰ.①平… Ⅱ.①喻… Ⅲ.①平面几何 Ⅳ.①O123.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 046672 号

责任编辑：陈玉琢 / 责任校对：何艳萍
责任印制：赵德静 / 封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 3 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2014 年 3 月第一次印刷 印张：23 3/4
字数：461 000

定价：128.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

“有向” 是自然科学中的一个十分重要而又应用非常广泛的概念. 我们经常遇到的有向数学模型无外乎如下两类:

一是 “泛物” 的有向性. 如微积分学中的左右极限、左右连续、左右导数等用到的量的有向性, 定积分中用到的线段 (即区间) 的有向性, 对坐标的曲线积分用到的曲线的有向性, 对坐标的曲面积分用到的曲面的有向性等, 这些都是有向性的例子. 尽管这里的问题很不相同, 但是它们都只有正、负两个方向, 因此称为 “泛物” 的有向性. 然而, 这里的有向性没有可加性, 不便运算.

二是 “泛向” 的有向量, 亦即我们在数学与物理中广泛使用的向量. 我们知道, 这里的向量有无穷多个方向, 而且两个方向不同的向量相加通常得到一个方向不同的向量. 因此, 我们称为 “泛向” 的有向量. 这种 “泛向” 的有向数学模型, 对我们来说方向太多, 不便应用.

然而, 正是由于 “泛向” 有向量的可加性与 “泛物” 有向性的二值性, 启示我们研究一种既有二值有向性又有可加性的几何量. 一维空间的有向距离, 二维空间的有向面积, 三维空间乃至一般的 N 维空间的有向体积等, 都是这种几何量的例子. 一般地, 我们把带有方向的度量称为有向度量.

“有向度量” 并不是数学中一个全新的概念, 各种有向度量的概念散见于一些数学文献中. 但是, 有向度量的概念并未发展成为数学中的一个重要概念. 有向度量的应用仅仅局限于其 “有向性”, 而极少触及其 “可加性”. 要使有向度量的概念变得更加有用, 要发现各种有向度量的规律性, 使有向度量的知识系统化, 就必须对有向度量进行深入的研究, 创立一门独立的几何学 —— 有向几何学. 为此, 必须明确有向几何学的研究对象, 确立有向几何学的研究方法, 构建有向几何学的知识体系. 这对开拓数学研究的领域, 揭示事物之间本质的联系, 探索数学研究的新思想、新方法具有重要的理论意义; 对丰富几何学各学科以及相关数学学科, 特别是数学分析、高等代数等学科的教学内容, 促进高等学校数学教学内容改革的发展具有重要的现实意义; 此外, 有向几何学的研究成果和研究方法, 对数学定理的机械化证明也具有重要的应用和参考价值.

就我们所知, 著名数学家希尔伯特在他的数学名著《直观几何》中, 利用三角形的有向面积证明了一个简单的几何问题, 这是历史上较早的使用有向面积证题的例子. 20 世纪 50~60 年代, 著名数学家 Wilhelm Blaschke 在他的《圆与球》中, 利用有向面积深入地讨论了圆的极小性问题, 这是历史上比较系统地使用有向面积法

解决问题的例子. 但是, 有向面积法并未发展成一种普遍使用而又十分有效的方法.

20 世纪 80~90 年代, 我国著名数学家吴文俊院士和张景中院士, 开创了数学机械化的研究, 而计算机中使用的距离和面积都是有向的, 因此数学机械化的研究拓广了有向距离和有向面积应用的范围. 特别是张景中院士十分注重面积关系在数学机器证明中的作用, 指出面积关系是 "数学中的一个重要关系", 并利用面积关系创立了一种可读的数学机器证明方法 —— 即所谓的消点法, 也称为面积法.

近年来, 我们在分析与借鉴上述两种思想方法的基础上, 发展了一种研究有向几何问题的方法, 即所谓的有向度量定值法. 除上述提到的两个原因外, 我们也受到如下两种数学思想方法的影响.

一是数学建模的思想方法. 我们知道, 一个数学模型通常不是一个简单的数学结论. 它往往包含一个或多个参数, 只要给定参数的一个值, 就可以得出一个相应的结论. 这与经典几何学中一个一个的、较少体现知识之间联系的结论形成了鲜明的对照. 因此, 我们自然会问, 几何学中能建立涵盖面如此广泛的结论吗? 这样, 寻找几何学中联系不同结论的参数, 进行几何学中的数学建模, 就成为我们研究有向几何问题的一个重点.

二是函数论中的连续与不动点的思想方法. 我们知道, 经典几何学中的结论通常是离散的, 一个结论就要给出一个证明, 比较麻烦. 我们能否引进一个连续变化的量, 使得对于变量的每一个值, 某个几何量或某几个几何量之间的关系始终是不变的. 这样, 构造几何量之间的定值模型就成为我们研究有向几何问题的一个突破口.

尽管几何定值问题的研究较早, 一些方面的研究也比较深入, 但有向度量定值问题的研究尚处于起步阶段. 近年来, 我们研究了有向距离、有向面积定值的一些问题, 得到了一些比较好的结果, 并揭示了这些结果与一些著名的几何结论之间的联系. 不仅使很多著名的几何定理 ——Euler 定理、Pappus 定理、Pappus 公式、蝴蝶定理、Servois 定理、中线定理、Harcourt 定理、Carnot 定理、Brahmagupta 定理、切线与辅助圆定理、Anthemius 定理、焦点和切线的 Apollonius 定理、Zerr 定理、配极定理、Salmon 定理、二次曲线的 Pappus 定理、两直线上的 Pappus 定理、Desarques 定理、Ceva 定理、等截共轭点定理、共轭直径的 Apollonius 定理、正弦及余弦差角公式、Weitzentock 不等式、默比乌斯定理、Monge 公式、Gauss 五边形公式、Erdos-Mordell 不等式、Gauss 定理、Gergonne 定理、梯形的施泰纳定理、拿破仑三角形定理、Cesaro 定理、三角形的中垂线定理、Simson 定理、三角形的共点线定理、完全四边形的 Simson 线定理、高线定理、Neuberg 定理、共点线的施泰纳定理、Zvonko Cerin's 定理、双重透视定理、三重透视定理、Pappus 重心定理、角平分线定理和一大批数学竞赛题在有向度量的思想方法下得到了推广或证明, 有向度量如 Menelans 定理、Newton 定理、Brianchon 定理等结论之间的内

在联系. 显示出有向面积定值法的新颖性、综合性、有效性和简洁性. 特别是三角形、四边形和在二次曲线外切多边形中有向面积定值问题的研究, 涵盖面广、内容丰富、结论优美, 并引起了国内外数学界的关注.

打个比方说, 如果我们把经典的几何定理看成是一颗颗的珍珠, 那么几何有向度量的定值定理就像一条条的项链, 把一些看似没有联系的若干几何定理串连起来, 形成一个完美的整体. 因此, 几何有向度量的定值定理更能体现事物之间的联系, 揭示事物的本质.

在这些研究的基础上, 我们一方面不仅可以继续深入研究平面有向度量定值问题, 而且可以系统地总结已有的结果, 对有向几何学 (平面部分) 的研究对象、研究方法、研究内容进行纵深的阐述, 构建平面有向几何学的知识体系; 另一方面, 也可以把平面有向度量定值法推广到一般的 N 维空间中去, 从而研究一般 N 维空间中有向度量的定值问题. 本书仅仅是上述构想的一个尝试, 希望起到抛砖引玉的作用.

本书得到南昌航空大学科研成果专项资助基金和国家自然科学基金 (No:11261040) 的资助, 得到中国科学院张景中院士和中国科学技术大学博士生导师、湖州师范学院特聘教授刘太顺先生的大力推荐, 在此表示衷心感谢!

同时, 也感谢南昌航空大学数学与信息科学学院领导和袁达明副教授、科学出版社陈玉琢编辑的关心与帮助, 感谢我的导师、江西师范大学教授林金榕先生的指引以及我的硕士研究生漆志鹏、师晶、梁学礼、陈佳英、程程、刘烨、徐英博、刘朝霞、江卯、汪晶等参与本书编写有关的工作.

由于笔者阅历、水平有限, 书中可能出现疏漏、甚至错误, 敬请国内外同仁和读者不吝批评指正.

作　者

2013 年 7 月

目 录

第 1 章　两点间的有向距离及其应用

1.1　两点间的有向距离公式

两点间的有向距离, 就是最简单的一维图形——线段的有向距离. 从几何上来看, 点是最简单的图形——零维的图形, 因此两点的距离可以看成是两个零维图形之间的有向距离.

两点间的有向距离不仅与点, 而且与点的先后次序有关, 因此必须把两点相同但首尾不同的线段 P_1P_2, P_2P_1 区别开来.

本节首先给出两点间的有向距离的概念、有向距离公式与性质, 再介绍有向距离的一些结论和有向距离的简单应用, 包括 Chasle's 定理、Euler 定理、Pappus 定理、线段调和分割定理、Stewart 定理、Pappus 公式等的证明或推广.

1.1.1　两点间有向距离的概念、性质与公式

定义 1.1.1　设 P_1, P_2 是 u 轴上的两点, P_1, P_2 间的距离为 $d_{P_1P_2}$, 则线段 P_1P_2 的有向距离, 也就是点 P_1 到 p_2 间的有向距离定义为

$$D_{P_1P_2} = \pm d_{P_1P_2},$$

其中, 当 $P_1 \to P_2$ 的方向与 u 轴的正向相同时, 取 “+” 号, 相反时取 “−” 号.

特别, 当 P_1, P_2 重合时, 我们把点看成是线段的特殊情形, 并规定其距离为零.

显然, $D_{P_1P_2} = -D_{P_2P_1}$.

定理 1.1.1　设 P_1, P_2 是 x 轴上的两点, 它们坐标分别为 x_1, x_2, 则线段 P_1P_2 的有向距离为

$$D_{P_1P_2} = x_2 - x_1. \tag{1.1.1}$$

证明　如图 1.1.1 所示. 因为 P_1, P_2 两点间的距离 $d_{P_1P_2} = |x_2 - x_1|$, 所以 $D_{P_1P_2} = \pm|x_2 - x_1|$.



图 1.1.1　线段的有向距离

当 $P_1 \to P_2$ 的方向与 x 轴的正向相同时, $x_2 > x_1$, 故 $D_{P_1P_2} = |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$; 当 $P_1 \to P_2$ 的方向与 x 轴的正向相反时, $x_2 < x_1$, 故 $D_{P_1P_2} = -|x_2 - x_1| =$

$-(x_1-x_2)=x_2-x_1$; 当 P_1,P_2 重合时, $x_1=x_2$, 故 $D_{P_1P_2}=0$. 从而式 (1.1.1) 成立.

定理 1.1.2　设 $P_1,P_2;Q_1,Q_2$ 是 x 轴上的四点, 它们坐标分别为 $x_1,x_2;x_1',x_2'$, 则

$$D_{P_1P_2}=kD_{Q_1Q_2}\Leftrightarrow x_2-x_1=k(x_2'-x_1').$$

证明　由定理 1.1.1 即得.

1.1.2　两点间有向距离的基本结论

定理 1.1.3　设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是一直线上的 n 个点, 则

$$D_{P_1P_2}+D_{P_2P_3}+\cdots+D_{P_{n-1}P_n}=D_{P_1P_n}.$$

证明　设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的坐标分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则由定理 1.1.1 得

$$D_{P_1P_2}=x_2-x_1,D_{P_2P_3}=x_3-x_2,\cdots,D_{P_{n-1}P_n}=x_n-x_{n-1}.$$

于是

$$\begin{aligned}&D_{P_1P_2}+D_{P_2P_3}+\cdots+D_{P_{n-1}P_n}\\=&(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})=x_n-x_1=D_{P_1P_n}.\end{aligned}$$

注 1.1.1　当 $n=3$ 时, 定理 1.1.3 即为著名的 Chasle's 定理.

定理 1.1.4(Euler 定理)　设 P_1,P_2,P_3,P_4 是一直线上的四点, 则

$$D_{P_1P_2}\cdot D_{P_3P_4}+D_{P_1P_4}\cdot D_{P_2P_3}=D_{P_1P_3}\cdot D_{P_2P_4}.$$

证明　设 P_1,P_2,P_3,P_4 的坐标分别为 x_1,x_2,x_3,x_4, 则

$$\begin{aligned}&D_{P_1P_2}\cdot D_{P_3P_4}+D_{P_1P_4}\cdot D_{P_2P_3}\\=&(x_2-x_1)(x_4-x_3)+(x_4-x_1)(x_3-x_2)\\=&x_1x_2+x_3x_4-x_2x_3-x_1x_4\\=&(x_3-x_1)(x_4-x_2)=D_{P_1P_3}\cdot D_{P_2P_4}.\end{aligned}$$

注 1.1.2　定理 1.1.4 可以看成是托勒密定理中圆变成直线的特殊情形.

定理 1.1.5(Pappus 定理)[1]　(1) 设 A,B,C,D 是一条直线上的四点, 则

$$D_{DA}^2\cdot D_{BC}+D_{DB}^2\cdot D_{CA}+D_{DC}^2\cdot D_{AB}+D_{BC}\cdot D_{CA}\cdot D_{AB}=0;$$

(2) 设 M,N 分别是分有向线段 AB 成定比 $m:n,m:(-n)(m>n>0)$ 的内分点和外分点, O 为 MN 的中点, 则

$$D_{OM}^2 = D_{ON}^2 = D_{OA} \cdot D_{OB}.$$

证明 (1) 如图 1.1.2 所示. 以 D 为坐标原点建立坐标轴, 并设 A, B, C 的坐标分别为 x_1, x_2, x_3.



图 1.1.2 直线上任意的四点

于是

$$\begin{aligned}
&D_{DA}^2 \cdot D_{BC} + D_{DB}^2 \cdot D_{CA} + D_{DC}^2 \cdot D_{AB} + D_{BC} \cdot D_{CA} \cdot D_{AB} \\
=&x_1^2(x_3 - x_2) + x_2^2(x_1 - x_3) + x_3^2(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\
=&(x_1 - x_2)(x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2) + (x_2 - x_1)(x_1x_3 - x_1x_2 + x_2x_3) = 0.
\end{aligned}$$

(2) 如图 1.1.3 所示. 以 O 为坐标原点建立坐标轴, 并设 A, B, M, N 的坐标分别为 $x_1, x_2, x, -x$.

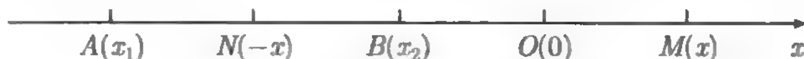


图 1.1.3 线段的定比分点

于是由

$$\frac{D_{AM}}{D_{MB}} = \frac{m}{n} = -\frac{D_{AN}}{D_{NB}},$$

得

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = -\frac{-x - x_1}{x_2 + x} = \frac{x + x_1}{x_2 + x},$$

从而

$$(x - x_1)(x_2 + x) = (x_2 - x)(x + x_1) \Rightarrow x^2 = x_1x_2 \Rightarrow D_{OM}^2 = D_{ON}^2 = D_{OA} \cdot D_{OB}.$$

定理 1.1.6 设 M, N 分别是有向线段 AB 及其延长线上的点. (1) 若点对 M, N 调和分割点对 A, B, 且 $D_{OM}^2 = D_{ON}^2 = D_{OA} \cdot D_{OB}$, 则 O 为 MN 的中点; (2) 若 O 为 MN 的中点, 且 $D_{OM}^2 = D_{ON}^2 = D_{OA} \cdot D_{OB}$, 则点对 M, N 调和分割点对 A, B.

证明 如图 1.1.4 所示. 以 AB 的中点 G 为原点, AB 所在直线建立坐标轴, 并设点 A, B, M, N, O 的坐标分别为 $-x_1, x_1, x_2, x, x'$.

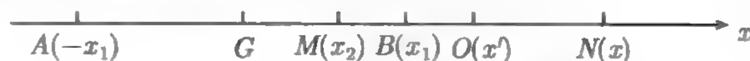


图 1.1.4 线段的调和分割

(1) 由 M, N 调和分割点对 A, B, 即 $\dfrac{D_{AM}}{D_{MB}} = -\dfrac{D_{AN}}{D_{NB}}$, 以及有向距离公式得

$$\frac{x_2 + x_1}{x_1 - x_2} = -\frac{x + x_1}{x_1 - x} \Rightarrow x = \frac{x_1^2}{x_2},$$

因此 MN 中点的坐标为 $x' = \dfrac{x + x_2}{2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2x_2}$.

又由 $D_{OM}^2 = D_{OA} \cdot D_{OB}$ 得

$$(x_2 - x')^2 = (-x_1 - x')(x_1 - x') \Rightarrow x' = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_2},$$

因为 O 的坐标与 MN 中点的坐标相同, 所以 O 是 MN 中点.

(2) 由 $D_{OM}^2 = D_{OA} \cdot D_{OB}$ 得

$$(x_2 - x')^2 = (-x_1 - x')(x_1 - x') \Rightarrow x' = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_2}.$$

又因为 O 是 MN 中点, 所以

$$\frac{x_2 + x}{2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_2} \Rightarrow x = \frac{x_1^2}{x_2}.$$

于是

$$\frac{D_{AM}}{D_{MB}} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 - x_2}, \quad \frac{D_{AN}}{D_{NB}} = \frac{x_1^2/x_2 + x_1}{x_1 - x_1^2/x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{D_{AM}}{D_{MB}} = -\frac{D_{AN}}{D_{NB}},$$

即点对 M, N 调和分割点对 A, B.

定理 1.1.7　设 P 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 所在直线上任意一点, 则

$$D_{AB}^2 \cdot D_{PC} + D_{CA}^2 \cdot D_{PB} - D_{PA}^2 \cdot D_{BC} + D_{BC}D_{PC}D_{PB} = 0(\text{为定值}). \quad (1.1.2)$$

证明　如图 1.1.5 所示. 取 B 为坐标原点, BC 为 x 建立直角坐标系. 设 A, C, P 的坐标分别为 $(a,b), (c,0), (x,0)$, 则

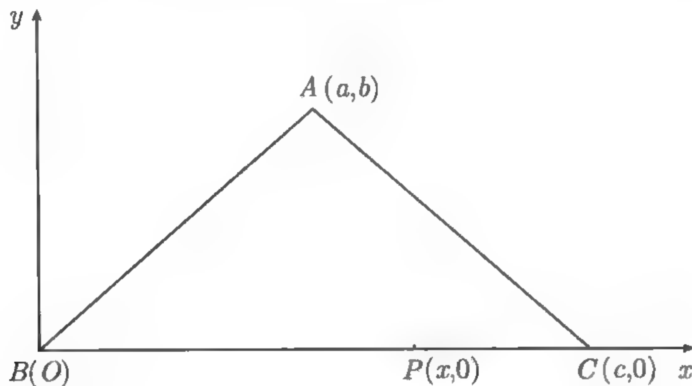


图 1.1.5　三角形 BC 边所在直线上任意一点

$$D_{AB}^2 = a^2 + b^2, D_{CA}^2 = (c-a)^2 + b^2, D_{PA}^2 = (a-x)^2 + b^2,$$
$$D_{PC} = c - x, D_{BC} = c, D_{PB} = x.$$

于是

$$\begin{aligned}
&D_{AB}^2 \cdot D_{PC} + D_{CA}^2 \cdot D_{PB} - D_{PA}^2 \cdot D_{BC} + D_{BC}D_{PC}D_{PB} \\
=&(a^2+b^2)(c-x) + [(c-a)^2+b^2]x - [(a-x)^2+b^2]c + c(c-x)x \\
=&cx^2 + [(c-a)^2 + b^2 - (a^2+b^2) + 2ac]x + [(a^2+b^2)c - (a^2+b^2)c] + c(c-x)x = 0.
\end{aligned}$$

注 1.1.3 当 P 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任意一点时, 定理 1.7 即为 Stewart 定理[1].

推论 1.1.1(Pappus 公式) 设 M 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点, 则

$$D_{AB}^2 + D_{CA}^2 = 2(D_{MA}^2 + D_{MB}^2).$$

证明 在式 (1.1.2) 中令 P 为 BC 的中点 M, 并将 $D_{BM} = D_{MC} = \frac{1}{2}D_{BC}$ 代入式 (1.1.2) 即得.

1.2 两点间有向距离公式在几何证明中的应用

本节主要讨论两点间有向距离公式在几何证明中的应用. 首先给出过平面四边形对角线交点直线的一个性质及推论; 其次给出平行于椭圆半轴直线的一个性质及推论, 从而推出著名的蝴蝶定理; 最后给出著名的欧拉定理、Servois 定理和一些数学竞赛题等的推广或证明.

1.2.1 过平面四边形对角线交点直线的性质与应用

定理 1.2.1 设 $P_1P_2P_3P_4$ 是平面四边形 (不必是凸的), 过对角线 P_1P_3, P_2P_4 交点 O 的直线 l 与各边 $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$ 的交点依次为 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, 则

$$\sum_{i=1}^{4}(-1)^i\frac{1}{D_{OQ_i}} = \frac{1}{D_{OQ_1}} + \frac{1}{D_{OQ_3}} - \frac{1}{D_{OQ_2}} - \frac{1}{D_{OQ_4}} = 0.$$

证明 如图 1.2.1 所示. 以 O 为坐标原点, l 为横轴建立坐标系. 设 $P_1P_2P_3P_4$ 的顶点坐标为 $P_i(x_i, y_i)(i = 1,2,3,4)$. 于是由 P_1, O, P_3 和 P_2, O, P_4 共线, 可得

$$y_3 = \frac{x_3y_1}{x_1}, \quad y_4 = \frac{x_4y_2}{x_2}.$$

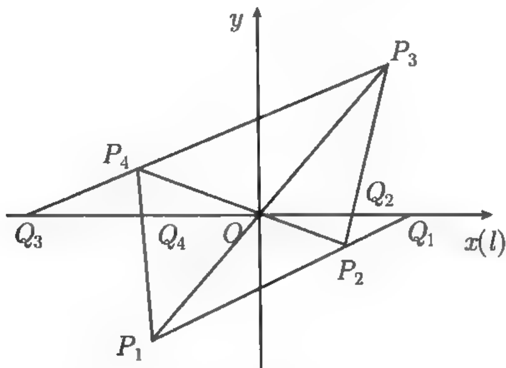


图 1.2.1　过平面四边形对角线交点直线的性质

在 P_iP_{i+1} 的直线方程$(y_{i+1}-y_i)x+(x_i-x_{i+1})y=x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i$ 中, 令 $y=0$, 求得 Q_i 的横坐标 $X_i=\dfrac{x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i}{y_{i+1}-y_i}(i=1,2,3,4)$. 于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{X_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2y_1-x_1y_2},\quad \frac{1}{X_2}=\frac{x_3y_1/x_1-y_2}{x_2x_3y_1/x_1-x_3y_2}=\frac{y_1-x_1y_2/x_3}{x_2y_1-x_1y_2},\\
&\frac{1}{X_3}=\frac{x_4y_2/x_2-x_3y_1/x_1}{x_3x_4y_2/x_2-x_3x_4y_1/x_1}=\frac{x_1y_2/x_3-x_2y_1/x_4}{x_1y_2-x_2y_1},\\
&\frac{1}{X_4}=\frac{y_1-x_4y_2/x_2}{x_4y_1-x_1x_4y_2/x_2}=\frac{x_2y_1/x_4-y_2}{x_2y_1-x_1y_2}.
\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{4}(-1)^i\frac{1}{D_{OQ_i}}=\frac{1}{D_{OQ_1}}+\frac{1}{D_{OQ_3}}-\frac{1}{D_{OQ_2}}-\frac{1}{D_{OQ_4}}=\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_3}-\frac{1}{X_2}-\frac{1}{X_4}=0.$$

推论 1.2.1　设 $P_1P_2P_3P_4$ 是平面四边形 (不必是凸的), 过对角线 P_1P_3,P_2P_4 交点 O 的直线 l 与各边 $P_1P_2,P_2P_3,P_3P_4,P_4P_1$ 的交点依次为 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4. 则 O 为 Q_2Q_4 的中点的充要条件是 O 为 Q_1Q_3 的中点.

证明　根据定理 1.2.1 得, O 为 Q_2Q_4 的中点 $\Leftrightarrow D_{OQ_2}+D_{OQ_4}=0\Leftrightarrow \dfrac{1}{D_{OQ_1}}+\dfrac{1}{D_{OQ_3}}=0\Leftrightarrow D_{OQ_1}+D_{OQ_3}=0\Leftrightarrow O$ 为 Q_1Q_3 的中点.

1.2.2　平行于椭圆半轴直线的性质与应用

定理 1.2.2　自椭圆中心向平行于其半轴的直线 l 引垂线, 垂足为 M, 过 M 作两条直线分别与椭圆相交于 P_1,P_2 和 P_3,P_4, 直线 P_2P_3,P_1P_4 分别交 l 于 A,B, 则 $d_{AM}=d_{BM}$.

证明　如图 1.2.2 所示. 取椭圆心为坐标原点, 与 l 平行的直线为横轴建立直角坐标系, 并设 M 到坐标原点的有向距离为 d, 椭圆的半轴为 a,b. 于是 M 的坐标为 $(0,d)$, 椭圆的方程为

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1.$$

设直线 P_1P_2, P_3P_4 的方程分别为

$$y = k_1x + d \text{ 和 } y = k_2x + d,$$

P_1, P_2, P_3, P_4 的坐标分别为 $P_1(x_1, k_1x_1+d), P_2(x_2, k_1x_2+d), P_3(x_3, k_2x_3+d)$, $P_4(x_4, k_2x_4 + d)$.

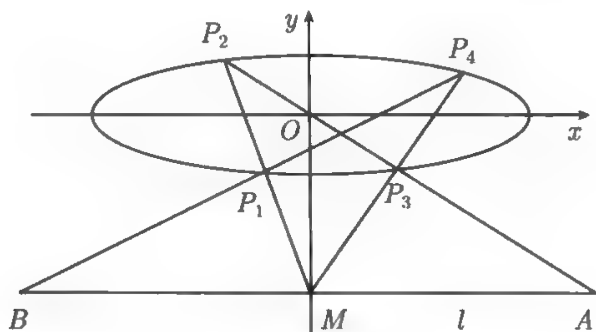


图 1.2.2 与椭圆半轴平行的直线的性质

将直线 P_1P_2 的方程 $y = k_1x + d$ 代入椭圆的方程, 并化简得

$$(b^2 + a^2k_1^2)x^2 + 2k_1da^2x + a^2(d^2 - R^2) = 0,$$

由根与系数的关系, 得

$$x_1 + x_2 = -\frac{2k_1da^2}{b^2 + a^2k_1^2}, \quad x_1x_2 = \frac{a^2(d^2 - R^2)}{b^2 + a^2k_1^2}.$$

同理, 将直线 P_3P_4 的方程 $y = k_2x + d$ 代入椭圆的方程, 可得

$$x_3 + x_4 = -\frac{2k_2da^2}{b^2 + a^2k_2^2}, \quad x_1x_2 = \frac{a^2(d^2 - R^2)}{b^2 + a^2k_2^2}.$$

于是易得

$$\frac{k_1x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{b^2 - d^2}{2d} = \frac{k_2x_3x_4}{x_3 + x_4}. \tag{1.2.1}$$

又 P_2P_3 的方程为

$$[(k_2x_3 + d) - (k_1x_2 + d)]x + (x_2 - x_3)y = x_2(k_2x_3 + d) - x_3(k_1x_2 + d),$$

即

$$(k_2x_3 - k_1x_2)x + (x_2 - x_3)y = (k_2 - k_1)x_2x_3 + d(x_2 - x_3).$$

令 $y = d$ 得 C 点的横坐标

$$X_1 = \frac{(k_2 - k_1)x_2x_3}{k_2x_3 - k_1x_2},$$

同理得 D 点的横坐标

$$X_2 = \frac{(k_2 - k_1)x_1 x_4}{k_2 x_4 - k_1 x_1}.$$

根据式 (1.2.1), 易证 $D_{CM} + D_{DM} = X_1 + X_2 = 0$, 于是 $d_{CM} = d_{DM}$.

特别, 当 $-b < d < b$ 时, 即得下面的结论.

推论 1.2.2(蝴蝶定理在椭圆中的推广)　设 M 是椭圆上平行于半轴的弦 AB 的中点, 过 M 作椭圆的另两条弦 P_1P_2, P_3P_4, 直线 P_2P_3, P_1P_4 分别交 AB 于 C, D, 则 $d_{CM} = d_{DM}$(图 1.2.3).

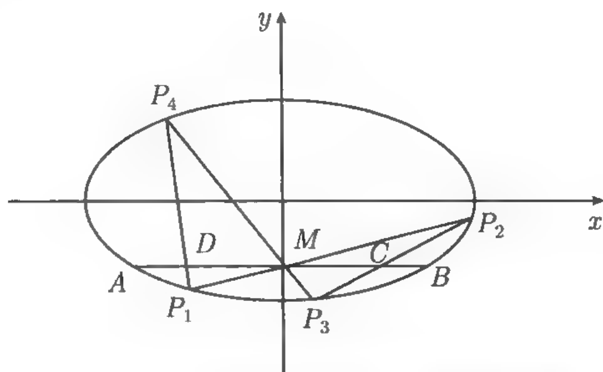


图 1.2.3　与椭圆半轴平行的弦的性质

当 $d = \pm b$ 时, 可以看成是推论 1.2.2 的特殊情形. 当 $|d| > b$ 时, 即得文献 [2] 中相应的结论.

推论 1.2.3(蝴蝶定理)　设 M 是圆的弦 AB 的中点, 过 M 作此圆的另两条弦 P_1P_2, P_3P_4, 直线 P_2P_3, P_1P_4 分别交 AB 于 C, D, 则 $d_{CM} = d_{DM}$.

证明　如图 1.2.4 所示. 在定理 1.2.2 中令 $a = b, -b < d < b$, 并注意到圆的任意一条弦都有圆的直径与之平行即得.

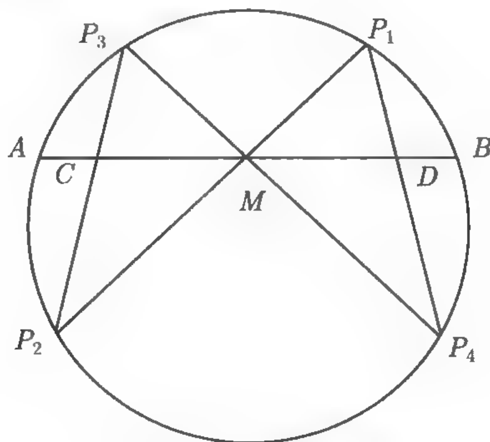


图 1.2.4　蝴蝶定理

注 1.2.1　如上设定的坐标系中, 可以是 P_2, P_3 与 P_1, P_4 分别位于 y 的两侧 (此时 C, D 位于弦 AB 之上), 也可以是 P_2, P_4 与 P_1, P_3 分别位于 y 的两侧 (此时 C, D 位于 AB 的延长线上), 后者在经典的证明中往往被忽视.

1.2.3　有向距离公式在几何证明中的应用

定理 1.2.3(欧拉定理)　证明: 三角形 ABC 中线的交点 (重心)M, 高线的交点 (垂心)H 及其外接圆的圆心 (外心)O 三点共线, 且 $d_{OH}=2d_{MH}$.

证明　如图1.2.5 所示. 不妨设三角形顶点的坐标为 $A(a\cos\alpha,a\sin\alpha)$, $B(a\cos\beta,a\sin\beta)$, $C(a\cos\gamma,a\sin\gamma)$ 且 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$, 则三角形外心和重心的坐标分别为 $O(0,0)$, $M\left(a\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3},0\right)$. 于是 AB 的直线方程为

$$(\sin\alpha-\sin\beta)x+(\cos\beta-\cos\alpha)x=a(\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta),$$

即

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot x+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot y=a\cos\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

从而求得 AB 边上的高线的方程

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot x-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot y=a\sin\frac{\alpha+\beta-2\gamma}{2},\tag{1.2.2}$$

同理可得 BC 边上的高线的方程

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot x-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot y=a\sin\frac{\beta+\gamma-2\alpha}{2},\tag{1.2.3}$$

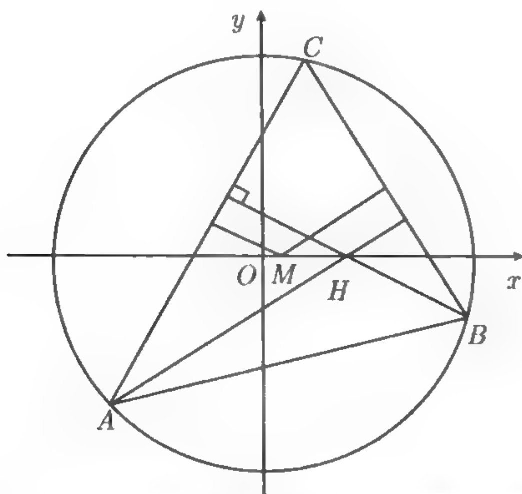


图 1.2.5　三角形重心、垂心和外心共线 (欧拉线)

式 (1.2.2) 和式 (1.2.3) 联立, 得

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} & -\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ \sin\dfrac{\beta+\gamma}{2} & -\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\end{vmatrix}=\sin\frac{\gamma-\alpha}{2},$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} a\sin\dfrac{\alpha+\beta-2\gamma}{2} & -\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ a\sin\dfrac{\beta+\gamma-2\alpha}{2} & -\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2} \end{vmatrix}=a\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma),$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} & a\sin\dfrac{\alpha+\beta-2\gamma}{2} \\ \sin\dfrac{\beta+\gamma}{2} & a\sin\dfrac{\beta+\gamma-2\alpha}{2} \end{vmatrix}=a\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=0,$$

于是垂心的坐标为 $H(a(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma),0)$. 所以 O,M,H 三点共线且 $d_{OH}=2d_{MH}$.

注 1.2.2　三角形重心、垂心和外心所在的直线称为**三角形的欧拉线**.

定理 1.2.4(Servois 定理)　三角形任意一个顶点到垂心的距离, 等于外心到它的对边距离的两倍.

证明　如图 1.2.6 所示. 以三角形 $P_1P_2P_3$ 外心 O 为坐标原点, 平行于 P_1P_2 的直线为 x 轴建立坐标系. 于是三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点坐标可设为

$$P_1(-R\cos\alpha,R\sin\alpha),\quad P_2(R\cos\alpha,R\sin\alpha),\quad P_3(R\cos\beta,R\sin\beta).$$

设三角形 $P_1P_2P_3$ 的垂心为 $H,P_{i+2}Q_i$ 垂直 P_iP_{i+1} 于 $Q_i(i=1,2,3)$, ON 垂直 P_1P_2 于 N. 于是 P_1P_3 的方程为

$$(\sin\beta-\sin\alpha)x-(\cos\alpha+\cos\beta)y=-R\sin(\alpha+\beta),$$

P_2Q_3 的方程设为

$$(\cos\alpha+\cos\beta)x+(\sin\beta-\sin\alpha)y=C,$$

将 $P_2(R\cos\alpha,R\sin\alpha)$ 代入上式得

$$C=R(\cos^2\alpha+\cos\beta\cos\alpha+\sin\alpha\sin\beta-\sin^2\alpha),$$

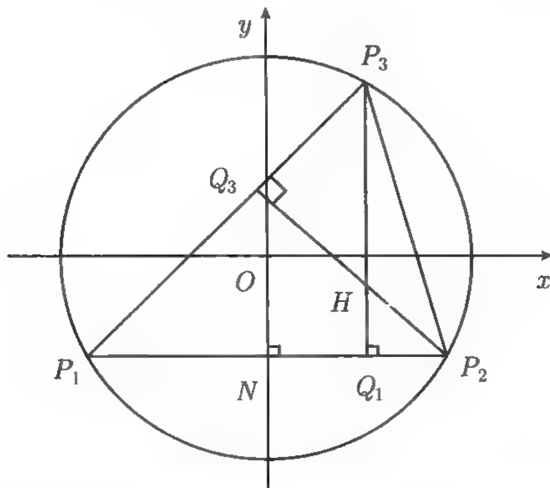


图 1.2.6　三角形垂心和重心的 Servois 定理

于是

$$(\cos\alpha+\cos\beta)x+(\sin\beta-\sin\alpha)y=R(\cos^2\alpha+\cos\beta\cos\alpha+\sin\alpha\sin\beta-\sin^2\alpha).$$

将 P_3Q_1 的方程 $x=R\cos\alpha$ 代入得

$$\begin{aligned}(\sin\beta-\sin\alpha)y=&R[(\cos^2\alpha+\cos\beta\cos\alpha+\sin\alpha\sin\beta-\sin^2\alpha)\\&-(\cos\alpha+\cos\beta)\cos\beta]\\=&R(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\beta-\cos^2\beta)\\=&R(\cos\beta-\sin\alpha)(\cos\beta+\sin\alpha),\end{aligned}$$

所以 H 的纵坐标为 $y_1=R(\sin\beta+2\sin\alpha)$. 故

$$d_{HP_3}=|R\cos\beta-(\sin\beta+2\sin\alpha)|=2R|\sin\alpha|=d_{ON}.$$

类似地, 可以证明其余两种情形.

定理 1.2.5　从线段 AB 上的另一点 C 向直线的一侧引线段 CD, P, N, M 分别是 BD, CD, AB 的分点且 $BP/PD=\lambda_1, CN/ND=AM/MB=\lambda_2\neq0, Q$ 是 MN 的分点且 $MQ/QN=\lambda_3$, 直线 PQ 与 AB 的交点为 E. 证明: $AE/EC=\lambda_3$ 的充分必要条件是 $\lambda_1=\lambda_3$.

证明　如图 1.2.7 所示. 设 A, B, C, D 的坐标分别为 $A(0,0), B(a,0), C(b,0), D(c,d)$, 于是其余各点的坐标为

$$P\left(\frac{a+\lambda_1c}{1+\lambda_1},\frac{\lambda_1d}{1+\lambda_1}\right),\quad N\left(\frac{b+\lambda_2c}{1+\lambda_2},\frac{\lambda_2d}{1+\lambda_2}\right),\quad M\left(\frac{\lambda_2a}{1+\lambda_2},0\right),$$

$$Q\left(\frac{\lambda_2a+\lambda_3b+\lambda_2\lambda_3c}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)},\frac{\lambda_2\lambda_3d}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\right).$$

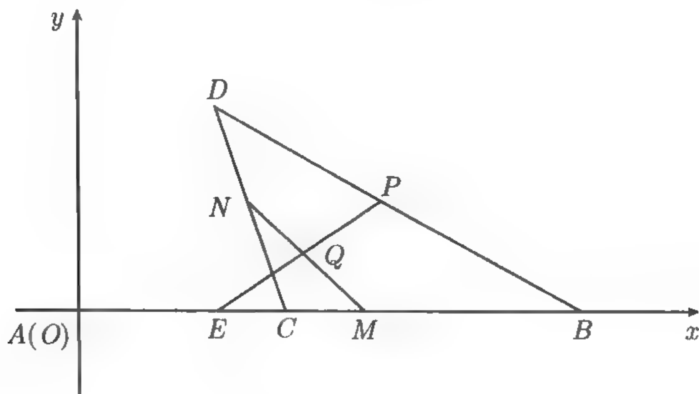


图 1.2.7

从而求得直线 PQ 的方程

$$\frac{\lambda_1(1+\lambda_3)-\lambda_2(\lambda_1-\lambda_3)}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}dx+\left[\frac{\lambda_2 a+\lambda_3 b+\lambda_2\lambda_3 c}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}-\frac{a+\lambda_1 c}{1+\lambda_1}\right]y$$
$$+\frac{\lambda_2(\lambda_3-\lambda_1)a-\lambda_1\lambda_3 b}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}d=0,$$

令 $y=0$, 求得 E 的横坐标

$$x_E=\frac{\lambda_2(\lambda_3-\lambda_1)a-\lambda_1\lambda_3 b}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_3)-\lambda_1(1+\lambda_3)},$$

于是

$$\frac{AE}{EC}=\lambda_3\Leftrightarrow\frac{\lambda_2(\lambda_3-\lambda_1)a-\lambda_1\lambda_3 b}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_3)-\lambda_1(1+\lambda_3)}=\frac{\lambda_3 b}{1+\lambda_3}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_3.$$

推论 1.2.4　从线段 AB 上的另一点 C 向直线的一侧引线段 CD, N, M 分别是 CD, AB 的分点且 $CN/ND=AM/MB=\lambda_2\neq 0, P, Q$ 分别是 BD, MN 的中点, 则直线 PQ 平分线段 AC.

证明　在定理 1.2.5 中令 $\lambda_1=\lambda_3=1$, 由其充分条件即得.

注 1.2.3　当 $\lambda_2=1$ 时, 推论 1.2.4 即为1978 年中国高中数学联赛试题的结论.

例 1.2.1(第 8 届全苏联数学奥林匹克竞赛题)　在等腰直角三角形 ABC 的两直角边 CA, CB 上分别取点 E, F, 使 $CE=CF$, 从点 C, E 依次引直线 AF 的垂线, 这两垂线的延长线分别交斜边 AB 于 M, N, 求证: $d_{MN}=d_{BM}$.

证明　如图 1.2.8 所示. 以 AB 所在直线为 x 轴、AB 的中垂线为 y 轴建立直角坐标系. 设三角形顶点的坐标为 $A(a,0), B(-a,0)$ 和 $C(0,a)(a>0), CE/EA=CF/FB=\lambda$.

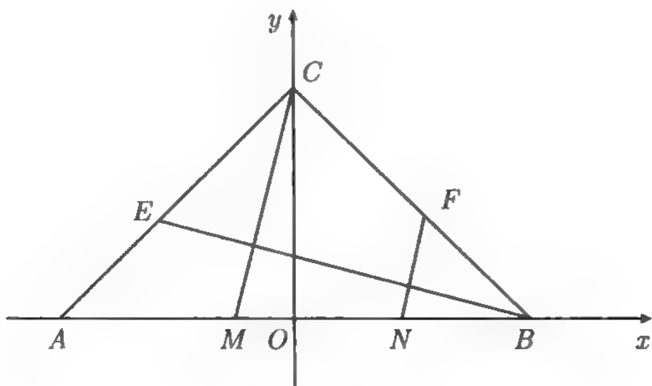


图 1.2.8

于是

$$E\left(\frac{\lambda a}{1+\lambda},\frac{a}{1+\lambda}\right), F\left(-\frac{\lambda a}{1+\lambda},\frac{a}{1+\lambda}\right);\quad k_{AF}=-\frac{1}{2\lambda+1}\Rightarrow k_{CM}=k_{EN}=2\lambda+1.$$

因此 CM 和 EN 的直线方程分别为

$$y-a=(2\lambda+1)x \text{ 和 } y-\frac{a}{1+\lambda}=(2\lambda+1)\left(x-\frac{a\lambda}{1+\lambda}\right),$$

在两方程中分别令 $y=0$, 得 M 和 N 点的横坐标

$$x_M=-\frac{a}{2\lambda+1},\quad x_N=\frac{2\lambda^2+\lambda-1}{(1+\lambda)(2\lambda+1)}a.$$

于是

$$D_{BM}=x_M-x_B=-\frac{a}{2\lambda+1}+a=\frac{2\lambda a}{2\lambda+1},$$
$$D_{MN}=x_N-x_M=\frac{2\lambda^2+\lambda-1}{(1+\lambda)(2\lambda+1)}a+\frac{a}{2\lambda+1}=\frac{2\lambda a}{2\lambda+1},$$

因此 $d_{MN}=d_{BM}$.

例 1.2.2 在三角形 ABC 中, $\angle C=90°$, $BE(BE')$ 是 $\angle B(\angle B$ 外角) 的平分线. $CD\perp AB$ 于 D 且交 $BE(BE')$ 于 $G(G')$. 又 $FG/\!/AB(F'G'/\!/AB)$ 且过 $G(G')$, 与 AC, BC 所在直线分别相交于 $F, G(F', G')$. 求证: $d_{AF}=d_{CE}(d_{AF'}=d_{CE'})$.

证明 如图 1.2.9 所示. 设三角形顶点的坐标为 $A(0,a), B(b,0), C(0,0)$, 于是 BC 的方程为 $y=0, AB$ 的方程为 $x/b+y/a=1$, 即 $ax+by-ab=0$. 从而求得 $BE(BE')$ 的方程

$$\frac{ax+by-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm y, \text{ 即 } ax+(b\pm\sqrt{a^2+b^2})y-ab=0.$$

令 $x=0$, 求得 $E(E')$ 的纵坐标

$$y=\frac{ab}{b\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

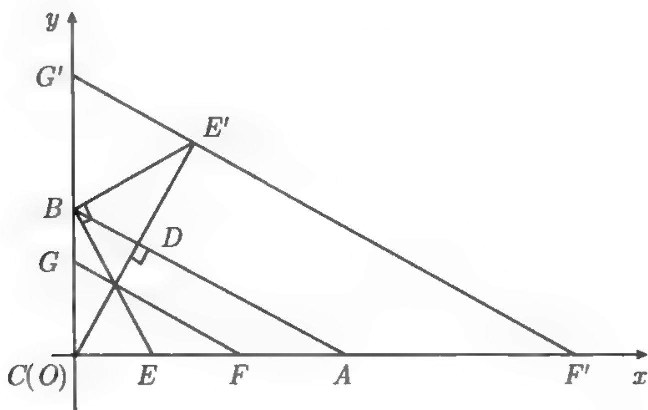


图 1.2.9

又将 CD 的方程 $y=\dfrac{b}{a}x$ 代入 $BE(BE')$ 的方程, 求得 $G(G')$ 的坐标

$$\begin{cases} x=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2\pm b\sqrt{a^2+b^2}}, \\ y=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2\pm b\sqrt{a^2+b^2}}, \end{cases}$$

于是求得 $FG(F'G')$ 的方程

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\pm b}.$$

令 $x=0$, 求得 $F(F')$ 的纵坐标

$$y=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\pm b},$$

于是

$$D_{CE}=y_E-y_C=\frac{ab}{b+\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$D_{FA}=y_A-y_F=a-\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b+\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{b+\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$D_{CE'}=y'_E-y_C=\frac{ab}{b-\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$D_{F'A}=y_A-y'_F=a-\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}-b}=\frac{ab}{b-\sqrt{a^2+b^2}},$$

所以 $d_{AF}=d_{CE}, d_{AF'}=d_{CE'}$.

注 1.2.4　例 1.2.2 内角平分线的情形即 1979 年中国宁夏回族自治区数学竞赛题.

例 1.2.3(1973 年全苏联数学奥林匹克竞赛题)　过圆外一点 O 作 $\odot G$ 的两条切线, 切点分别为 A,B, 过点 A 作弦 $AC//OB$, 连接 OC 交 $\odot G$ 于点 E, 直线 AE,OB 交于点 K, 求证 $OK=KB$.

证明　如图 1.2.10 所示. 不妨设 O,B 两点的坐标分别为 $O(0,0),B(b,0),\odot G$ 的方程为 $(x-b)+(y-a)^2=a^2(0<a<|b|)$. 于是求得 OG 的斜率 $k_{OG}=a/b, AB$ 的方程为

$$y=-\frac{1}{k_{OG}}(x-b)=-\frac{b}{a}(x-b),$$

代入 $\odot G$ 的方程并化简得

$$(x-b)[(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)b]=0,$$

从而求得 A 点的坐标

$$\begin{cases}x_A=\dfrac{(b^2-a^2)b}{a^2+b^2},\\ y_A=\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}.\end{cases}$$

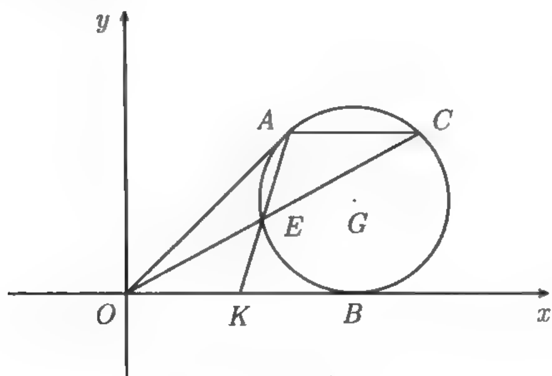


图 1.2.10

将$y_A=\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}$ 代入 $\odot G$ 的方程, 求得 C 点的横坐标 $x_C=\dfrac{(3a^2+b^2)b}{a^2+b^2}$. 于是 OC

的方程为 $y=\dfrac{y_C}{x_C}x=\dfrac{2ab}{3a^2+b^2}x$, 将其代入 $\odot G$ 的方程并化简得

$$[(a^2+b^2)x-(3a^2+b^2)b][(9a^2+b^2)x-(3a^2+b^2)b]=0,$$

从而求得 E 的坐标

$$\begin{cases} x_E=\dfrac{(3a^2+b^2)b}{9a^2+b^2}, \\ y_E=\dfrac{2ab^2}{9a^2+b^2}. \end{cases}$$

在 AE 的方程 $(y_A-y_E)x+(x_E-x_A)y+(x_Ay_E-x_Ey_A)=0$ 中令 $y=0$, 解得

$$x_K=\frac{x_Ey_A-x_Ay_E}{y_A-y_E}=\frac{2(3a^2+b^2)ab^2-2(b^2-a^2)ab^3}{2(9a^2+b^2)ab^2-2(a^2+b^2)ab^2}=\frac{b}{2}=\frac{1}{2}x_B,$$

因此例 1.2.3 结论成立.

例 1.2.4(1964 年莫斯科数学奥林匹克竞赛题) 若 AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点. $\odot O$ 过 B 点的切线与直线 AC 相交于点 M. 求证: $\odot O$ 过点 C 的切线平分线段 BM.

证明 如图 1.2.11 所示. 设 $\odot O$ 上各点的坐标为 $A(-R,0),B(R,0),C(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$, 于是 $\odot O$ 的方程为 $x^2+y^2=R^2$, 点 B 处的切线方程为 $x=R$, AC 的直线方程为

$$\sin\alpha\cdot x-R(\cos\alpha+1)y+R\sin\alpha=0,$$

令 $x=R$, 求得点 M 的纵坐标 $y_M=\dfrac{2R\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

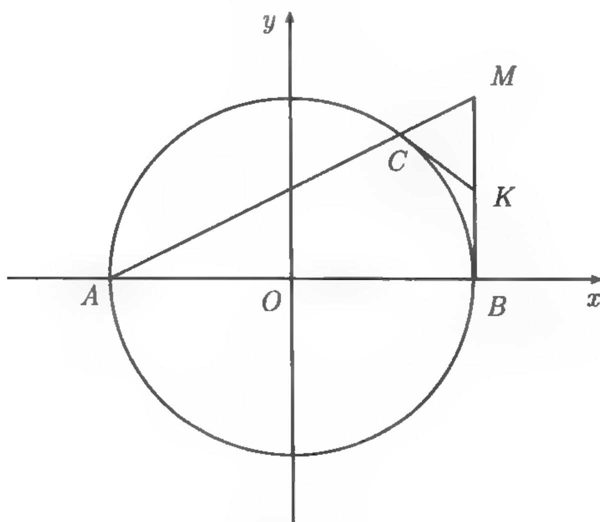


图 1.2.11

又设点 C 处的切线与 BM 的交点为 K, 将 $x=R$ 代入 C 处的切线方程

$$\cos\alpha\cdot x+\sin\alpha\cdot y=R,$$

求得点 K 的纵坐标 $y_K = \dfrac{R(1-\cos^2\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \dfrac{R\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. 故

$$D_{BK} = y_K - y_B = \frac{R\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = y_M - y_K = D_{KM} \Rightarrow d_{BK} = d_{KM}.$$

例 1.2.5(1978 年中国天津市数学竞赛题)　设三角形 ABC 为等腰三角形, BC 为底边, O 为从 A 到 BC 的垂足, 以 AO 为直径作圆, 由 B,C 依次作圆的切线 BE 和 CF(不同于 BC), E,F 为切点. 证明: 弦 EF 在三角形 ABC 内部的一段等于它在外部两段长之和.

证明　如图 1.2.12 所示. 设 EF 与三角形两腰 AB,AC 的交点分别为 M,N, 三角形 ABC 顶点的坐标为 $A(0,2a),B(-b,0),C(b,0)(a,b>0)$, 于是以 AO 为直径的圆的方程为

$$x^2+(y-a)^2=a^2, \text{即} x^2+y^2-2ay=0.$$

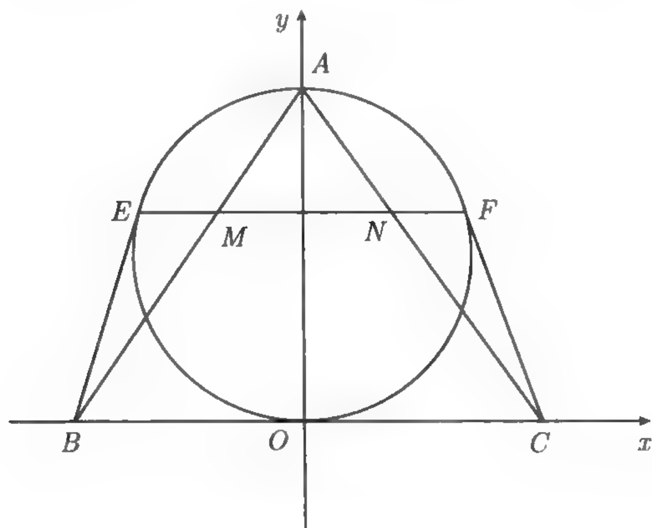


图 1.2.12

又设切点 E 的坐标为 $E(x_E,y_E)$, 于是

$$x_E^2+y_E^2-2ay_E=0, \tag{1.2.4}$$

且 E 处的切线方程为 $x_Ex+y_Ey-a(y+y_E)=0$, 将 $B(-b,0)$ 代入得, 求得切线 BE 的方程

$$-bx_E-ay_E=0, \tag{1.2.5}$$

(1.2.4) 和 (1.2.5) 两式联立, 求得切点 E 的坐标

$$x_E=-\frac{2a^2b}{a^2+b^2},\quad y_E=\frac{2ab^2}{a^2+b^2}.$$

类似地, 可以求得切点 F 的坐标

$$x_F = \frac{2a^2b}{a^2+b^2}, \quad y_F = \frac{2ab^2}{a^2+b^2}.$$

于是 EF 的直线方程为 $y = \dfrac{2ab^2}{a^2+b^2}$, 代入 AB 的直线方程 $2ax - by = -2ab$, 求得 M 的横坐标 $x_M = -\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}$. 类似地可以求得 N 的横坐标 $x_N = \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}$. 所以

$$D_{MN} = x_N - x_M = \frac{2a^2b}{a^2+b^2},$$

$$D_{EM} + D_{NF} = (x_M - x_E) + (x_F - x_N) = -\frac{2a^2b}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b}{a^2+b^2} = \frac{2a^2b}{a^2+b^2},$$

故 $D_{MN} = D_{EM} + D_{NF}, d_{MN} = d_{EM} + d_{NF}$.

1.3 有向距离在坐标轴上的投影及其应用

本节主要讨论有向距离在坐标轴上的投影与应用. 首先介绍有向线段在坐标轴上投影的概念, 给出平行线段有向距离在坐标轴上投影的性质定理及其若干推论, 并据此给出著名的中线定理和一些数学竞赛题的推广或证明; 其次给出不平行线段有向距离在坐标轴上的投影的一个性质定理, 并据此给出一些数学竞赛题的推广和证明; 最后给出两点间的距离公式, 并据此给出过一点的任意直线与一圆相交的定值定理, 以及著名的 Ptolemy 定理和一道数学竞赛题的证明和推广.

1.3.1 平行线段有向距离在坐标轴上的投影及其应用

定义 1.3.1 设 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$ 是 xOy 平面上任意两点, 则称 $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ 分别为线段 P_1P_2 的有向距离 $D_{P_1P_2}$ 在 x 轴、y 轴上的投影, 记为 $\mathrm{Prj}D_{P_1P_2-x}(\mathrm{Prj}D_{P_1P_2-y})$, 即

$$\mathrm{Prj}D_{P_1P_2-x} = x_2 - x_1 \quad (\mathrm{Prj}D_{P_1P_2-y} = y_2 - y_1).$$

定理 1.3.1 设 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2); Q_1(x_1',y_1'), Q_2(x_2',y_2')$ 是两平行直线 l_1, l_2 上的两点. 若 $x_1 \neq x_2, x_1' \neq x_2'(y_1 \neq y_2, y_1' \neq y_2')$, 则

$$D_{P_1P_2} = kD_{Q_1Q_2} \Leftrightarrow x_2 - x_1 = k(x_2' - x_1') \quad (D_{P_1P_2} = kD_{Q_1Q_2} \Leftrightarrow y_2 - y_1 = k(y_2' - y_1')).$$

证明 设平行直线 l_1, l_2 与 x 轴的夹角为 $\theta(\neq \pi/2)$, 于是

$$D_{P_1P_2}\cos\theta = x_2 - x_1, \quad D_{Q_1Q_2}\cos\theta = x_2' - x_1',$$

注意到 $\cos\theta \neq 0$, 有

$$x_2 - x_1 = k(x_2' - x_1') \Leftrightarrow D_{P_1P_2}\cos\theta = kD_{Q_1Q_2}\cos\theta \Leftrightarrow D_{P_1P_2} = kD_{Q_1Q_2}.$$

类似地, 可以证明 $y_1 \neq y_2, y_1' \neq y_2'$ 的情形.

特别地, 当 $k=1$ 时和 l_1, l_2 重合时, 有下面的结论.

推论 1.3.1　设 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2); Q_1(x_1',y_1'), Q_2(x_2',y_2')$ 是两平行直线 l_1, l_2 上的两点. 若 $x_1 \neq x_2, x_1' \neq x_2'(y_1 \neq y_2, y_1' \neq y_2')$, 则线段 P_1P_2, Q_1Q_2 的有向距离相等的充分必要条件是这两条线段的有向距离在 x 轴 (y 轴) 上的投影相等, 即

$$D_{P_1P_2} = D_{Q_1Q_2} \Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_2' - x_1' \quad (D_{P_1P_2} = D_{Q_1Q_2} \Leftrightarrow y_2 - y_1 = y_2' - y_1').$$

推论 1.3.2　设 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2); Q_1(x_1',y_1'), Q_2(x_2',y_2')$ 是同一直线 l 上的四点. 若 $x_1 \neq x_2$, $x_1' \neq x_2'(y_1 \neq y_2, y_1' \neq y_2')$, 则

$$D_{P_1P_2} = kD_{Q_1Q_2} \Leftrightarrow x_2 - x_1 = k(x_2' - x_1') \quad (D_{P_1P_2} = kD_{Q_1Q_2} \Leftrightarrow y_2 - y_1 = k(y_2' - y_1')).$$

推论 1.3.3　设 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), P_3(x_3,y_3)$ 是同一直线 l 上的不同三点. 若 $x_1 \neq x_2$, $(y_1 \neq y_2)$, 则

$$D_{P_1P_2} = D_{P_2P_3} \Leftrightarrow 2x_2 = x_1 + x_3 (D_{P_1P_2} = D_{P_2P_3} \Leftrightarrow 2y_2 = y_1 + y_3).$$

定理 1.3.2(中线定理)　三角形任意一个顶点到重心的距离, 等于它的对边中点到重心距离的两倍.

证明　如图 1.3.1 所示. 设三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 的中点依次为 Q_1, Q_2, Q_3, 重心为 M, 三角形顶点的坐标为 $P_i(x_i, y_i)(i=1,2,3)$, 于是三角形各边中点及重心的坐标为

$$Q_i\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)(i=1,2,3), \quad M\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

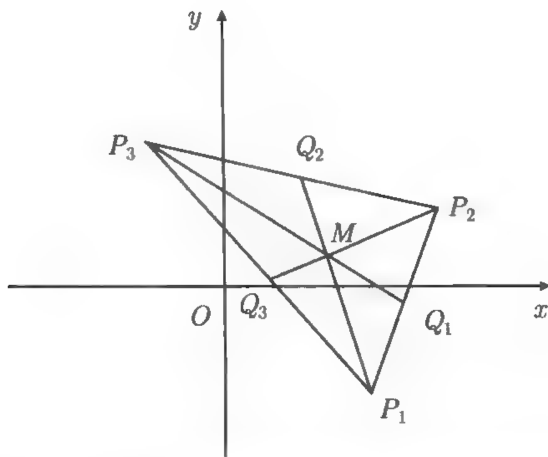


图 1.3.1　三角形的重心是其中线的三等分点

所以

$$x_M - x_{Q_i} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} - \frac{x_i+x_{i+1}}{2} = \frac{2x_{i+2}-x_i-x_{i+1}}{6}$$
$$= x_{i+2} - \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = x_{P_{i+2}} - x_M,$$

同理可以证明 $y_M - y_{Q_i} = y_{P_{i+2}} - y_M$.

由于三角形的任一中线在两坐标轴上的投影不可能同时为零, 因此由推论 1.3.1 知定理 1.3.2 结论成立.

定理 1.3.3 在三角形 ABC 中, $\angle C$ 为直角, $\angle A = 30°$, 分别以 AB, AC 为边在三角形 ABC 的外侧作两个相似的三角形 ABE 和 ACF, 且 EF 交 AB 于 G. 求证: $d_{EG} = d_{GF}$ 的充分必要条件是三角形 ABE 和 ACF 都是正三角形.

证明 如图 1.3.2 所示. 不妨设三角形 ABC 顶点的坐标为 $A(a,0), B(0,a/\sqrt{3})$, $C(0,0), E$ 到 AB 的距离与 AB 的距离之比为 $\mu(>0)$, 于是 $E(a/2+\mu a/\sqrt{3}, \sqrt{3a}/6+\mu a), F(a/2,-\mu a)$. 从而求得 EF 的方程

$$(2+8\sqrt{3}\mu)x - 4\mu y = (4\mu^2+4\sqrt{3}\mu+1)a. \tag{1.3.1}$$

又 AB 的方程为

$$x+\sqrt{3}y = a, \tag{1.3.2}$$

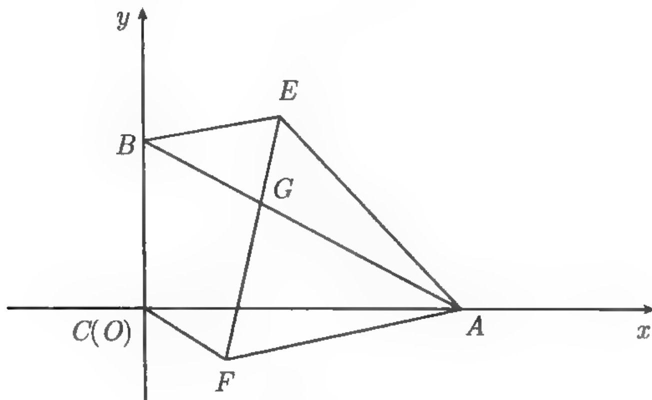


图 1.3.2

式 (1.3.1) 和式 (1.3.2) 联立, 求得

$$x_G = \begin{vmatrix} (4\mu^2+4\sqrt{3}\mu+1)a & -4\mu \\ a & \sqrt{3} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2+8\sqrt{3}\mu & -4\mu \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{4\sqrt{3}\mu^2+16\mu+\sqrt{3}}{28\mu+2\sqrt{3}}.$$

于是由 $2x_G = x_E + x_F$, 得

$$\frac{4\sqrt{3}\mu^2+16\mu+\sqrt{3}}{14\mu+\sqrt{3}} = 1 + \frac{\mu}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \mu(2\mu-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

因此, 由推论 1.3.2 知, $d_{EG}=d_{GF}$ 的充分必要条件是三角形 ABE 和 ACF 都是正三角形.

注 1.3.1　定理 1.3.2 的必要性即为1985 年北京市数学竞赛题.

定理 1.3.4　设三角形 ABC 为内角三角形, 线段 MN 的两个端点分别在两边 AB, AC 上, $AD\perp BC$ 于 E, 过线段 MN 上的点 F 作 BC 边的平行线, 分别交 AB, AC 于 P, Q. 若 MN 与 BC 不平行, 证明 MN 在 BC 边上的投影等于 PQ 的充分必要条件是 $MF/FN=BE/EC$.

证明　如图 1.3.3 所示. 不妨设三角形 ABC 顶点的坐标为 $A(0,a), B(-b,0), C(c,0), AM/MB=\lambda_1$, $AN/NC=\lambda_2, MF/FN=\lambda_3(\lambda_1\neq\lambda_2)$, 于是求得其余各点的坐标为 $M\left(-\frac{\lambda_1 b}{1+\lambda_1},\frac{a}{1+\lambda_1}\right), N\left(\frac{\lambda_2 c}{1+\lambda_2},\frac{a}{1+\lambda_2}\right), F\left(\frac{-\lambda_1(1+\lambda_2)b+(1+\lambda_1)\lambda_2\lambda_3 c}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)},\right.$ $\left.\frac{1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_1\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}a\right)$.

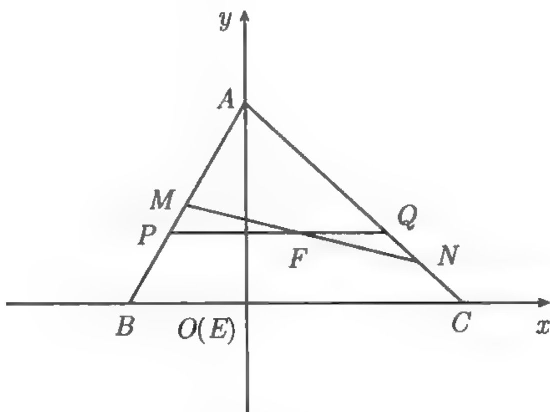


图 1.3.3

在 AB 直线的方程 $-x/b+y/a=1$ 中, 令 $y=\frac{1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_1\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}a$, 求得 P 点的横坐标

$$x_P=-\frac{\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}b.$$

同理由 AC 直线的方程 $x/c+y/a=1$, 求得 Q 点的横坐标

$$x_Q=\frac{\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}c,$$

从而

$$D_{PQ}=x_Q-x_P=\frac{\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}(b+c).$$

又 MN 在 BC 边上的投影为 $\mathrm{Prj}D_{MN-x}=x_N-x_M=\frac{\lambda_2 c}{1+\lambda_2}+\frac{\lambda_1 b}{1+\lambda_1}$, 故 MN 在 BC 边上的投影等于

$$\begin{aligned}PQ &\Leftrightarrow \frac{\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}(b+c)=\frac{\lambda_2 c}{1+\lambda_2}+\frac{\lambda_1 b}{1+\lambda_1}\\ &\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)(b+c)\\ &=(1+\lambda_1)\lambda_2(1+\lambda_3)c+\lambda_1(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)b\\ &\Leftrightarrow (\lambda_1-\lambda_2)(c-\lambda_3 b)=0\Leftrightarrow \lambda_3=c/b\Leftrightarrow MF/FN=BE/EC.\end{aligned}$$

推论 1.3.4 设三角形 ABC 为等腰三角形, 线段 MN 的两个端点分别在两腰 AB, AC 上, 过线段 MN 上的点 F 作底边 BC 的平行线, 交两腰 AB, AC 于 P, Q, 证明 MN 在 BC 边上的投影等于 PQ 的充分必要条件是 $MF/FN=1$.

证明 当 MN 平行于底边 BC 时结论显然成立. 当 MN 不平行于底边 BC 时, 在定理 1.2.4 中令 $\lambda_3=1$ 即得.

注 1.3.2 推论的充分性即为1956 年波兰数学奥林匹克竞赛题的结论.

例 1.3.1(1964 年澳大利亚数学奥林匹克竞赛题) 设 M, N 为三角形 ABC 的边 BC 上的两点, 且满足 $BM=MN=NC$, 一平行于 AC 的直线分别交 AB, AM, AN 于 D, E, F, 求证: $EF=3DE$.

证明 如图 1.3.4 所示. 设三角形顶点的坐标为 $A(0,a), B(-b,0), C(c,0)$, 于是 M, N 的横坐标为 $x_M=\dfrac{c-2b}{3}, x_N=\dfrac{2c-b}{3}$. 故求得 AB, AM, AN 的方程分别为

$$-x/b+y/a=1,\quad x/x_M+y/a=1,\quad x/x_N+y/a=1.$$

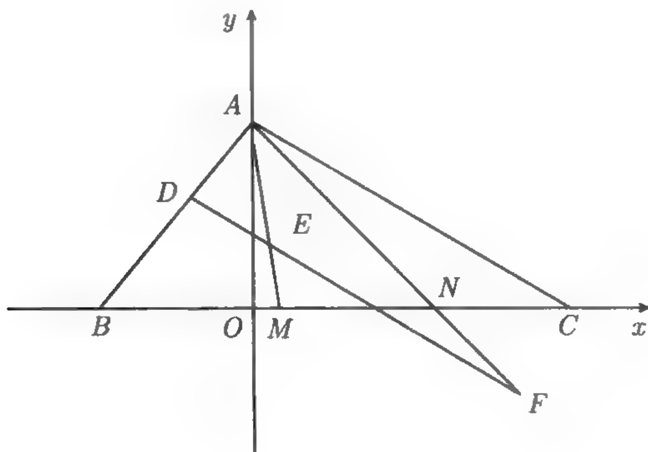


图 1.3.4

设 DE 的方程为 $x/c+y/a=k$, 即 $y=a(k-x/c)$, 分别代入 AB, AM, AN 的方程, 求得 D, M, N 的横坐标

$$x_D=\frac{(k-1)bc}{b+c},\quad x_E=\frac{(k-1)(2b-c)c}{2(b+c)},\quad x_F=\frac{(k-1)(b-2c)c}{b+c},$$

于是 DE, EF 在 x 轴上的投影分别为

$$x_E - x_D = \frac{(k-1)(2b-c)c}{2(b+c)} - \frac{(k-1)bc}{b+c} = \frac{(1-k)c^2}{2(b+c)},$$

$$x_F - x_E = \frac{(k-1)(b-2c)c}{b+c} - \frac{(k-1)(2b-c)c}{2(b+c)} = \frac{3(1-k)c^2}{2(b+c)}.$$

所以 $x_F - x_E = 3(x_E - x_D) \Rightarrow D_{EF} = 3D_{DE} \Rightarrow d_{EF} = 3d_{DE}$.

例 1.3.2(1964 年莫斯科数学奥林匹克竞赛题)　在线段 AC 上任取一点 B, 分别以线段 AB, BC 和 AC 为直径作 $\odot O_1, \odot O_2$ 和 $\odot O$. 过点 B 作任一直线, 与 $\odot O$ 相交于点 P 和 Q, 与 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 分别相交于 R 和 S, 求证 $PR = QS$.

证明　如图 1.3.5 所示. 设 $\odot O_1$ 的方程为 $(x+c_1)^2+y^2 = c_1^2(c_1>0)$, $\odot O_2$ 的方程为 $(x+c_2)^2+y^2=c_2^2(c_2>0)$, 于是$\odot O$ 的方程为 $[x-(c_2-c_1)]^2+y^2 = \frac{1}{4}(c_1+c_2)^2$. 将过 B 点的直线 $y=kx$ 分别代入 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的方程, 求得 R 和 S 的横坐标

$$x_R = -\frac{2c_1}{1+k^2}, \quad x_S = \frac{2c_2}{1+k^2}.$$

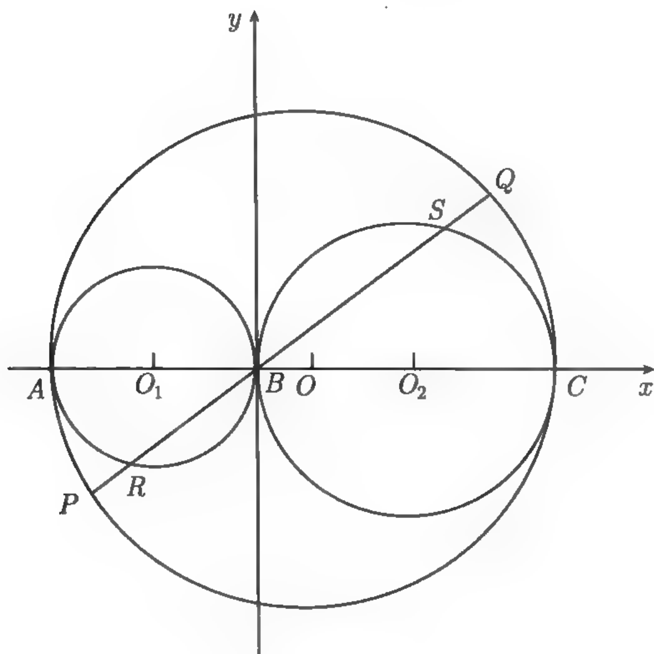


图 1.3.5

又将直线 $y=kx$ 代入 $\odot O$ 的方程, 并化简得

$$4(1+k^2)x^2 - 8(c_2-c_1)x + 3(c_1^2 - 3c_1c_2 + c_2^2) = 0,$$

解得

$$x = \frac{2(c_2-c_1) \pm m}{2(1+k^2)},$$

其中 $m = \sqrt{(1-3k^2)c_1^2 + (1-3k^2)c_2^2 + 2(1+5k^2)c_1c_2}$.

于是分别求得 D_{PR}, D_{SQ} 在 x 轴上的投影分别为

$$x_R - x_P = -\frac{2c_1}{1+k^2} - \frac{2(c_2-c_1)-m}{2(1+k^2)} = \frac{-2(c_1+c_2)+m}{2(1+k^2)},$$

$$x_Q - x_S = \frac{2(c_2-c_1)+m}{2(1+k^2)} - \frac{2c_2}{1+k^2} = \frac{-2(c_1+c_2)+m}{2(1+k^2)},$$

所以 $D_{PR} = D_{SQ}, d_{PR} = d_{SQ}$.

例 1.3.3(1945 年莫斯科数学奥林匹克竞赛题)　将平行四边形 $ABCD$ 的边 AD 分为 n 等份, 并将它的第一个分点 P 与顶点 B 连结起来. 设 BP 交对角线 AC 于点 Q, 求证: $d_{AC} = (n+1)d_{AQ}$.

证明　如图 1.3.6 所示. 设平行四边形顶点的坐标为 $A(a,b), B(0,0), C(c,0), D(a+c,b)$, 于是由 $AP/PD = 1/(n-1)$ 求得第一个分点的坐标 $P((na+c)/n, b)$.

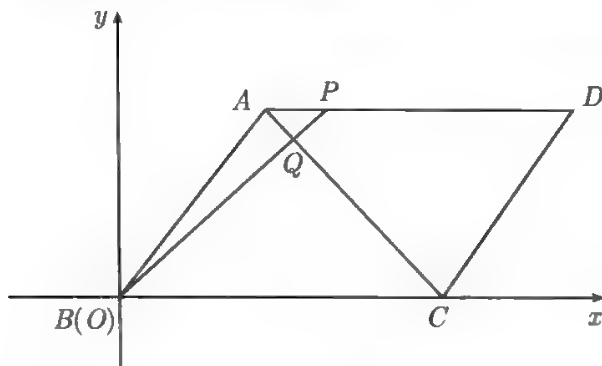


图 1.3.6

又 AC 的方程为$bx+(c-a)y-bc=0$, 将 BP 的方程代入求得点 Q 的横坐标 $x_Q = \dfrac{na+c}{n+1}$. 于是

$$\mathrm{Prj}D_{AQ-x} = x_Q - x_A = \frac{na+c}{n+1} - a = \frac{c-a}{n+1}, \quad \mathrm{Prj}D_{AC-x} = x_C - x_A,$$

所以 $\mathrm{Prj}D_{AQ-x} = (n+1)\mathrm{Prj}D_{AQ-x}, d_{AQ} = (n+1)d_{AC}$.

例 1.3.4(1952 年基辅数学奥林匹克竞赛题)　设 $P_1P_2\cdots P_5$ 是凸五边形, MN, PQ 分别是边 $P_1P_2, P_3P_4; P_2P_3, P_4P_5$ 的中点 $M, N; P, Q$ 的连线, 求证: MN 和 PQ 中点的连线 $RS//P_1P_5$ 且 $d_{RS} = d_{P_1P_5}/4$.

证明　如图 1.3.7 所示. 设五边形顶点的坐标为 $P_i(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,5)$, 于是各边中点的坐标为 $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right), N\left(\dfrac{x_3+x_4}{2}, \dfrac{y_3+y_4}{2}\right); P\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right), Q\left(\dfrac{x_4+x_5}{2}, \dfrac{y_4+y_5}{2}\right)$, 故 MN 和 PQ 中点的坐标分别为 $R\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right), S\left(\dfrac{x_2+x_3+x_4+x_5}{4}, \dfrac{y_2+y_3+y_4+y_5}{4}\right)$.

因为$k_{AE}=\dfrac{y_E-y_A}{x_E-x_A}=\dfrac{y_5-y_1}{x_5-x_1}=\dfrac{y_R-y_S}{x_R-x_S}=k_{RS}, \mathrm{Prj}D_{AE-x}=x_E-x_A=x_5-x_1=4(x_S-x_R)=4\,\mathrm{Prj}D_{RS-x}$, 所以 $RS//P_1P_5, d_{RS}=d_{P_1P_5}/4$.

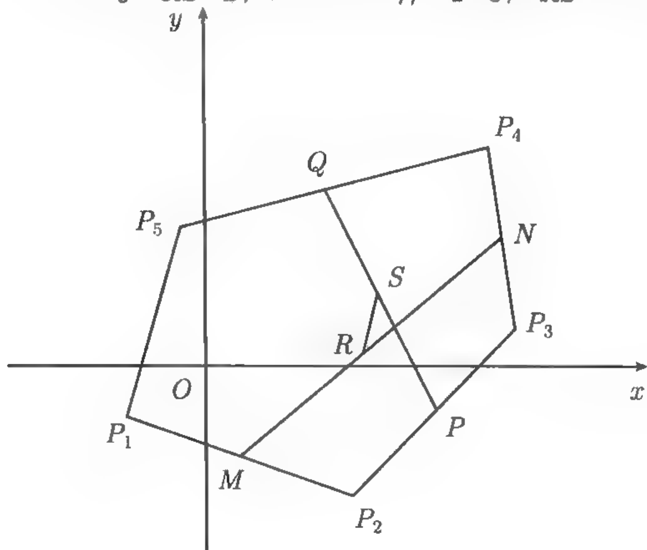


图 1.3.7

例 1.3.5　在三角形 ABC 中, BE 和 CF 是相应边上的高, 分别过顶点 B 和 C 引直线 EF 的垂线 BH 和 CG, 垂足为 H, G, 求证 $d_{HF}=d_{EG}$.

证明　如图 1.3.8 所示. 当 $\angle B=90°$ 或 $\angle C=90°$ 时, H 和 F 重合, E 和 G 重合, 因此结论成立.

当 $\angle B\neq 90°, \angle C\neq 90°$ 时, 设三角形顶点的坐标为 $A(0,a), B(-b,0), C(c,0)$ $(bc\neq 0)$, 于是 AB 的直线方程为 $-x/b+y/a=1$, 即

$$y=a(1+x/b), \tag{1.3.3}$$

CF 的方程为

$$y=b(c-x)/a. \tag{1.3.4}$$

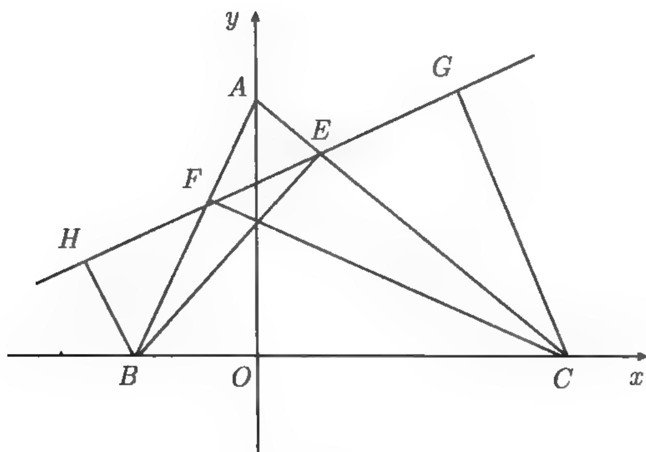


图 1.3.8

(1.3.3) 和 (1.3.4) 两式联立, 求得 F 点的坐标

$$x_F = \frac{b(bc-a^2)}{a^2+b^2}, \quad y_F = \frac{ab(b+c)}{a^2+b^2}.$$

同理可以求得 E 点的坐标

$$x_E = \frac{c(a^2-bc)}{a^2+b^2}, \quad y_E = \frac{ac(b+c)}{a^2+b^2},$$

从而求得直线 EF 的方程

$$a(b-c)x + (a^2+bc)y = 2abc, \tag{1.3.5}$$

直线 BH 的方程

$$(a^2+bc)x - a(b-c)x = -b(a^2+bc), \tag{1.3.6}$$

直线 CG 的方程

$$(a^2+bc)x - a(b-c)x = c(a^2+bc). \tag{1.3.7}$$

式 (1.3.5) 和式 (1.3.6)、式 (1.3.7) 分别联立, 求得 H, G 点的横坐标坐标

$$x_H = \begin{vmatrix} 2abc & a^2+bc \\ -b(a^2+bc) & -a(b-c) \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a(b-c) & a^2+bc \\ a^2+bc & -a(b-c) \end{vmatrix} = -\frac{b(a^4+2a^2c^2+b^2c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)},$$

$$x_G = \begin{vmatrix} 2abc & a^2+bc \\ c(a^2+bc) & -a(b-c) \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a(b-c) & a^2+bc \\ a^2+bc & -a(b-c) \end{vmatrix} = \frac{c(a^4+2a^2b^2+b^2c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}.$$

于是

$$\mathrm{Prj}D_{EG-x} = x_G - x_E = \frac{c(a^4+2a^2b^2+b^2c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} - \frac{c(a^2-bc)}{a^2+b^2} = \frac{bc[(a^2+b^2)c+(a^2+c^2)b]}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)},$$

$$\mathrm{Prj}D_{HF-x} = x_F - x_H = \frac{b(bc-a^2)}{a^2+b^2} + \frac{b(a^4+2a^2c^2+b^2c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} = \frac{bc[(a^2+b^2)c+(a^2+c^2)b]}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)},$$

所以 $\mathrm{Prj}D_{EG-x} = \mathrm{Prj}D_{HF-x}, d_{EG} = d_{HF}$.

注 1.3.3 三角形 ABC 为锐角三角形时, 即得1988 年第 22 届全苏联数学奥林匹克题的结论.

例 1.3.6(1967 年莫斯科数学奥林匹克竞赛题) 在三角形 ABC 中, 作各边的高线 AG, BE 和 CF, 若 $GE//AB, GF//AC$, 则 $EF//BC$.

证明 如图 1.3.9 所示. 设三角形 ABC 顶点的坐标为 $A(0,a), B(-b,0), C(c,0)$ $(a \neq 0, b, c > 0)$, 由例 1.3.5 求解得 E, F 的坐标

$$x_E = \frac{c(a^2-bc)}{a^2+b^2}, y_E = \frac{ac(b+c)}{a^2+b^2}; \quad x_F = \frac{b(bc-a^2)}{a^2+b^2}, y_F = \frac{ab(b+c)}{a^2+b^2},$$

于是

$$k_{AB}=\frac{a}{b},k_{GE}=\frac{y_E}{x_E}=\frac{a(b+c)}{a^2-bc};\quad k_{AB}=-\frac{a}{c},k_{GE}=\frac{y_F}{x_F}=-\frac{a(b+c)}{a^2-bc}.$$

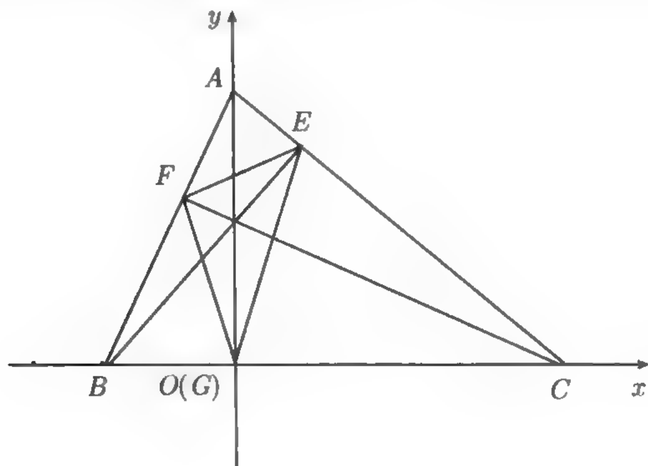


图 1.3.9

因为 $GE//AB,GF//AC$, 所以 $k_{AB}=k_{GE},k_{AB}=k_{GE}$. 于是

$$\begin{cases}\dfrac{a}{b}=\dfrac{a(b+c)}{a^2-bc},\\ -\dfrac{a}{c}=-\dfrac{a(b+c)}{a^2-bc}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=b^2-2bc,\\ a^2=c^2-2bc\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\pm\sqrt{3}b,\\ b=c,\end{cases}$$

所以三角形 ABC 是等边三角形, 故 $EF//BC$.

注 1.3.4　由例 1.3.6 证明可知, 该题条件可以得出 "三角形 ABC 是等边三角形" 这个更强的结论.

例 1.3.7(1985 年第 11 届全俄数学奥林匹克竞赛题)　直线 l 与以 AB 为直径的圆相交于 E,F 两点, E,F 与 A,B 均不重合, 由 A,B 分别作直线 l 的垂线 AG,BH, 证明 $d_{GF}=d_{EH}$.

证明　若直线 l 经过圆心, 结论显然成立. 若直线 l 不经过圆心, 则直线 AE,BF 不平行, 如图 1.3.10 所示. 设 AB 端点的坐标为 $A(-a,0),B(a,0)(a>0)$, 直线 l 的方程为 $y=kx+b\ (k\neq 0)$, 则以 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$. 将直线 l 的方程代入圆的方程得

$$x^2+(kx+b)^2=a^2,\ 即(1+k^2)x^2+2bkx+(b^2-a^2)=0.$$

于是求得直线与圆交点 E,F 的横坐标

$$x_E=-\frac{bk+\sqrt{(1+k^2)a^2-b^2}}{1+k^2},\quad x_F=\frac{-bk+\sqrt{(1+k^2)a^2-b^2}}{1+k^2}.$$

又 AG,BH 的直线方程分别为

$$y=-\frac{1}{k}x+\frac{k}{a},\quad y=-\frac{1}{k}x-\frac{k}{a},$$

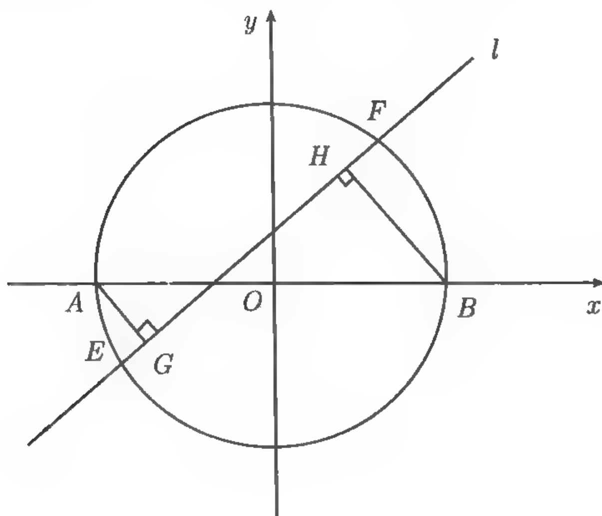


图 1.3.10

两方程分别与直线 l 的方程联立, 求得 G, H 的横坐标

$$x_G = \frac{k(k-ab)}{a(1+k^2)}, \quad x_H = -\frac{k(k+ab)}{a(1+k^2)}.$$

于是

$$D_{GF} = x_F - x_G = \frac{-bk+\sqrt{(1+k^2)a^2-b^2}}{1+k^2} - \frac{k(k-ab)}{a(1+k^2)} = \frac{a\sqrt{(1+k^2)a^2-b^2}-k^2}{a(1+k^2)},$$

$$D_{EH} = x_H - x_E = -\frac{k(k+ab)}{a(1+k^2)} + \frac{bk+\sqrt{(1+k^2)a^2-b^2}}{1+k^2} = \frac{a\sqrt{(1+k^2)a^2-b^2}-k^2}{a(1+k^2)},$$

所以 $D_{GF} = D_{EH}, d_{GF} = d_{EH}$.

1.3.2 不平行线段有向距离在坐标轴上的投影及其应用

定理 1.3.5 设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2); Q_1(x_1', y_1'), Q_2(x_2', y_2')$ 是两不平行直线 l_1, l_2 上的两点, 且 x 轴 (y 轴) 是平行于 l_1, l_2 夹角平分线的直线, 则

$$D_{P_1P_2} = kD_{Q_1Q_2} \Leftrightarrow x_2 - x_1 = \pm k(x_2' - x_1')(D_{P_1P_2} = kD_{Q_1Q_2} \Leftrightarrow y_2 - y_1 = \pm k(y_2' - y_1')).$$

证明 设 l_1, l_2 之间的夹角为 2α, 于是 $D_{P_1P_2}\cos\alpha = \pm(x_2 - x_1), D_{Q_1Q_2}\cos\alpha = \pm(x_2' - x_1')$, 注意到 $\cos\alpha \neq \pi/2$, 即得定理 1.3.5 结论的前半部分.

类似地, 可以证明定理 1.3.5 结论的后半部分.

例 1.3.8 在三角形 ABC 中, $AB = AC, CE(CE')$ 是角 (外角) 平分线, G 是其外心, 过 G 作 $CE(CE')$ 的垂线交直线 AC 于 $H(H')$, 再过 $H(H')$ 作 $CE(CE')$ 的平行线交直线 AB 于 $F(F')$, 求证: $d_{EF} = d_{HA}(d_{E'F'} = d_{H'A})$.

证明 如图 1.3.11 所示. 设三角形 ABC 顶点的坐标为 $A(0, a), B(-b, 0), C(b, 0)$

$(b>0)$, 于是三角形外心的坐标为 $G\left(0,\dfrac{a^2-b^2}{2a}\right)$.

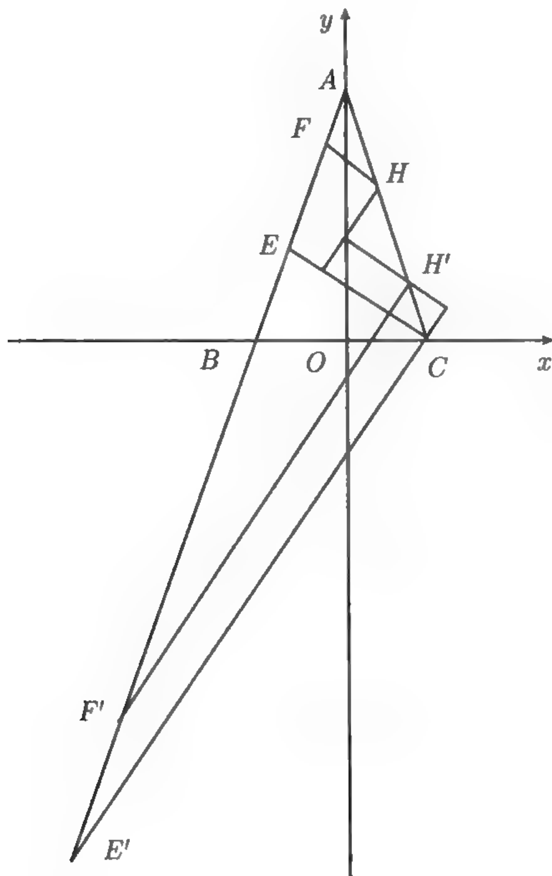


图 1.3.11

AC 的方程为 $x/b+y/a=1$, 即

$$ax+by=ab, \tag{1.3.8}$$

BC 的方程为 $y=0$, 于是角平分线 $CE(CE')$ 的方程为

$$ax+(b\pm\sqrt{a^2+b^2})y=ab. \tag{1.3.9}$$

AB 的方程为 $-x/b+y/a=1$, 即

$$ax-by=-ab, \tag{1.3.10}$$

(1.3.9) 和 (1.3.10) 两式联立, 求得 $E(E')$ 的横坐标

$$x_{E(E')}=\begin{vmatrix} ab & b\pm\sqrt{a^2+b^2} \\ -ab & -b \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a & b\pm\sqrt{a^2+b^2} \\ a & -b \end{vmatrix}=\frac{\pm b\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\pm 2b}.$$

$GH(GH')$ 的方程为

$$2(b\pm\sqrt{a^2+b^2})x-2ay=b^2-a^2, \tag{1.3.11}$$

(1.3.8) 和 (1.3.11) 两式联立, 求得 $H(H')$ 的坐标

$$\begin{cases} x = \begin{vmatrix} ab & b \\ b^2-a^2 & -2a \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & b \\ 2(b \pm \sqrt{a^2+b^2}) & -2a \end{vmatrix} = \dfrac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2(\sqrt{a^2+b^2} \pm b)}, \\ y = \begin{vmatrix} a & ab \\ 2(b \pm \sqrt{a^2+b^2}) & b^2-a^2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & b \\ 2(b \pm \sqrt{a^2+b^2}) & -2a \end{vmatrix} = \dfrac{a(\sqrt{a^2+b^2} \pm 2b)}{2(\sqrt{a^2+b^2} \pm b)}, \end{cases}$$

于是求得 $HF(H'F')$ 的方程

$$ax + (b \pm \sqrt{a^2+b^2})y = \frac{a(\pm a^2 \pm 3b^2 + 4b\sqrt{a^2+b^2})}{2(\sqrt{a^2+b^2} \pm b)}, \tag{1.3.12}$$

(1.3.10) 和 (1.3.12) 两式联立, 求得 $F(F')$ 的横坐标

$$\begin{aligned} x_{F(F')} =& \begin{vmatrix} -ab & -b \\ \dfrac{a(\pm a^2 \pm 3b^2 + 4b\sqrt{a^2+b^2})}{2(\sqrt{a^2+b^2} \pm b)} & b \pm \sqrt{a^2+b^2} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & -b \\ a & b \pm \sqrt{a^2+b^2} \end{vmatrix} \\ =& \frac{-(a^2+b^2)b}{2(\sqrt{a^2+b^2} \pm 2b)(\sqrt{a^2+b^2} \pm b)}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathrm{Prj}D_{EF(E'F')-x} =& x_{F(F')} - x_{E(E')} \\ =& \frac{-(a^2+b^2)b}{2(\sqrt{a^2+b^2} \pm 2b)(\sqrt{a^2+b^2} \pm b)} \mp \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2b \pm \sqrt{a^2+b^2}} \\ =& \pm \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2(\sqrt{a^2+b^2} \pm b)}, \\ \mathrm{Prj}D_{FA(F'A)-x} =& x_A - x_{F(F')} = \pm \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2(\sqrt{a^2+b^2} \pm b)}, \end{aligned}$$

所以

$$d_{EF} = d_{HA}(d_{E'F'} = d_{H'A}).$$

注 1.3.5 例 1.3.8 中内角平分线的情形即为 1996 年第 22 届全俄数学奥林匹克竞赛题.

例 1.3.9 证明三角形 ABC 的两腰 AB, AC 相等的充分必要条件是 $\angle B, \angle C$ 的平分线相等 ($\angle B, \angle C$ 外角的平分线相等).

证明 如图 1.3.12 所示. 设三角形 ABC 顶点的坐标为 $A(0,a), B(-b,0), C(b,0)$ $(b>0)$, 于是 AC 和 AB 的方程分别为

$$ax + cy = ac, \tag{1.3.13}$$

$$ax - by = -ab. \tag{1.3.14}$$

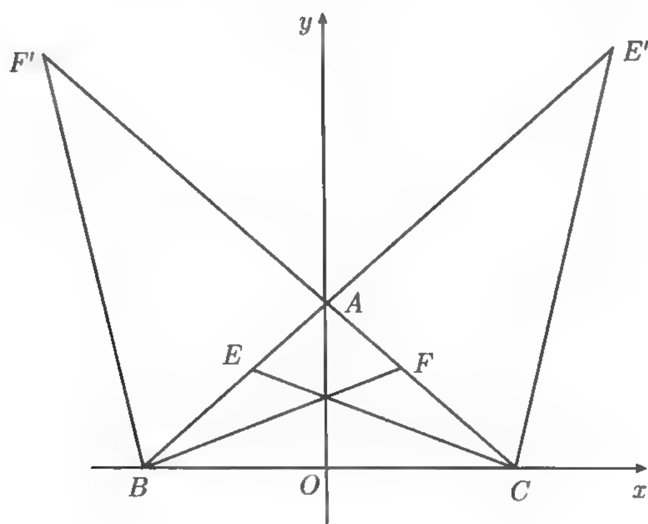


图 1.3.12

由 BC 的方程为 $y=0$, 可求得 $\angle C(\angle C$ 外角) 的平分线 $CE(CE')$ 的方程为

$$ax+(c\pm\sqrt{a^2+c^2})y=ac, \tag{1.3.15}$$

$\angle B(\angle B$ 外角) 的平分线 $CF(CF')$ 的方程为

$$ax-(b\pm\sqrt{a^2+b^2})y=-ab. \tag{1.3.16}$$

(1.3.14) 和 (1.3.15) 两式联立, 求得 $E(E')$ 的纵坐标

$$y_{E(E')}=\begin{vmatrix} a & -ab \\ a & ac \end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} a & -b \\ a & c\pm\sqrt{a^2+c^2} \end{vmatrix}=\frac{a(b+c)}{b+c\pm\sqrt{a^2+c^2}},$$

(1.3.13) 和 (1.3.16) 两式联立, 求得 $F(F')$ 的纵坐标

$$x_{F(F')}=\begin{vmatrix} a & ac \\ a & -ab \end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} a & c \\ a & -(b\pm\sqrt{a^2+b^2}) \end{vmatrix}=\frac{a(b+c)}{b+c\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

于是

$$\begin{aligned} d_{AB}=d_{AC} &\Leftrightarrow b=c\Leftrightarrow \pm\sqrt{a^2+c^2}=\pm\sqrt{a^2+b^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{a(b+c)}{b+c\pm\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{a(b+c)}{b+c\pm\sqrt{a^2+b^2}} \\ &\Leftrightarrow y_{F(F')}=y_{E(E')}\Leftrightarrow \mathrm{Prj}D_{BF(F')-y}=\mathrm{Prj}D_{CE(E')-y}\Leftrightarrow d_{CE(E')}=d_{BF(F')}. \end{aligned}$$

注 1.3.6　例 1.3.9 中内角平分线的情形即为1957 年中国天津数学竞赛题.

1.3.3　两点间的距离公式及其在几何证题中的应用

定理 1.3.6　设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 是 xOy 平面上任意两点, 则线段 P_1P_2 的 (有向) 距离的平方等于其有向距离在 x 轴、y 轴上投影的平方和, 即

$$d_{P_1P_2}^2 = D_{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

证明 设线段 P_1P_2 与 x 轴的夹角为 θ, 则 $D_{P_1P_2}\cos\theta = x_2 - x_1, D_{P_1P_2}\sin\theta = y_2 - y_1$, 于是

$$d_{P_1P_2}^2 = D_{P_1P_2}^2 = D_{P_1P_2}^2\cos^2\theta + D_{P_1P_2}^2\sin^2\theta = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

定理 1.3.7 设 P 为 $\odot C$ 所在平面上一点, 过 P 引任一直线 l 与圆相交于 A, B 两点, 证明: $d_{PA}d_{PB}$ 恒为定值.

证明 如图 1.3.13 所示. 不妨设 P 为坐标原点, 圆心的坐标为 $C(a,0)$, 圆的半径为 R. 于是 $\odot C$ 的方程为 $(x-a)^2 + y^2 = R^2$. 直线的方程设为 $l: y = kx$, 代入圆的方程得

$$(1+k^2)x^2 - 2ax + a^2 - R^2 = 0,$$

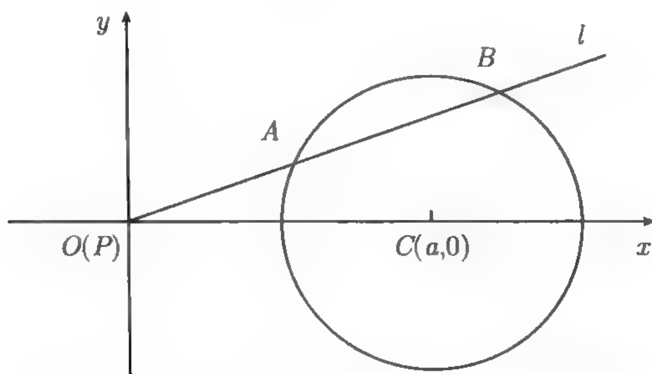


图 1.3.13 过一定点且与圆相交的任意直线

解得

$$x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(1+k^2)(a^2 - R^2)}}{2(1+k^2)} = \frac{a \pm \sqrt{R^2 + k^2(R^2 - a^2)}}{2(1+k^2)},$$

于是

$$d_{PA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 + k^2x_1^2} = \frac{|a + \sqrt{R^2 + k^2(R^2 - a^2)}|}{2\sqrt{1+k^2}},$$

$$d_{PB} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{x_2^2 + k^2x_2^2} = \frac{|a - \sqrt{R^2 + k^2(R^2 - a^2)}|}{2\sqrt{1+k^2}},$$

所以

$$\begin{aligned} d_{PA}d_{PB} =& \frac{|a + \sqrt{R^2 + k^2(R^2 - a^2)}||a - \sqrt{R^2 + k^2(R^2 - a^2)}|}{4(1+k^2)} \\ =& \frac{1}{4}|a^2 - R^2|(\text{为定值}). \end{aligned}$$

定理 1.3.8(Ptolemy 定理) 设 $P_1P_2P_3P_4$ 是圆内接四边形, 则

$$d_{P_1P_2}d_{P_3P_4}+d_{P_2P_3}d_{P_4P_1}=d_{P_1P_3}d_{P_2P_4}.$$

证明　如图 1.3.14 所示. 不妨设圆心为坐标原点, $P_1P_2P_3P_4$ 顶点的坐标为 $P_i(R\cos\theta_i, R\sin\theta_i)(i=1,2,3,4)$ 且 $0\leqslant\theta_1<\theta_2<\theta_3<\theta_4<2\pi$. 于是

$$\begin{aligned}d_{P_1P_2}=&R\sqrt{(\cos\theta_2-\cos\theta_1)^2+(\sin\theta_2-\sin\theta_1)^2}\\=&R\sqrt{2[1-\cos(\theta_2-\theta_1)]}=2R\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2},\end{aligned}$$

同理可得

$$d_{P_2P_3}=2R\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2},\quad d_{P_3P_4}=2R\sin\frac{\theta_4-\theta_3}{2},\quad d_{P_4P_1}=2R\sin\frac{\theta_4-\theta_1}{2};$$

$$d_{P_1P_3}=2R\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2},\quad d_{P_2P_4}=2R\sin\frac{\theta_4-\theta_2}{2}.$$

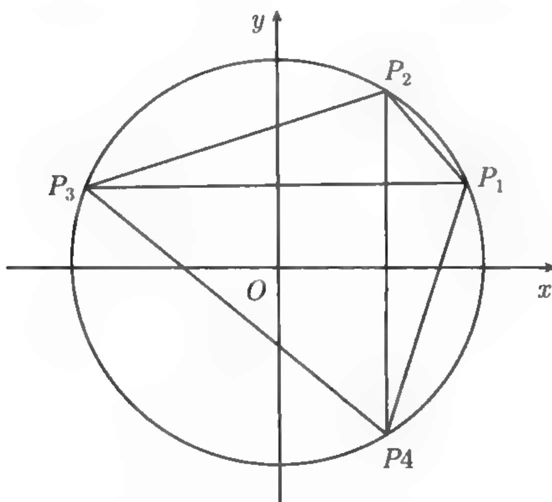


图 1.3.14　Ptolemy 定理

于是

$$\begin{aligned}&d_{P_1P_2}d_{P_3P_4}+d_{P_2P_3}d_{P_4P_1}\\=&4R^2\left(\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_3}{2}+\sin\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_1}{2}\right)\\=&-2R^2\left(\cos\frac{\theta_2+\theta_4-\theta_1-\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_2+\theta_3-\theta_1-\theta_4}{2}\right.\\&\left.-\cos\frac{\theta_1+\theta_3-\theta_2-\theta_4}{2}+\cos\frac{\theta_3+\theta_4-\theta_1-\theta_2}{2}\right)\\=&4R^2\sin\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_2}{2}=d_{P_1P_3}d_{P_2P_4}.\end{aligned}$$

定理 1.3.9　正方形 $ABCD$ 中, E,F 分别为直线 CD,DA 的分点, 且 $CE/ED=DF/FA=\lambda$, 连 BE 与 CF 交于 P, 求证: $d_{PA}=d_{AB}$ 的充分必要条件是 $\lambda=1$.

证明 如图 1.3.15 所示. 设正方形顶点的坐标为 $A(0,0), B(a,0), C(a,a), D(0,a)$, 于是两分点的坐标分别为 $E\left(\frac{a}{1+\lambda}, a\right), F\left(0, \frac{a}{1+\lambda}\right)$. 从而分别求得 BE, CF 的方程

$$(1+\lambda)x + \lambda y = (1+\lambda)a, \tag{1.3.17}$$

$$\lambda x - (1+\lambda)y = -a. \tag{1.3.18}$$

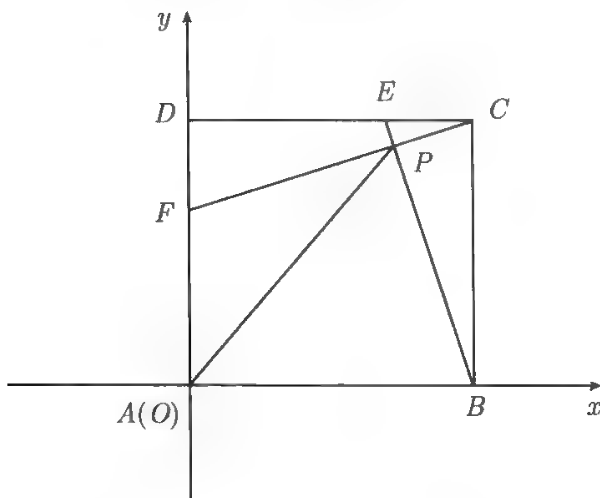


图 1.3.15

(1.3.13) 和 (1.3.14) 两式联立, 求得

$$x_P = \begin{vmatrix} (1+\lambda)a & \lambda \\ -a & -1-\lambda \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1+\lambda & \lambda \\ \lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2+\lambda+1}{2\lambda^2+2\lambda+1}a,$$

$$y_P = \begin{vmatrix} 1+\lambda & (1+\lambda)a \\ \lambda & -a \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1+\lambda & \lambda \\ \lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2+2\lambda+1}{2\lambda^2+2\lambda+1}a.$$

由 $d_{PA} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = d_{AB}$ 并注意到 $\lambda \neq -1$, 得

$$(\lambda^2+\lambda+1)^2 + (\lambda^2+2\lambda+1)^2 = (2\lambda^2+2\lambda+1)^2 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)(2\lambda^2+\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

注 1.3.7 定理 1.3.9 的充分性即为1981 年北京市数学竞赛题的结论.

1.4 直线与二次曲线交点的定值定理及其应用

本节主要讨论直线与二次曲线交点有向距离有关的问题. 首先给出平面上四点坐标排列的一、二级函数的概念, 得出这两类函数的两个性质定理; 其次给出直线与二次曲线交点关于一级函数有向距离的定值定理, 并据此推出任意直线与二次曲线交点的一个定理和一些已知的结论; 再次给出直线与二次曲线交点关于二级函数有向距离的定值定理, 从而得出任意直线与二次曲线交点的一个定理和一些已知的结论.

1.4.1　平面上四点坐标对排列的一、二级函数的概念与性质

定义 1.4.1　设 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4)$ 是平面上不同的四点, $a_{ij}=y_i-y_j, b_{ij}=x_i-x_j, c_{ij}=x_iy_j-x_jx_i(i,j=1,2,3,4,i\neq j), \tau=(i_1i_2i_3i_4)$ 是 1, 2, 3, 4 的一个排列. 若

$$c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}\neq 0\quad (a_{i_2i_4}a_{i_3i_1}c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}-a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}c_{i_1i_3}c_{i_4i_2}\neq 0)$$

则称

$$f(\tau)=-\left(\frac{a_{i_1i_2}}{c_{i_1i_2}}+\frac{a_{i_3i_4}}{c_{i_3i_4}}\right)$$

$$\left(g(\tau)=\frac{a_{i_2i_4}a_{i_3i_1}(a_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+a_{i_3i_4}c_{i_1i_2})+a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}(a_{i_1i_3}c_{i_4i_2}+a_{i_4i_2}c_{i_1i_3})}{a_{i_2i_4}a_{i_3i_1}c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}-a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}c_{i_1i_3}c_{i_4i_2}}\right)$$

分别为四点 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4)$ 的坐标对排列 $\tau=(i_1i_2i_3i_4)$ 的一级函数 (二级函数).

定义 1.4.2　设 τ_1,τ_2 是 $1,2,3,4$ 的两个排列. 若 $f(\tau_1)=f(\tau_2)$, 则称 τ_1,τ_2 是 $1,2,3,4$ 对一级函数 $f(\tau)$ 本质上相同的排列; 若 $g(\tau_1)=g(\tau_2)$, 则称 τ_1,τ_2 是 $1,2,3,4$ 对二级函数 $g(\tau)$ 本质上相同的排列.

对 $1,2,3,4$ 的所有排列进行分类, 记

$$\Sigma_1=\{(1234),(2143),(3412),(4321)\},\quad \Sigma_2=\{(1324),(3142),(2413),(4231)\},$$

$$\Sigma_3=\{(1243),(2134),(4312),(3421)\},\quad \Sigma_4=\{(1423),(4132),(2314),(3241)\},$$

$$\Sigma_5=\{(3124),(1342),(2431),(4213)\},\quad \Sigma_6=\{(1432),(2341),(3214),(4123)\}.$$

定理 1.4.1　$\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_6$ 中的任何两个排列是 $1,2,3,4$ 对一级函数本质上相同的排列, 即对任意的 $\tau_1,\tau_2\in\Sigma_i(i=1,2,\cdots,6)$, 有 $f(\tau_1)=f(\tau_2)$.

证明　注意到 $a_{ij}=-a_{ji}, c_{ij}=-c_{ji}$, 显然有 $f(\tau_1)=f(\tau_2)$.

定理 1.4.2　Σ_1 和 Σ_2, Σ_3 和 Σ_4, Σ_5 和 Σ_6 中的任何两个排列是 $1,2,3,4$ 对二级函数本质上相同的排列, 即对任意的 $\tau_1\in\Sigma_1,\tau_2\in\Sigma_2$ 或 $\tau_1\in\Sigma_3,\tau_2\in\Sigma_4$ 或 $\tau_1\in\Sigma_5,\tau_2\in\Sigma_6$, 有 $g(\tau_1)=g(\tau_2)$.

证明　仅以 $\tau_1=(1234)\in\Sigma_1,\tau_2=(1324)\in\Sigma_2$ 给出, 其余类似地可以证明. 因为

$$\begin{aligned}g(\tau_2)=&\frac{a_{13}a_{24}(a_{12}c_{34}+a_{34}c_{12})-a_{12}a_{34}(a_{13}c_{24}+a_{24}c_{13})}{a_{12}a_{34}c_{13}c_{24}-a_{13}a_{24}c_{12}c_{34}}\\=&\frac{a_{12}a_{34}(a_{13}c_{24}+a_{24}c_{13})-a_{13}a_{24}(a_{12}c_{34}+a_{34}c_{12})}{a_{13}a_{24}c_{12}c_{34}-a_{12}a_{34}c_{13}c_{24}}\quad =g(\tau_1).\end{aligned}$$

1.4.2 直线与二次曲线交点的定值定理

定义 1.4.3 设 P_1, P_2, P_3, P_4 是平面上不同的四点, $l_{ij}(x,y) = a_{ij}x+b_{ij}y+c_{ij} = 0$ 表示过其中两点 P_i, P_j 的直线, $a_{ij} = y_i - y_j, b_{ij} = x_i - x_j, c_{ij} = x_iy_j - x_jx_i(i, j = 1,2,3,4, i \neq j), \tau = (i_1i_2i_3i_4)$ 是 1, 2, 3, 4 的一个排列, 那么过 P_1, P_2, P_3, P_4 四点的二次曲线簇定义为

$$F_\tau(x,y) = (1-\lambda)l_{i_1i_2}l_{i_3i_4} + \lambda l_{l_2i_3}l_{i_4i_1} = 0, \tag{1.4.1}$$

其中 λ 为参数 (图 1.4.1).

特别, 当 $\lambda = 0, 1$ 时, 相应的二次曲线退化为两直线对 $l_{l_2i_3}, l_{i_4i_1}$ 和 $l_{i_1i_2}, l_{i_3i_4}$.

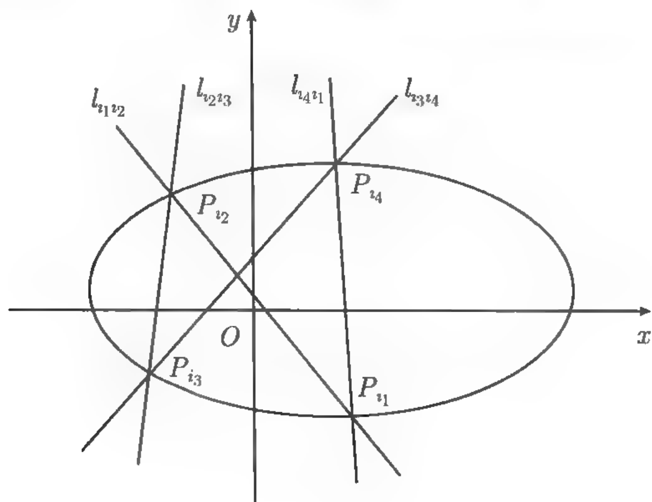


图 1.4.1

为区别起见, 我们把 1, 2, 3, 4 的一个排列 $\tau_k = (j_1j_2j_3j_4)$ 所确定的过 P_1, P_2, P_3, P_4 四点的二次曲线簇表示为

$$F_{\tau_k}(x,y) = (1-\lambda_k)l_{j_1j_2}l_{j_3j_4} + \lambda_k l_{j_2j_3}l_{j_4j_1} = 0, \tag{1.4.2}$$

其中 λ_k 为对应于排列 τ_k 的参数.

定理 1.4.3 设 $\tau = (i_1i_2i_3i_4)$ 是 1, 2, 3, 4 的一个排列, 两直线 $l_{i_1i_3}$ 与 $l_{i_2i_4}$ 相交于坐标原点, x 轴与过不同四点 P_1, P_2, P_3, P_4 的二次曲线簇 (1.4.1) 的交点为 $U(u), V(v)$. 若 $uv \neq 0$, 则

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = f(\tau)(\text{为与}\lambda\text{无关的常数}). \tag{1.4.3}$$

证明 如图 1.4.2 所示. 令

$$F_\tau(x,0) = (1-\lambda)l_{i_1i_2}(x,0)l_{i_3i_4}(x,0) + \lambda l_{i_2i_3}(x,0)l_{i_4i_1}(x,0) = ax^2 + bx + c,$$

于是由题设有

$$\begin{aligned}a=&(1-\lambda)a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}+\lambda a_{i_2i_3}a_{i_4i_1}=a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}+\lambda(a_{i_2i_3}a_{i_4i_1}-a_{i_1i_2}a_{i_3i_4})\\=&a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}+\lambda a_{i_2i_4}a_{i_3i_1}\neq 0,\\b=&(1-\lambda)(a_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+a_{i_3i_4}c_{i_1i_2})+\lambda(a_{i_2i_3}c_{i_4i_1}+a_{i_4i_1}c_{i_2i_3})\\=&a_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+a_{i_3i_4}c_{i_1i_2}+\lambda(a_{i_2i_3}c_{i_4i_1}+a_{41}c_{i_4i_1}-a_{i_4i_1}c_{i_2i_3}-a_{i_3i_4}c_{i_1i_2})\\=&a_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+a_{i_3i_4}c_{i_1i_2},\\c=&(1-\lambda)c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+\lambda c_{i_2i_3}c_{i_4i_1}=c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+\lambda(c_{i_2i_3}c_{i_4i_1}-c_{i_1i_2}c_{i_3i_4})=c_{i_1i_2}c_{i_3i_4},\end{aligned}$$

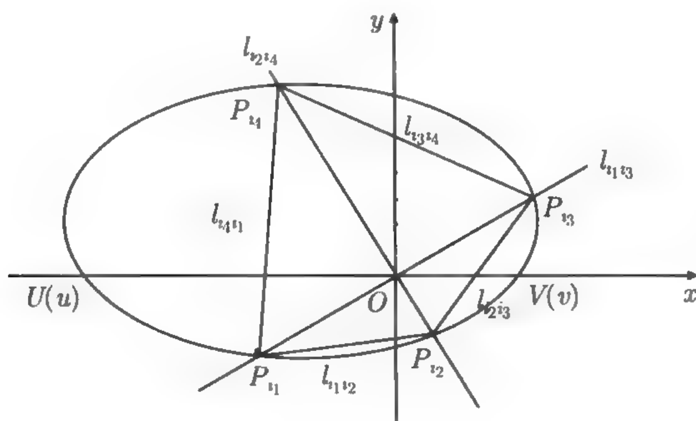


图 1.4.2

所以

$$F(x,0)=(a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}+\lambda a_{i_2i_4}a_{i_3i_1})x^2+(a_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+a_{i_3i_4}c_{i_1i_2})x+c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}=0.$$

由根与系数的关系, 得

$$\begin{cases}u+v=-\dfrac{a_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+a_{i_3i_4}c_{i_1i_2}}{a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}+\lambda a_{i_2i_4}a_{i_3i_1}},\\uv=\dfrac{c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}}{a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}+\lambda a_{i_2i_4}a_{i_3i_1}},\end{cases}$$

于是式 (1.4.3) 成立.

推论 1.4.1　设 $\tau=(i_1i_2i_3i_4)$ 是 $1,2,3,4$ 的一个排列, 两直线 $l_{i_1i_3}$ 与 $l_{i_2i_4}$ 相交于坐标原点, 另两直线对 $l_{i_1i_2}$ 和 $l_{i_3i_4}$ 或 $l_{i_2i_3}$ 和 $l_{i_4i_1}$ 与 x 轴的交点为 $U(u),V(v)$, 则

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=f(\tau)(\text{为与}\lambda\text{无关的常数}).$$

证明　在定理 1.4.3 中分别取 $\lambda=0$(或 $\lambda=1$) 即得.

定理 1.4.4　设 $\tau_1=(i_1i_2i_3i_4),\tau_2$ 是 $1,2,3,4$ 对二级函数 $g(\tau)$ 本质上两个相同的排列, 两直线 $l_{i_1i_3}$ 与 $l_{i_2i_4}$ 相交于坐标原点, x 轴与过平面上四点 P_1,P_2,P_3,P_4

的型如式 (1.4.2) 的任意两条二次曲线 $F_{\tau_k}(x,y)=0(k=1,2)$ 的交点分别为 $U_k(u_k)$, $V_k(v_k)(k=1,2)$. 若 $a_{i_2i_4}a_{i_3i_1}c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}-a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}c_{i_1i_3}c_{i_4i_2}\neq 0$, 则

$$\frac{(u_1+v_1)-(u_2+v_2)}{u_1v_1-u_2v_2}=g(\tau)(\text{为与}\lambda_1,\lambda_2\text{无关的定值}). \tag{1.4.4}$$

证明 如图 1.4.3 所示. 令 $F_1(x,0)=(1-\lambda_1)l_{i_1i_2}(x,0)l_{i_3i_4}(x,0)+\lambda_1 l_{i_2i_3}(x,0)$ $l_{i_4i_1}(x,0)=ax^2+bx+c$,

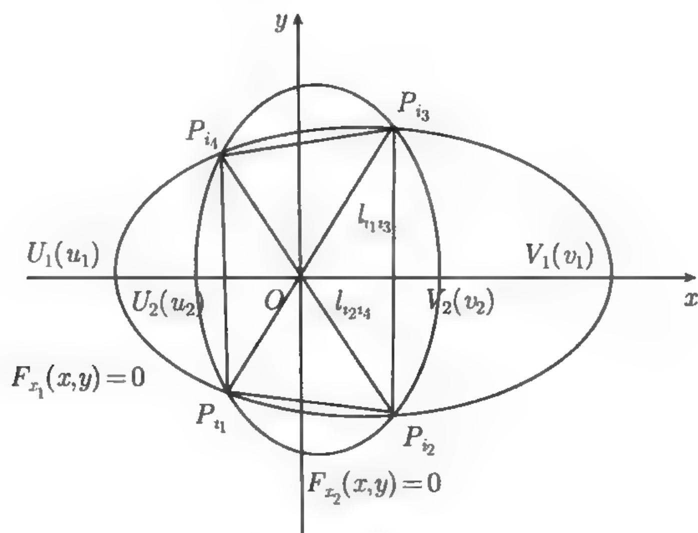


图 1.4.3

于是有

$$\begin{aligned}
a=&(1-\lambda_1)a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}+\lambda_1 a_{i_2i_3}a_{i_4i_1}=a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}+\lambda_1(a_{i_2i_3}a_{i_4i_1}-a_{i_1i_2}a_{i_3i_4})\\
=&a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}-\lambda_1 a_{i_2i_4}a_{i_1i_3}\neq 0,\\
b=&(1-\lambda_1)(a_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+a_{i_3i_4}c_{i_1i_2})+\lambda_1(a_{i_2i_3}c_{i_4i_1}+a_{i_4i_1}c_{i_2i_3})\\
=&a_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+a_{i_3i_4}c_{i_1i_2}+\lambda_1(a_{i_1i_3}c_{i_4i_2}-a_{i_2i_4}c_{i_1i_3}),\\
c=&(1-\lambda_1)c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+\lambda_1 c_{i_2i_3}c_{i_4i_1}=c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+\lambda_1(c_{i_2i_3}c_{i_4i_1}-c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}).
\end{aligned}$$

根据根与系数之间的关系, 有

$$\begin{aligned}
u_1+v_1=&-\frac{a_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+a_{i_3i_4}c_{i_1i_2}+\lambda_1(a_{i_1i_3}c_{i_4i_2}-a_{i_2i_4}c_{i_1i_3})}{a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}-\lambda_1 a_{i_2i_4}a_{i_1i_3}},\\
u_1v_1=&\frac{c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+\lambda_1(c_{i_2i_3}c_{i_4i_1}-c_{i_1i_2}c_{i_3i_4})}{a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}-\lambda_1 a_{i_2i_4}a_{i_1i_3}},
\end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}
u_2+v_2=&-\frac{a_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+a_{i_3i_4}c_{i_1i_2}+\lambda_2(a_{i_1i_3}c_{i_4i_2}-a_{i_2i_4}c_{i_1i_3})}{a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}-\lambda_2 a_{i_2i_4}a_{i_1i_3}},\\
u_2v_2=&\frac{c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+\lambda_2(c_{i_2i_3}c_{i_4i_1}-c_{i_1i_2}c_{i_3i_4})}{a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}-\lambda_2 a_{i_2i_4}a_{i_1i_3}}.
\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
&(u_1+v_1)-(u_2+v_2)\\
=&\frac{a_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+a_{i_3i_4}c_{i_1i_2}+\lambda_2(a_{i_1i_3}c_{i_4i_2}-a_{i_2i_4}c_{i_1i_3})}{a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}-\lambda_2a_{i_2i_4}a_{i_1i_3}}\\
&-\frac{a_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+a_{i_3i_4}c_{i_1i_2}+\lambda_1(a_{i_1i_3}c_{i_4i_2}-a_{i_2i_4}c_{i_1i_3})}{a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}-\lambda_1a_{i_2i_4}a_{i_1i_3}}\\
=&\frac{(\lambda_2-\lambda_1)[a_{i_2i_4}a_{i_3i_1}(a_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+a_{i_3i_4}c_{i_1i_2})+a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}(a_{i_1i_3}c_{i_4i_2}+a_{i_4i_2}c_{i_1i_3})]}{(a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}-\lambda_1a_{i_2i_4}a_{i_1i_3})(a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}-\lambda_2a_{i_2i_4}a_{i_1i_3})},
\end{aligned}
\tag{1.4.5}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1v_1-u_2v_2=&\frac{c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+\lambda_1(c_{i_2i_3}c_{i_4i_1}-c_{i_1i_2}c_{i_3i_4})}{a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}-\lambda_1a_{i_2i_4}a_{i_1i_3}}\\
&-\frac{c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}+\lambda_2(c_{i_2i_3}c_{i_4i_1}-c_{i_1i_2}c_{i_3i_4})}{a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}-\lambda_2a_{i_2i_4}a_{i_1i_3}}\\
=&\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(a_{i_2i_4}a_{i_3i_1}c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}-a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}c_{i_1i_3}c_{i_4i_2})}{(a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}-\lambda_1a_{i_2i_4}a_{i_1i_3})(a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}-\lambda_2a_{i_2i_4}a_{i_1i_3})},
\end{aligned}
\tag{1.4.6}
$$

式 (1.4.5)÷ 式 (1.4.6), 即得式 (1.4.4).

推论 1.4.2　设 $\tau=(i_1i_2i_3i_4)$ 是 1,2,3,4 的一个排列, 直线 $l_{i_1i_2}$ 和 $l_{i_3i_4}$; $l_{i_2i_3}$ 和 $l_{i_4i_1}$ 与 x 轴的交点分别为 $U_k(u_k),V_k(v_k)(k=3,4)$. 若 $a_{i_2i_4}a_{i_3i_1}c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}-a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}c_{i_1i_3}c_{i_4i_2}\neq 0$, 则

$$\frac{(u_3+v_3)-(u_4+v_4)}{u_3v_3-u_4v_4}=g(\tau)(\text{为与}\lambda_1,\lambda_2\text{无关的定值}).$$

证明　在定理 1.4.4 中分别取 $\tau_1=\tau_2=\tau$ 及 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda=0,1$ 即得.

推论 1.4.3　设 $\tau_1=(i_1i_2i_3i_4),\tau_2$ 是 1,2,3,4 对二级函数 $g(\tau)$ 两个本质上相同的排列, x 轴与过平面上四点 P_1,P_2,P_3,P_4 的型如式 (1.4.2) 的任意两条二次曲线 $F_{\tau_k}(x,y)=0(k=1,2)$ 及直线 $l_{i_1i_2}$ 和 $l_{i_3i_4}$, $l_{i_2i_3}$ 和 $l_{i_4i_1}$ 的交点分别为 $U_k(u_k),V_k(v_k)(k=1,2,3,4)$. 若 $a_{i_2i_4}a_{i_3i_1}c_{i_1i_2}c_{i_3i_4}-a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}c_{i_1i_3}c_{i_4i_2}\neq 0$, 则

$$\frac{(u_i+v_i)-(u_j+v_j)}{u_iv_i-u_jv_j}=g(\tau)(i,j=1,2,3,4;i\neq j)(\text{为与}\lambda_1,\lambda_2\text{无关的定值}).$$

证明　由定理 1.4.4 及推论 1.4.2 即得.

1.4.3　直线与二次曲线交点定值定理的应用

注意到平面上点 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4)$ 的排列次序 $\tau=(i_1i_2i_3i_4)$ 以及过其中任意两点 P_i,P_j 的直线 $l_{ij}(x,y)=a_{ij}x+b_{ij}y+c_{ij}=0$ 的形式与坐标系的选择无关, 所以由它们所确定的二次曲线簇 1.4.1 和 1.4.2 的形式也与坐标系的选择无关. 据此容易证明如下的定理.

定理 1.4.5 设 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 是平面上不同四点. $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 是 $1,2,3,4$ 对一级函数 $f(\tau)$ 本质上 n 个相同的排列 (包括相等, 以下类同), l_{ij} 是过 Q_i, Q_j 两点的直线, 以两直线 $l_{i_1i_3}$ 与 $l_{i_2i_4}$ 的交点为坐标原点的直线 l 与过 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 的形如式 (1.4.2) 的任意 n 条二次曲线 $F_{\tau_k}(x,y)=0$ 的交点分别为 $U_k(u_k), V_k(v_k)(k=1,2,\cdots,n)$. 若对任意的 $k=1,2,\cdots,n$, 有 $u_kv_k\neq 0$, 则

$$\frac{1}{u_{k_1}}+\frac{1}{v_{k_1}}=\frac{1}{u_{k_2}}+\frac{1}{v_{k_2}}, \tag{1.4.7}$$

其中 $k_1, k_2=1,2,\cdots,n; k_1\neq k_2$.

证明 如图 1.4.4 所示. 以 l 为 x 轴、l 的原点为直角坐标原点建立坐标系. 设 Q_i 的坐标为 $Q_i(x_i, y_i)(i=1,2,3,4)$, 于是有定理 1.4.3 有

$$\frac{1}{u_k}+\frac{1}{v_k}=f(\tau_k)(k=1,2,\cdots,n),$$

因为 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 是 $1,2,3,4$ 对一级函数 $f(\tau)$ 本质上 n 个相同的排列, 所以 $f(\tau_1)=f(\tau_2)=\cdots=f(\tau_n)$, 因此式 (1.4.7) 成立.

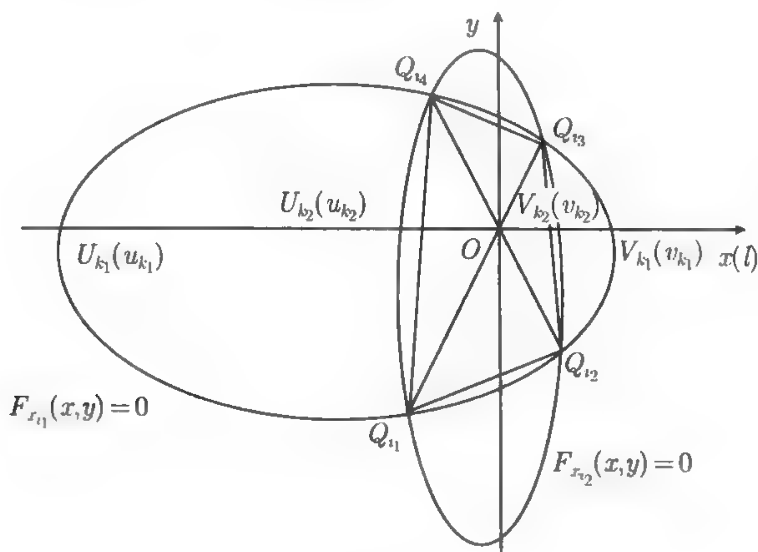


图 1.4.4

推论 1.4.4 设 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 是平面上不同的四点, $\tau_1=(i_1i_2i_3i_4)$ 是 $1,2,3,4$ 的一个排列, l_{ij} 是过 Q_i, Q_j 的直线. 以两直线 $l_{i_1i_3}$ 与 $l_{i_2i_4}$ 交点为坐标原点的直线 l 与另两对直线 $l_{i_1i_2}$ 和 $l_{i_3i_4}$, $l_{i_2i_3}$ 和 $l_{i_4i_1}$ 的交点分别为 $U_k(u_k), V_k(v_k)(k=n+1,n+2)$. 若对任意的 k 有 $u_kv_k\neq 0$, 则

$$\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{v_{n+1}}=\frac{1}{u_{n+2}}+\frac{1}{v_{n+2}}.$$

证明 如图 1.4.5 所示. 令 $\tau_1=\tau_2=\cdots=\tau_n=\tau$ 及 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0,1$, 于是两对直线 $l_{i_1i_2}$ 和 $l_{i_3i_4}$, $l_{i_2i_3}$ 和 $l_{i_4i_1}$ 均为二次曲线簇 $F_{\tau_k}(x,y)=0(k=$

$1, 2, \cdots, n)$ 的退化二次曲线, 故由定理 1.4.4 有

$$\frac{1}{u_k} + \frac{1}{v_k} = f(\tau)(k = n+1, n+2),$$

因此, 推论 1.4.4 结论成立.

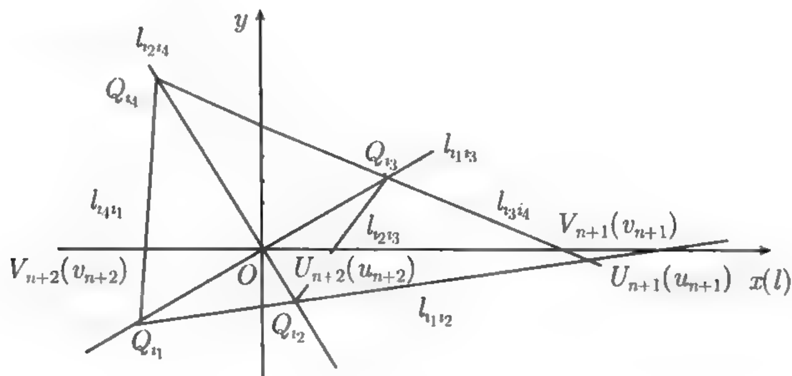


图 1.4.5

由定理 1.4.5 及推论 1.4.4, 即得下述定理.

定理 1.4.6　设 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 是平面上不同的四点, $\tau_1 = (i_1i_2i_3i_4), \tau_2, \cdots, \tau_n$ 是 $1, 2, 3, 4$ 对一级函数 $f(\tau)$ 本质上 n 个相同的排列, l_{ij} 是过 Q_i, Q_j 两点的直线, 以两直线 $l_{i_1i_3}$ 与 $l_{i_2i_4}$ 交点为坐标原点的直线 l 与过 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 的形如式 (1.4.2) 的任意 n 条二次曲线 $F_{\tau_k}(x, y) = 0(k = 1, 2, \cdots, n)$ 及两直线对 $l_{i_1i_2}$ 和 $l_{i_3i_4}, l_{i_2i_3}$ 和 $l_{i_4i_1}$ 的交点分别为 $U_k(u_k), V_k(v_k)(k = 1, 2, \cdots, n+2)$. 若对任意的 k 有 $u_kv_k \neq 0$, 则

$$\frac{1}{u_s} + \frac{1}{v_s} = \frac{1}{u_t} + \frac{1}{v_t}(s, t = 1, 2, \cdots, n+2; s \neq t).$$

注 1.4.1　根据二次曲线簇 (1.4.1) 和 (1.4.2) 与其四个基点排列的对应性易知, 当直线 l 及其坐标原点是两直线 $l_{i_1i_2}$ 与 $l_{i_3i_4}$ 及其交点 (或 $l_{i_2i_3}$ 与 $l_{i_4i_1}$ 及其交点) 时, 定理 1.4.3~ 定理 1.4.5 及其推论的结论仍然成立.

定理 1.4.7　设 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 是平面上不同的四点, $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 是 $1, 2, 3, 4$ 对二级函数 $g(\tau)$ 两个本质上相同的排列, l_{ij} 是过 Q_i, Q_j 两点的直线. 以两直线 $l_{i_1i_3}$ 与 $l_{i_2i_4}$ 交点为坐标原点的直线 l 与过 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 的形如式 (1.4.2) 的任意 n 条二次曲线 $F_{\tau_k}(x, y) = 0$ 的交点分别为 $U_k(u_k), V_k(v_k)(k = 1, 2, \cdots, n)$. 若对任意的 $k_1, k_2 = 1, 2, \cdots, n; k_1 \neq k_2$, 有 $u_{k_1}v_{k_1} - u_{k_2}v_{k_2} \neq 0$, 则

$$\frac{(u_{s_1} + v_{s_1}) - (u_{t_1} + v_{t_1})}{u_{s_1}v_{s_1} - u_{t_1}v_{t_1}} = \frac{(u_{s_2} + v_{s_2}) - (u_{t_2} + v_{t_2})}{u_{s_2}v_{s_2} - u_{t_2}v_{t_2}}, \tag{1.4.8}$$

其中 $s_1, s_2; t_1, t_2 = 1, 2, \cdots, n$; 且 $s_1 \neq s_2, t_1 \neq t_2$ 至少有一个成立.

证明　以 l 为 x 轴、l 的原点为直角坐标原点建立坐标系. 设 Q_i 的坐标为 $Q_i(x_i, y_i)(i = 1, 2, 3, 4)$. 由 $u_{k_1}v_{k_1} - u_{k_2}v_{k_2} \neq 0$ 有 $a_{i_2i_4}a_{i_3i_1}c_{i_1i_2}c_{i_3i_4} - a_{i_1i_2}a_{i_3i_4}c_{i_1i_3}c_{i_4i_2}$

$\neq 0$. 于是根据定理 1.4.5 知, 对任意的 $s,t=1,2,\cdots,n; s\neq t$, 有

$$\frac{(u_s+v_s)-(u_t+v_t)}{u_sv_s-u_tv_t}=g(\tau),$$

因此式 (1.4.8) 成立.

推论 1.4.5 设 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 是平面上不同的四点, $\tau=(i_1i_2i_3i_4)$ 是 $1,2,3,4$ 的一个排列, l_{ij} 是过 Q_i,Q_j 两点的直线. 以两直线 $l_{i_1i_3}$ 与 $l_{i_2i_4}$ 交点为坐标原点的直线 l 与直线 $l_{i_1i_2}$ 和 $l_{i_3i_4}$, $l_{i_2i_3}$ 和 $l_{i_4i_1}$ 的交点分别为 $U_k(u_k),V_k(v_k)(k=n+1,n+2)$, 若对任意的 $k_1,k_2=n+1,n+2; k_1\neq k_2$, 有 $u_{k_1}v_{k_1}-u_{k_2}v_{k_2}\neq 0$, 则

$$\frac{(u_{n+1}+v_{n+1})-(u_{n+2}+v_{n+2})}{u_{n+1}v_{n+1}-u_{n+2}v_{n+2}}=g(\tau). \tag{1.4.9}$$

证明 令 $\tau_1=\tau_2=\cdots=\tau_n=\tau$ 及 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0,1$, 于是直线 $l_{i_1i_2}$ 和 $l_{i_3i_4}$, $l_{i_2i_3}$ 和 $l_{i_4i_1}$ 均为二次曲线簇 $F_{\tau_k}(x,y)=0(k=1,2,\cdots,n)$ 的退化二次曲线, 故由定理 1.4.7 得式 (1.4.9).

由定理 1.4.7 及推论 1.4.5, 得下述定理.

定理 1.4.8 设 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 是平面上不同的四点, $\tau_1=(i_1i_2i_3i_4),\tau_2,\cdots,\tau_n$ 是 $1,2,3,4$ 对二级函数 $g(\tau)$ 两个本质上相同的排列, l_{ij} 是过 Q_i,Q_j 两点的直线. 以两直线 $l_{i_1i_3}$ 与 $l_{i_2i_4}$ 交点为坐标原点的直线 l 与过 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 的形如式 (1.4.1) 的任意 n 条二次曲线 $F_{\tau_k}(x,y)=0$ 及直线 $l_{i_1i_2}$ 和 $l_{i_3i_4}$, $l_{i_2i_3}$ 和 $l_{i_4i_1}$ 的交点分别为 $U_k(u_k),V_k(v_k)(k=1,2,\cdots,n+2)$. 若对任意的 $k_1,k_2=1,2,\cdots,n+2; k_1\neq k_2$, 有 $u_{k_1}v_{k_1}-u_{k_2}v_{k_2}\neq 0$, 则

$$\frac{(u_{s_1}+v_{s_1})-(u_{t_1}+v_{t_1})}{u_{s_1}v_{s_1}-u_{t_1}v_{t_1}}=\frac{(u_{s_2}+v_{s_2})-(u_{t_2}+v_{t_2})}{u_{s_2}v_{s_2}-u_{t_2}v_{t_2}},$$

其中 $s_1,s_2;t_1,t_2=1,2,\cdots,n+2$; 且 $s_1\neq s_2, t_1\neq t_2$ 至少有一个成立.

注 1.4.2 根据二次曲线簇 (1.4.1) 和 (1.4.2) 与其四个基点排列的对应性易知, 当直线 l 及其坐标原点是两直线 $l_{i_1i_2}$ 与 $l_{i_3i_4}$ 及其交点 (或 $l_{i_2i_3}$ 与 $l_{i_4i_1}$ 及其交点) 时, 定理 1.4.6~ 定理 1.4.8 及其推论的结论仍然成立.

1.4.4 结论

综上所述, 过平面上不同四点可以作 12 条不同的有向直线, 但若不考虑直线的方向, 其中只有 6 条是不同的. 从这实质上不同的 6 条直线中任选 4 条, 再加上 4 条直线的先后次序, 对特定的参数 λ 而言, 可以得到 24 条形如式 (1.4.1) 的二次曲线, 其中每条二次曲线对应于 4! 中的一个排列. 但在这 24 条二次曲线中, 只有 6 类是本质上不同的, 一类不同的二次曲线, 对应于 4! 的 6 类不同的排列 $\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_6$.

第 2 章　点到直线的有向距离及其应用

2.1　点到直线有向距离公式

点是零维图形, 直线为一维图形, 因此点到直线间的有向距离可以看成是一个零维图形与一个一维图形之间的有向距离.

点到直线间的有向距离, 不仅与点和直线有关, 而且与直线的走向有关, 因此必须把与直线 $l: ax+by+c=0$ 和与其相差一个符号的直线 $l^-: -ax-by-c=0$ 区别开来.

本节首先给出点到直线之间有向距离的概念、有向距离公式与性质; 其次介绍点到直线之间有向距离的一些结论, 包括双曲线上任意一点到其两共轭渐近线间有向距离的定值定理、三角形内 (外) 切圆切线的 Harcourt 定理等结论; 最后, 给出三角形中有向距离的几个定值定理及其应用.

2.1.1　点到直线间有向距离的概念、性质和公式

定义 2.1.1　设点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: ax+by+c=0$ 的距离为 d_{P-l}, 则 P 到直线 l 的有向距离

$$D_{P-l} = \pm d_{P-l}, \tag{2.1.1}$$

其中 "±" 号与 ax_0+by_0+c 的符号相同.

特别, 当 P 在直线 l 上时, 我们规定式 (2.1.1) 中的距离为零.

显然, $D_{P-l^-} = -D_{P-l}$. 因此, 在有向距离下, 过两点的直线方程与过这两点先后次序有关的. 为此, 我们用 $l_{P_1P_2}, l_{P_2P_1}$(在不至于引起混淆的情况下简记为 P_1P_2, P_2P_1) 分别表示依次过 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 的直线

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 即 \quad (y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0$$

和依次过 $P_2(x_2, y_2), P_1(x_1, y_1)$ 的直线

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 即 \quad (y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+(x_2y_1-x_1y_2)=0.$$

定理 2.1.1　点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: ax+by+c=0$ 的有向距离

$$D_{P-l}=\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{2.1.2}$$

证明 因为点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:ax+by+c=0$ 的距离 $d_{P-l}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 所以点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:ax+by+c=0$ 的有向距离 $D_{P-l}=\pm\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

根据定义 2.1.1, 当 $ax_0+by_0+c>0$ 时, $D_{P-l}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; 当 $ax_0+by_0+c<0$ 时, $D_{P-l}=-\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; 当 $ax_0+by_0+c=0$ 时, $D_{P-l}=0$. 因此式 (2.1.2) 立.

推论 2.1.1 点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $P_1P_2:(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0$ 的有向距离

$$D_{P-P_1P_2}=\frac{1}{d_{P_1P_2}}[(y_1-y_2)x_0+(x_2-x_1)y_0+(x_1y_2-x_2y_1)]. \tag{2.1.3}$$

证明 根据定理 2.1.1 和两点间的距离公式即得.

2.1.2 点到直线有向距离的几个结论

定理 2.1.2 设 P 是双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=k^2(a,b,k>0)$ 上任意一点, 证明: P 到两共轭直线 $l_1:bx+ay=0, l_2:bx-ay=0$ 间的距离 (有向距离) 之积恒为定值.

证明 如图 2.1.1 所示. 设 P 的坐标为 $(ak\sec\alpha, bk\tan\alpha)$, 则

$$D_{P-l_1}=\frac{bak\sec\alpha+abk\tan\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad D_{P-l_2}=\frac{bak\sec\alpha-abk\tan\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

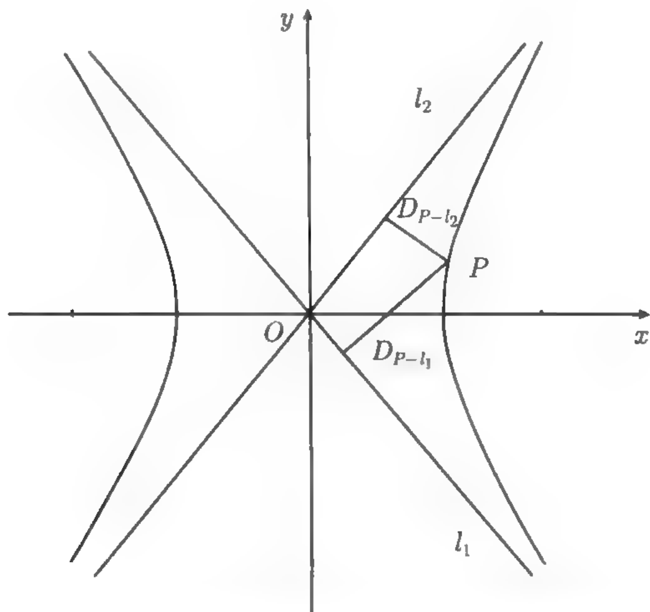


图 2.1.1 双曲线上任意一点到两共扼直线的有向距离

于是

$$\begin{aligned}D_{P-l_1}D_{P-l_2}&=\frac{a^2b^2k^2}{a^2+b^2}(\sec\alpha+\tan\alpha)(\sec\alpha-\tan\alpha)\\&=\frac{a^2b^2k^2}{a^2+b^2}(\sec^2\alpha-\tan^2\alpha)=\frac{a^2b^2k^2}{a^2+b^2}(\text{为定值}).\end{aligned}$$

推论 2.1.2　双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=k^2(a,b,k>0)$ 上任意一点 P 到椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的两条共轭直径(或双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 的两条渐近线)$y=\pm\frac{b}{a}x$ 间的距离 (有向距离) 之积恒为定值.

定理 2.1.3　过正多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的各个顶点 P_k 向任一直线 l 作垂线, 垂足为 $Q_k(k=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}D_{Q_k-P_{k+1}P_{k+2}}=\pm nR\left(\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

其中 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正向三角形时取 “+” 号, 反向三角形时取 “−” 号; a,R 分别为正多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的边长和外接圆半径.

证明　如图 2.1.2 所示. 当 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正向多边形时, 设其顶点的坐标为 $P_k\left(R\cos\frac{2k}{n}\pi,R\sin\frac{2k}{n}\pi\right)(k=1,2,\cdots,n)$, l 的方程为

$$ax+by+c=0\,(a^2+b^2=1),\tag{2.1.4}$$

于是过 P_k 且与 l 垂直的直线方程为

$$bx-ay+R\left(a\sin\frac{2k}{n}\pi-b\cos\frac{2k}{n}\pi\right)=0.\tag{2.1.5}$$

式 (2.1.4) 和式 (2.1.5) 联立, 求得垂足的坐标为

$$Q_k\left(ac+bR\left(a\sin\frac{2k}{n}\pi-b\cos\frac{2k}{n}\pi\right),bc+aR\left(b\cos\frac{2k}{n}\pi-a\sin\frac{2k}{n}\pi\right)\right)$$
$$(k=1,2,\cdots,n).$$

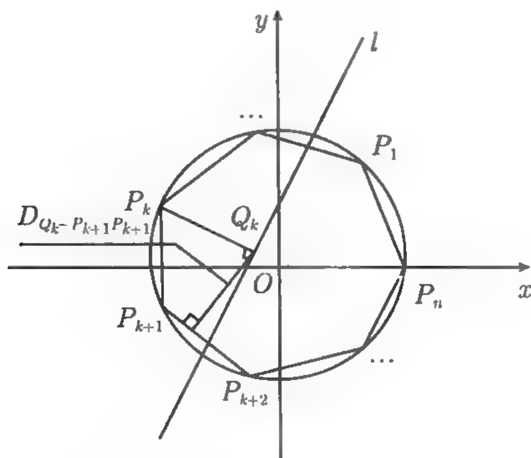


图 2.1.2　正多边形各顶点到任意直线垂足的性质

直线 $P_{k+1}P_{k+2}$ 的方程为

$$\left(\sin\frac{2k+2}{n}\pi-\sin\frac{2k+4}{n}\pi\right)x+\left(\cos\frac{2k+4}{n}\pi-\cos\frac{2k+2}{n}\pi\right)y-R\sin\frac{2\pi}{n}=0,$$

即

$$-\cos\frac{2k+3}{n}\pi\cdot x-\sin\frac{2k+3}{n}\pi\cdot y+R\cos\frac{\pi}{n}=0.$$

于是

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}D_{Q_k-P_{k+1}P_{k+2}}\\=&-\sum_{k=1}^{n}\left[ac+bR\left(a\sin\frac{2k}{n}\pi-b\cos\frac{2k}{n}\pi\right)\right]\cos\frac{2k+3}{n}\pi\\&-\sum_{k=1}^{n}\left[bc+aR\left(b\cos\frac{2k}{n}\pi-a\sin\frac{2k}{n}\pi\right)\right]\sin\frac{2k+3}{n}\pi+R\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{n}\\=&nR\cos\frac{\pi}{n}-ac\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k+3}{n}\pi-bc\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k+3}{n}\pi-abR\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{4k+3}{n}\pi\\&+\frac{1}{2}b^2R\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{4k+3}{n}\pi+\cos\frac{3\pi}{n}\right)-\frac{1}{2}a^2R\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{4k+3}{n}\pi-\cos\frac{3\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k+3}{n}\pi=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{n}\pi=0,\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k+3}{n}\pi=0;$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{4k+3}{n}\pi=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{4k-1}{n}\pi=0,\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{4k+3}{n}\pi=0,$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}D_{Q_k-P_{k+1}P_{k+2}}&=nR\cos\frac{\pi}{n}+\frac{1}{2}b^2R\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{3\pi}{n}+\frac{1}{2}a^2R\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{3\pi}{n}\\&=nR\cos\frac{\pi}{n}+\frac{1}{2}n(a^2+b^2)R\cos\frac{3\pi}{n}=nR\left(\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

当 $P_1P_2\cdots P_n$ 为反向多边形时, 则 $P_nP_{n-1}\cdots P_1$ 正向多边形, 于是

$$\sum_{k=1}^{n}D_{Q_k-P_{k+1}P_{k+2}}=-\sum_{k=1}^{n}D_{Q_k-P_{k+2}P_{k+1}}=-nR\left(\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

推论 2.1.3　过等边三角形 $P_1P_2P_3$ 的各个顶点 P_k 向任一直线 l 作垂线, 垂足为 $Q_k(k=1,2,3)$, 则

$$D_{Q_1-P_2P_3}+D_{Q_2-P_3P_1}+D_{Q_3-P_1P_2}=0.$$

证明　在式 (2.1.3) 中令 $n=3$ 即得.

定理 2.1.4　边长为 $2a$ 的正方形 $ABCD$ 内接于一圆. 证明圆周上的任一点到正方形各边有向距离的和恒为常数 $4a$, 有向距离的平方和恒为常数 $8a^2$.

证明　不妨设正方形顶点的坐标为 $A(\sqrt{2}a,0),B(0,\sqrt{2}a),C(-\sqrt{2}a,0),D(0,-\sqrt{2}a)$, 其内接圆上任意一点的坐标为 $P(\sqrt{2}a\cos\alpha,\sqrt{2}a\sin\alpha)$. 于是直线 AB 的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sqrt{2}a & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}a & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$-x-y+\sqrt{2a}=0.$$

同理可以求得其余各边的方程

$$BC: x-y+\sqrt{2}a=0;\quad CD: x+y+\sqrt{2}a=0;\quad DA: -x+y+\sqrt{2}a=0.$$

于是

$$\begin{aligned} D_{P-AB}=&\frac{-\sqrt{2}a(\cos\alpha+\sin\alpha-1)}{\sqrt{1+1}}=-a(\cos\alpha+\sin\alpha-1),\\ D_{P-BC}=&a(\cos\alpha-\sin\alpha+1),\\ D_{P-CD}=&a(\cos\alpha+\sin\alpha+1),\quad D_{P-DA}=a(-\cos\alpha+\sin\alpha+1). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &D_{P-AB}+D_{P-BC}+D_{P-CD}+D_{P-DA}\\ =&4a, D_{P-AB}^2+D_{P-BC}^2+D_{P-CD}^2+D_{P-DA}^2=8a^2. \end{aligned}$$

定理 2.1.5(Harcourt 定理)[4]　设 l 是三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 内切圆的任一切线, 且三角形内部的点到 l 的有向距离大于零, $S_{Q_1Q_2Q_3}$ 表示三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的面积, 则

$$\sum_{i=1}^{3}D_{Q_i-l}d_{Q_{i+1}Q_{i+2}}=2S_{Q_1Q_2Q_3}(\text{为定值}).\tag{2.1.6}$$

证明　如图 2.1.3 所示. 不妨设 $Q_1Q_2Q_3$ 为正向三角形, 其内切圆为 $x^2+y^2=R^2$, Q_iQ_{i+1} 与其切点的坐标为 $P_i(R\cos\alpha_i,R\sin\alpha_i)(i=1,2,3)$, 于是 $0<\alpha_{i+1}-\alpha_i<\pi$.

由 $Q_{i+2}Q_i$ 的直线方程

$$\cos\alpha_{i+2}\cdot x+\sin\alpha_{i+2}\cdot y=R$$

和 Q_iQ_{i+1} 的直线方程

$$\cos\alpha_i\cdot x+\sin\alpha_i\cdot y=R$$

求得三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{R\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}},\frac{R\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}\right)\ (i=1,2,3).$$

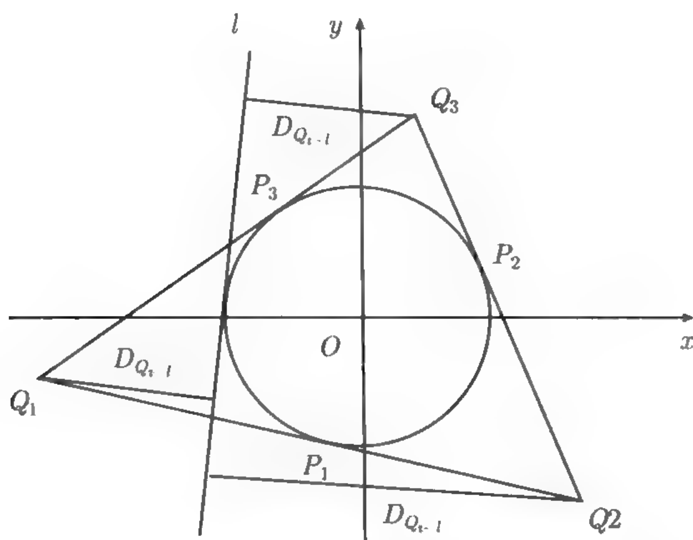


图 2.1.3 三角形内切圆任意切线的 Harcourt 定理

又设 l 与内切圆 $x^2+y^2=R^2$ 的切点为 $P(R\cos\alpha,R\sin\alpha)$, 于是由题设 l 的方程为

$$-\cos\alpha\cdot x-\sin\alpha\cdot y+R=0.$$

故

$$\begin{aligned}&D_{Q_i-l}\\=&R-\frac{R\cos\alpha\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}-\frac{R\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}},\\&d_{Q_{i+1}Q_{i+2}}\\=&R\sqrt{\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}}-\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}}-\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}\right)^2}\\=&\frac{R\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} D_{Q_i-l} d_{Q_{i+1}Q_{i+2}} = R\sum_{i=1}^{3} d_{Q_{i+1}Q_{i+2}} \\
&-\frac{R^2\left(\cos\alpha\sum\limits_{i=1}^{3}\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}+\sin\alpha\sum\limits_{i=1}^{3}\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{3}\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}} \\
&=R\sum_{i=1}^{3} d_{Q_{i+1}Q_{i+2}}-\frac{R^2\left[\cos\alpha\sum\limits_{i=1}^{3}(\sin\alpha_{i+2}-\sin\alpha_i)-\sin\alpha\sum\limits_{i=1}^{3}(\cos\alpha_{i+2}-\cos\alpha_i)\right]}{2\prod\limits_{i=1}^{3}\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}} \\
&=R\sum_{i=1}^{3} d_{Q_{i+1}Q_{i+2}} = 2S_{Q_1Q_2Q_3}.
\end{aligned}$$

因此式 (2.1.6) 成立.

定理 2.1.6(Harcourt 定理)[4]　设 l 是三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 顶点 Q_i 所对应外切圆的任一切线, 且三角形内部的点到 l 的有向距离大于零, $S_{Q_1Q_2Q_3}$ 表示三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的面积, 则

$$D_{Q_{i+1}-l}d_{Q_{i+2}Q_i}+D_{Q_{i+2}-l}d_{Q_iQ_{i+1}}-D_{Q_i-l}d_{Q_{i+1}Q_{i+2}} = 2S_{Q_1Q_2Q_3}(i=1,2,3)(\text{为定值}). \tag{2.1.7}$$

证明　如图 2.1.4 所示. 不妨设 $Q_1Q_2Q_3$ 为正向三角形, 其顶点 Q_i 所对应外切圆外切圆为 $x^2+y^2=R^2, Q_iQ_{i+1}$ 与该圆的切点的坐标为 $P_i(R\cos\alpha_i, R\sin\alpha_i)(i=1,2,3)$, 于是 $0<\alpha_{i+1}-\alpha_i<\pi$, $0<\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}<\pi, \pi<\alpha_{i+2}-\alpha_i<2\pi$.

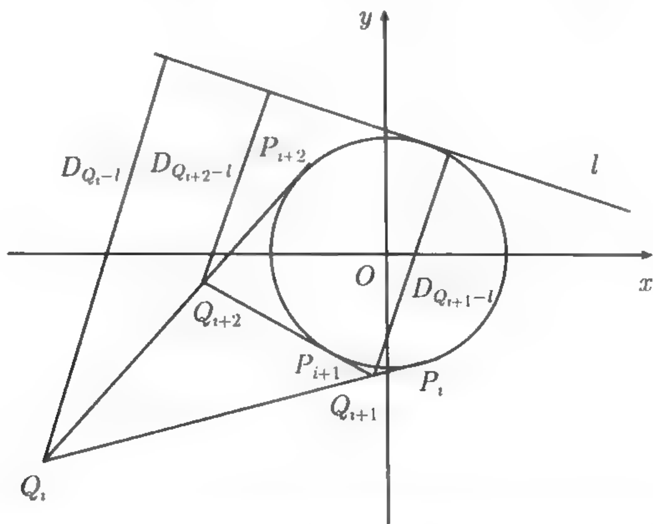


图 2.1.4　三角形外切圆任意切线的 Harcourt 定理

仿定理 2.1.5 的证明并注意到

$$d_{Q_{k+1}Q_{k+2}} = \pm\frac{R\sin\dfrac{\alpha_{k+2}-\alpha_k}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}}{2}\cos\dfrac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{2}}(\text{其中}k=i\text{时取正号}, k=i+1, i+2\text{时取负号})$$

即得式 (2.1.7) 成立.

2.1.3 三角形中有向距离的定值定理及其应用

定理 2.1.7 设 $P_{i+2}Q_i$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 内角 $P_iP_{i+2}P_{i+1}$ 的平分线, Q_i 是 $P_{i+2}Q_i$ 与对边 P_iP_{i+1} 的交点, P 是直线 $Q_iQ_{i+1}(i=1, 2, 3)$ 上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{3} D_{P-P_iP_{i+1}} = D_{P-P_1P_2} + D_{P-P_2P_3} + D_{P-P_3P_1} = 0. \tag{2.1.8}$$

证明 如图 2.1.5 所示. 不妨设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点的坐标为 $P_i(a\cos\alpha_i, a\sin\alpha_i)$ $(i=1,2,3)$, 且 $0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<2\pi$, 则由有向直线 P_iP_{i+1} 的方程

$$(\sin\alpha_i-\sin\alpha_{i+1})x+(\cos\alpha_{i+1}-\cos\alpha_i)y=a\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1}),$$

当 $i=1$ 时, 消除恒负因子 $\sin\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$ 得有向直线 P_1P_2 的方程

$$-\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\cdot x-\sin\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\cdot y+a\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}=0,$$

于是

$$D_{P-P_1P_2}=-\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\cdot x-\sin\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\cdot y+a\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}.$$

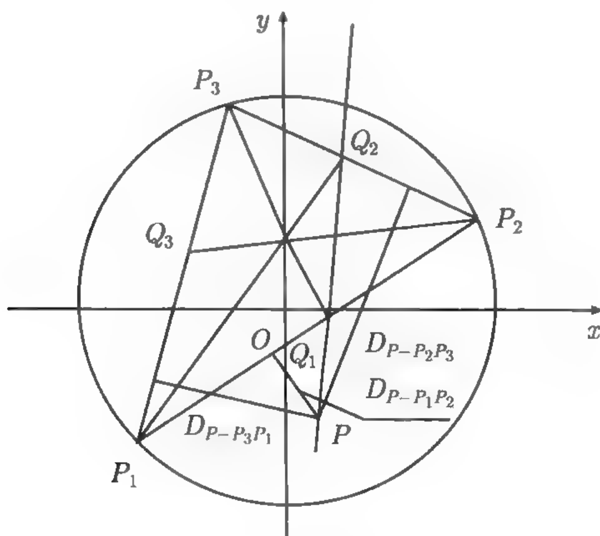


图 2.1.5

类似地, $D_{P-P_2P_3} = -\cos\frac{\alpha_3+\alpha_2}{2}\cdot x - \sin\frac{\alpha_3+\alpha_2}{2}\cdot y + a\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}$.

当 $i=3$ 时, 消除恒正因子 $\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}$ 得有向直线 P_3P_1 的方程

$$\cos\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\cdot x + \sin\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\cdot y - a\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} = 0,$$

于是

$$D_{P-P_3P_1} = \cos\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\cdot x + \sin\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\cdot y - a\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}.$$

因为 Q_1 是角平分线 P_3Q_1 与直线 P_1P_2 的交点, 由以上各有向距离的表达式及三角形各边的方程易知

$$D_{Q_1-P_1P_2} = 0,\quad D_{Q_1-P_2P_3} + D_{Q_1-P_3P_1} = 0,$$

所以

$$D_{Q_1-P_1P_2} + D_{Q_1-P_2P_3} + D_{Q_1-P_3P_1} = 0,$$

类似地

$$D_{Q_2-P_1P_2} + D_{Q_2-P_2P_3} + D_{Q_2-P_3P_1} = 0.$$

于是对于直线 Q_1Q_2 上任意一点 P, 恒有

$$\sum_{i=1}^{3} D_{P-P_iP_{i+1}} = D_{P-P_1P_2} + D_{P-P_2P_3} + D_{P-P_3P_1} = 0,$$

类似地, 可以证明 P 分别为直线 Q_2Q_3, Q_3Q_1 上任意一点的情形, 式 (2.1.8) 成立.

推论 2.1.4　设 $P_{i+2}Q_i$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 内角 $P_iP_{i+2}P_{i+1}$ 的平分线, Q_i 是 $P_{i+2}Q_i$ 与对边 P_iP_{i+1} 的交点, P 是直线 $Q_iQ_{i+1}(i=1,\ 2,\ 3)$ 上任意一点, 则 P 到三角形三边的距离 $d_{P-P_1P_2}, d_{P-P_2P_3}, d_{P-P_3P_1}$ 中, 其中一个的等于另两个的和. 即

当 P 是直线 Q_iQ_{i+1} 上位于 Q_i 一侧任意一点时,

$$d_{P-P_{i+1}P_{i+2}} = d_{P-P_iP_{i+1}} + d_{P-P_{i+2}P_i}\ (i=1,2,3);$$

当 P 是线段 Q_iQ_{i+1} 上任意一点时,

$$d_{P-P_{i+2}P_i} = d_{P-P_iP_{i+1}} + d_{P-P_{i+1}P_{i+2}}\ (i=1,2,3);$$

当 P 是直线 Q_iQ_{i+1} 上位于 Q_{i+1} 一侧任意一点时,

$$d_{P-P_iP_{i+1}} = d_{P-P_{i+1}P_{i+2}} + d_{P-P_{i+2}P_i}\ (i=1,2,3).$$

证明 如图 2.1.5 所示. 注意到式 (2.1.8) 中三个有向距离 $D_{P-P_1P_2}, D_{P-P_2P_3}, D_{P-P_3P_1}$ 中, 其中一个的符号与另两个的符号相反即得.

定理 2.1.8 设 $P_{i+2}Q_i'$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 外角 $P_iP_{i+2}P_{i+1}$ 的平分线, Q_i' 分别是 $P_{i+2}Q_i'$ 与对边 P_iP_{i+1} 延长线的交点, P 是直线 $Q_i'Q_{i+1}'(i=1,\ 2,\ 3)$ 上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{3} D_{P-P_iP_{i+1}} = D_{P-P_1P_2} + D_{P-P_2P_3} + D_{P-P_3P_1} = 0. \tag{2.1.9}$$

证明 如图 2.1.6 所示. 仿定理 2.1.7 可以证明式 (2.1.9) 成立.

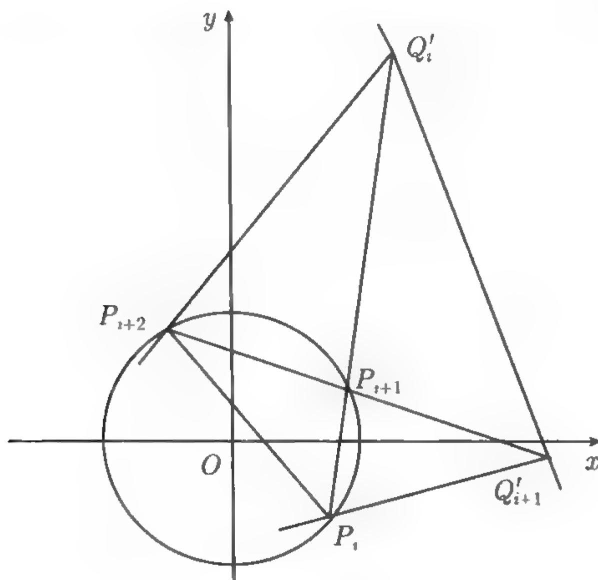


图 2.1.6

推论 2.1.5 设 $P_{i+2}Q_i'$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 外角 $P_iP_{i+2}P_{i+1}$ 的平分线, Q_i' 是 $P_{i+2}Q_i'$ 与对边 P_iP_{i+1} 的交点, P 是直线 $Q_i'Q_{i+1}'(i=1,\ 2,\ 3)$ 上任意一点, 则 P 到三角形三边的距离 $d_{P-P_1P_2}, d_{P-P_2P_3}, d_{P-P_3P_1}$ 中, 其中一个的等于另两个的和. 即

当 P 是直线 $Q_i'Q_{i+1}'$ 上位于 Q_i' 一侧任意一点时,

$$d_{P-P_{i+1}P_{i+2}} = d_{P-P_iP_{i+1}} + d_{P-P_{i+2}P_i}\ (i=1,2,3);$$

当 P 是线段 $Q_i'Q_{i+1}'$ 上任意一点时,

$$d_{P-P_{i+2}P_i} = d_{P-P_iP_{i+1}} + d_{P-P_{i+1}P_{i+2}}\ (i=1,2,3);$$

当 P 是直线 $Q_i'Q_{i+1}'$ 上位于 Q_{i+1}' 一侧任意一点时,

$$d_{P-P_iP_{i+1}} = d_{P-P_{i+1}P_{i+2}} + d_{P-P_{i+2}P_i}\ (i=1,2,3).$$

定理 2.1.9 设 $P_{i+2}Q_i, P_{i+2}Q_i'$ 分别是三角形 $P_1P_2P_3$ 内角 $P_iP_{i+2}P_{i+1}$ 和角 $P_iP_{i+2}P_{i+1}$ 的外角的平分线, Q_i, Q_i' 分别是 $P_{i+2}Q_i, P_{i+2}Q_i'$ 与对边 P_iP_{i+1} 和对边 P_iP_{i+1} 延长线的交点, P 是 $Q_iQ_{i+1}'(i=1,\ 2,\ 3)$ 上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{3} D_{P-P_iP_{i+1}} = D_{P-P_1P_2} + D_{P-P_2P_3} + D_{P-P_3P_1} = 0. \tag{2.1.10}$$

证明　如图 2.1.7 所示. 仿定理 2.1.7 可以证明式 (2.1.10) 成立.

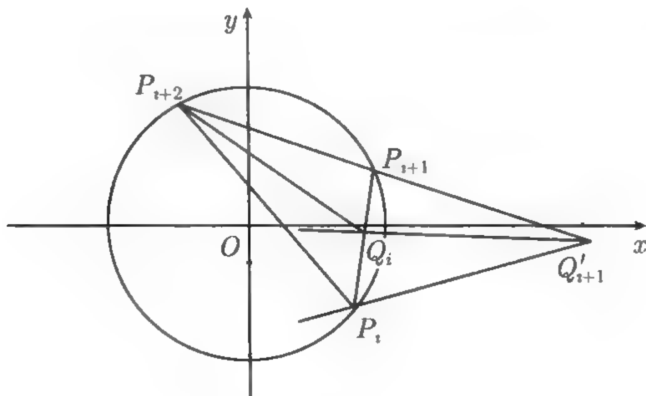


图 2.1.7

推论 2.1.6　设 $P_{i+2}Q_i, P_{i+2}Q'_i$ 分别是三角形 $P_1P_2P_3$ 内角 $P_iP_{i+2}P_{i+1}$ 和角 $P_iP_{i+2}P_{i+1}$ 的外角的平分线, Q_i, Q'_i 分别是 $P_{i+2}Q_i, P_{i+2}Q'_i$ 与对边 P_iP_{i+1} 和对边 P_iP_{i+1} 延长线的交点, P 是 $Q_iQ'_{i+1}(i=1,\ 2,\ 3)$ 上任意一点, 则 P 到三角形三边的距离 $d_{P-P_1P_2}, d_{P-P_2P_3}, d_{P-P_3P_1}$ 中, 其中一个的等于另两个的和. 即

当 P 是直线 $Q_iQ'_{i+1}$ 上位于 Q_i 一侧任意一点时,

$$d_{P-P_{i+1}P_{i+2}} = d_{P-P_iP_{i+1}} + d_{P-P_{i+2}P_i}\ (i=1,2,3);$$

当 P 是线段 $Q_iQ'_{i+1}$ 上任意一点时,

$$d_{P-P_{i+2}P_i} = d_{P-P_iP_{i+1}} + d_{P-P_{i+1}P_{i+2}}\ (i=1,2,3);$$

当 P 是直线 $Q_iQ'_{i+1}$ 上位于 Q'_{i+1} 一侧任意一点时,

$$d_{P-P_iP_{i+1}} = d_{P-P_{i+1}P_{i+2}} + d_{P-P_{i+2}P_i}\ (i=1,2,3).$$

2.2　点到直线的有向距离在几何证题中的应用

我们知道, Servois 定理、Carnot 定理、Brahmagupta 定理、切线与辅助圆定理、Anthemius 定理、焦点和切线的 Apollonius 定理和 Zerr 定理是平面几何中著名的结论, 其实这些结论都和点到直线之间的有向距离有关.

本节主要用有向距离的思想方法审视这些定理, 并给出这些定理的证明.

定理 2.2.1(Servois 定理)　三角形任意一个顶点到垂心的距离, 等于外心到它的对边的距离的两倍.

证明 如图 2.2.1 所示. 以三角形 $P_1P_2P_3$ 外心 O 为坐标原点建立直角坐标系. 不妨设三角形的顶点坐标为 $P_1(a\cos\alpha, a\sin\alpha), P_2(a\cos\beta, a\sin\beta), P_3(-a\cos\alpha, a\sin\alpha), P_1Q\perp P_2P_3$ 于 Q, 垂心为 H, 则三角形的外心 O 到 P_3P_1 的有向距离 $D_{O-P_3P_1}=a\sin\alpha$.

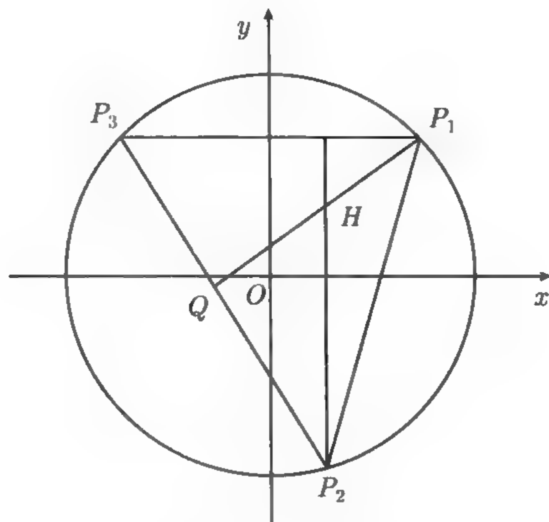


图 2.2.1 三角形垂心与外心的 Servois 定理

若 $\cos\beta+\cos\alpha=0$, 则 $P_1P_2P_3$ 为直角三角形, 且圆心 O 为 P_2P_3 的中点, 结论显然成立.

若 $\cos\beta+\cos\alpha\neq 0$, 因为 $k_{P_2P_3}=\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{\cos\beta+\cos\alpha}\neq 0$, 所以直线 P_1Q 的方程为

$$y-a\sin\alpha=-\frac{\cos\beta+\cos\alpha}{\sin\beta-\sin\alpha}(x-a\cos\alpha),$$

令 $x=a\cos\beta$, 得垂心 H 的纵坐标

$$y=a\sin\alpha-\frac{\cos\beta+\cos\alpha}{\sin\beta-\sin\alpha}(a\cos\beta-a\cos\alpha)=a(2\sin\alpha+\sin\beta),$$

于是 $D_{P_2H}=a(2\sin\alpha+\sin\beta)-a\sin\beta=2a\sin\alpha$, 所以 $D_{P_2H}=2D_{O-P_3P_1}$, 从而定理 2.2.1 结论成立.

定理 2.2.2(Carnot 定理)[5] 三角形每条高上垂心到一边的线段等于这条高从边到三角形外圆交点的延长线.

证明 如图 2.2.2 所示. 设三角形顶点的坐标如定理 2.2.1 证明所设, P_2H 与直线 P_1P_3 和三角形外接圆的交点分别为 M,N, 于是 M,N 的纵坐标分别为 $y_M=a\sin\alpha, y_N=-a\sin\beta$. 故

$$D_{HM}=a\sin\alpha-a(2\sin\alpha+\sin\beta)=-a(\sin\alpha+\sin\beta)=D_{MN},$$

因此定理 2.2.2 结论成立.

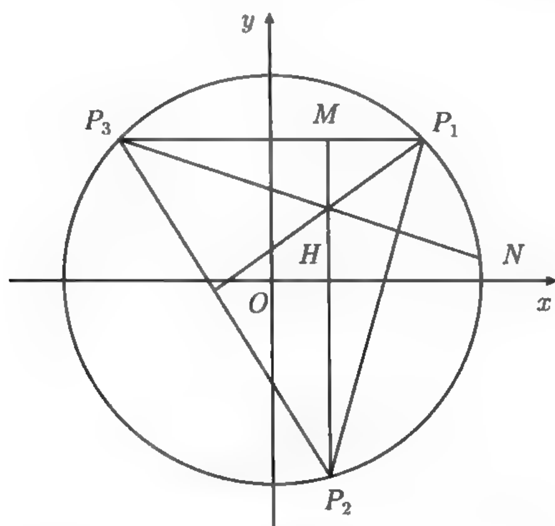


图 2.2.2　三角形高的 Carnot 定理

定理 2.2.3(Brahmagupta 定理)　若圆内接四边形的对角线互相垂直, 则过对角线交点且垂直于一边的直线必平分其对边.

证明　如图 2.2.3 所示. 设 $ABCD$ 是圆内接四边形, $AC\perp BD$ 于 $O, OE\perp AB$ 于 E, OE, 延长线交 CD 于 F. 以 AC, BD 为坐标轴建立坐标系, 不妨设四边形顶点的坐标为 $A(-a,0)$, $B(0,-b), C(c,0), D(0,d)\,(a,b,c,d>0)$, 于是 CD 中点的坐标为 $F(c/2,d/2)$.

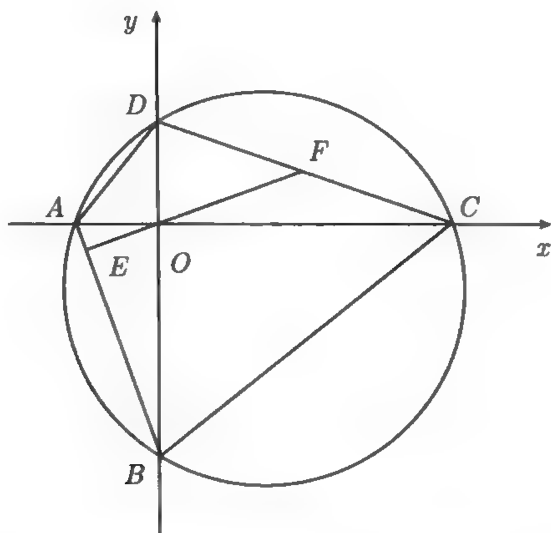


图 2.2.3　圆内接四边形的 Brahmagupta 定理

因为 $\triangle OAB$ 相似于 $\triangle ODC$, 所以 $a/d=b/c$, 即 $ac=bd$.

方法 1　直线 AB 的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -a & 0 & 1 \\ 0 & -b & 1 \end{vmatrix}=0, \text{即} bx+ay+ab=0.$$

所以

$$d_{F-AB} = D_{F-AB} = \frac{bc/2 + ad/2 + ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$d_{O-AB} = D_{O-AB} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad d_{OF} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2}$$

因为

$$(ac-bd)^2 = 0 \Rightarrow a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 = 0 \Rightarrow (ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$
$$\Rightarrow ad+bc = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)},$$

所以

$$d_{F-AB} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = d_{O-AB} + d_{OF},$$

从而定理 2.2.3 结论成立.

方法 2 直线 AB 的方程为$\frac{x}{-a}+\frac{y}{-b}=1$, 直线 EF 的方程设为 $\frac{x}{-b}+\frac{y}{a}=f$, 将 $F(c/2,d/2)$ 的坐标代入得 $f=\frac{bd-ac}{2ab}=0$, 所以直线 EF 的方程为 $\frac{x}{-b}+\frac{y}{a}=0$. 因此直线 EF 通过坐标原点, 从而定理 2.2.3 结论成立.

定理 2.2.4(切线与辅助圆定理) 分别过有心圆锥曲线的两个焦点 F, F', 向它的任意一条切线 l 作垂线, 则其垂足的轨迹是其辅助圆, 且两个焦点到切线的距离 (有向距离) 之积恒为定值.

证明 (1) 如图 2.2.4 所示. 不妨设椭圆的方程为 $x^2/a^2+y^2/b^2=1\ (a>b>0)$, 切点的坐标为 $P(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, 则切线 l 的方程为

$$x\cos\alpha/a + y\sin\alpha/b = 1. \tag{2.2.1}$$

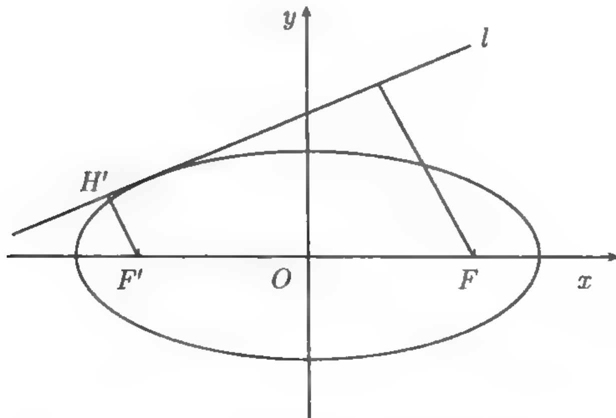


图 2.2.4 椭圆的切线与辅助圆定理

设 $F'H'\perp l$ 于 H', 则 $F'H'$ 的方程可设为

$$x\sin\alpha/b-y\cos\alpha/a=f,$$

将 $F'(-c,0)$ 代入得 $f=-c\sin\alpha/b$, 于是 $F'H'$ 的方程为

$$x\sin\alpha/b-y\cos\alpha/a=-c\sin\alpha/b. \tag{2.2.2}$$

式 (2.2.1) 的两边平方和式 (2.1.2) 的两边平方相加得

$$x^2(\cos^2\alpha/a^2+\sin^2\alpha/b^2)+y^2(\sin^2\alpha/b^2+\cos^2\alpha/a^2)=1+c^2\sin^2\alpha/b^2,$$

将 $c^2=a^2-b^2$ 代入上式化简得

$$x^2+y^2=a^2.$$

又

$$\begin{aligned}D_{F'-l}D_{F-l}&=\frac{-c\cos\alpha/a-1}{\sqrt{\cos^2\alpha/a^2+\sin^2\alpha/b^2}}\times\frac{c\cos\alpha/a-1}{\sqrt{\cos^2\alpha/a^2+\sin^2\alpha/b^2}}\\&=-\frac{(a^2-b^2)\cos^2\alpha/a^2-1}{\cos^2\alpha/a^2+\sin^2\alpha/b^2}=-\frac{-b^2\cos^2\alpha/a^2-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha/a^2+\sin^2\alpha/b^2}=b^2(\text{为定值}).\end{aligned}$$

(2) 如图 2.2.5 所示. 不妨双曲线的方程为 $x^2/a^2-y^2/b^2=1(a>b>0)$, 切点的坐标为 $P(a\sec\alpha,b\tan\alpha)$, 则切线 l 的方程为

$$x\sec\alpha/a-y\tan\alpha/b=1. \tag{2.2.3}$$

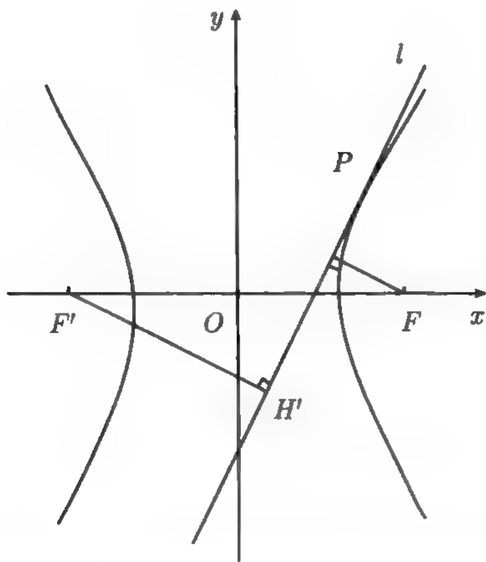


图 2.2.5　双曲线的切线与辅助圆定理

设 $F'H'\perp l$ 于 H', 则 $F'H'$ 的方程可设为

$$x\tan\alpha/b+y\sec\alpha/a=f,$$

将 $F'(-c,0)$ 代入得 $f=-c\tan\alpha/b$, 于是 $F'H'$ 的方程为

$$x\sin\alpha/b+y\cos\alpha/a=-c\tan\alpha/b \tag{2.2.4}$$

式 (2.2.3) 的两边平方和式 (2.2.4) 的两边平方相加得

$$x^2(\sec^2\alpha/a^2+\sin^2\alpha/b^2)+y^2(\tan^2\alpha/b^2+\sec^2\alpha/a^2)=1+c^2\tan^2\alpha/b^2,$$

将 $c^2=a^2+b^2$ 代入上式化简得

$$x^2+y^2=a^2.$$

设双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 切点的坐标为 $P(a\sec\alpha,b\tan\alpha)$, 则切线的方程为

$$l:x\sec\alpha/a+y\tan\alpha/b=1,$$

于是

$$\begin{aligned}D_{F'-l}D_{F-l}=&\frac{-c\sec\alpha/a-1}{\sqrt{\sec^2\alpha/a^2+\tan^2\alpha/b^2}}\times\frac{c\sec\alpha/a-1}{\sqrt{\sec^2\alpha/a^2+\tan^2\alpha/b^2}}\\=&-\frac{(a^2+b^2)\sec^2\alpha/a^2-1}{\sec^2\alpha/a^2+\tan^2\alpha/b^2}=-\frac{b^2\sec^2\alpha/a^2+\tan^2\alpha}{\sec^2\alpha/a^2+\tan^2\alpha/b^2}=-b^2(\text{为定值}).\end{aligned}$$

注 2.2.1 定理 2.2.4 的前半部分可以看成是垂足的坐标的平方和恒为定值的问题.

定理 2.2.5(Anthemius 定理) 过抛物线上一点的切线, 平分由这点与焦点的连线和过这点且平行于该抛物线对称轴的射线所组成的角.

证明 如图 2.2.6 所示. 不妨设抛物线的方程为 $y^2=2px$, 焦点的坐标为 $F(p/2,0)(p>0)$, 切点为 $P_0(x_0,y_0)$, $P_0H\perp y$ 于 H, 切线 P_0T 交 x 轴于 T 点.

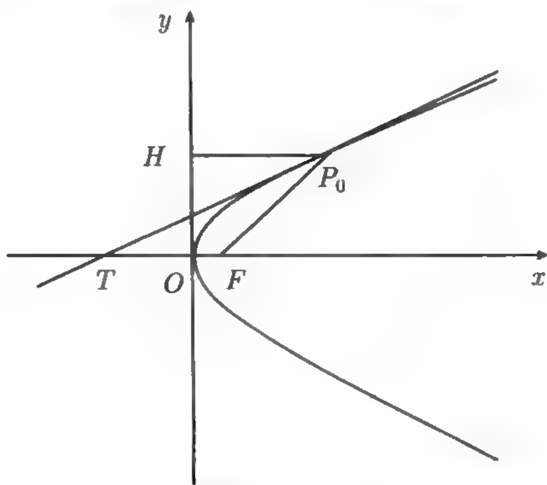


图 2.2.6 抛物线的 Anthemius 定理

于是 P_0T 的方程为

$$y_0y = p(x + x_0),$$

所以

$$x = (y_0y - px_0)/p.$$

P_0H 的方程为

$$y - y_0 = 0,$$

P_0F 的方程为

$$2y_0x - (p - 2x_0)y - py_0 = 0.$$

设 $P(x, y)$ 是切线 P_0T 上的任意一点, 则

$$\begin{aligned}
D_{P-P_0H} =& y - y_0,\\
D_{P-P_0F} =& \frac{2y_0x - (p-2x_0)y - py_0}{\sqrt{4y_0^2 + (p-2x_0)^2}} = \frac{2y_0(y_0y - px_0)/p - (p-2x_0)y - py_0}{2x_0 + p}\\
=& \frac{2(2px_0y - px_0y_0)/p - (p-2x_0)y - py_0}{2x_0 + p}\\
=& \frac{2x_0y - 2x_0y_0 + py - py_0}{2x_0 + p} = y - y_0,
\end{aligned}$$

所以 $D_{P-P_0H} = D_{P-P_0F}$, 从而定理 2.2.5 结论成立.

推论 2.2.1　过抛物线 $y^2 = 2px$ 上的一点 P_0, 作其切线 P_0T, 交 y 轴于 N 点, 则焦点 F 和 N 点的连线垂直于切线 P_0N.

证明　如图 2.2.7 所示. 根据定理 2.2.5 有 $\angle HP_0N = \angle NP_0F = \angle OTN$, 所以 $\text{Rt}\triangle P_0HN \cong \text{Rt}\triangle TON$, 于是 N 为 P_0T 的中点, 即 FN 是等腰 $\triangle P_0FT$ 底边上的高, 所以 $FN \perp P_0N$.

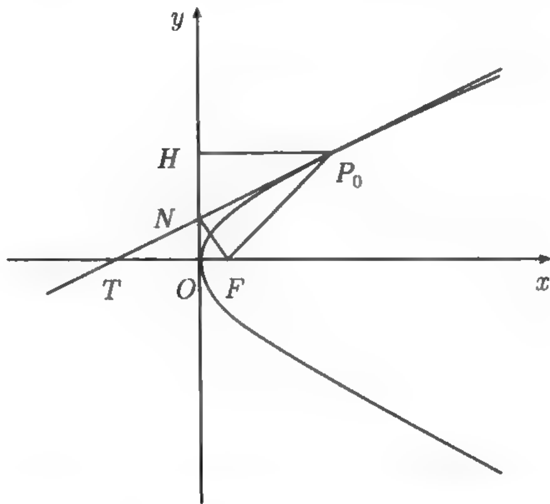


图 2.2.7　抛物线的焦点与切线的性质

定理 2.2.6(焦点和切线的 Apollonius 定理) 设 F', F 是有心二次曲线的焦点. 若 $T'T$ 为过曲线上一点 P_0 的切线, 则 $T'T$ 平分 $\angle F'P_0F$ 或其邻补角.

证明 如图 2.2.8 所示. 不妨设椭圆的方程为 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, 焦点的坐标为 $F'(-c, 0), F(c, 0)$, 切点的坐标为 $P_0(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$. 于是切线 $T'T$ 的方程为

$$x\cos\alpha/a + y\sin\alpha/b = 1,$$

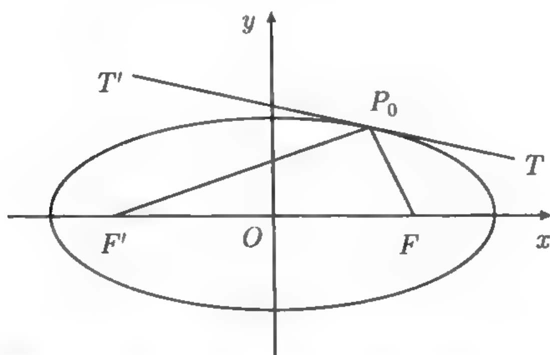


图 2.2.8 椭圆上任意一点的切线与其焦点的 Apollonius 定理

所以

$$x = a(b - y\sin\alpha)/b\cos\alpha.$$

P_0F' 的方程为

$$b\sin\alpha \cdot x - (c + a\cos\alpha)y + bc\sin\alpha = 0,$$

P_0F 的方程为

$$b\sin\alpha \cdot x + (c - a\cos\alpha)y - bc\sin\alpha = 0.$$

设 $P(x, y)$ 是切线 $T'T$ 上的任意一点, 则

$$\begin{aligned}
D_{P-P_0F'} &= \frac{b\sin\alpha \cdot x - (c + a\cos\alpha)y + bc\sin\alpha}{\sqrt{b^2\sin^2\alpha + (c + a\cos\alpha)^2}} \\
&= \frac{\sin\alpha \cdot a(b - \sin\alpha \cdot y)/\cos\alpha - (c + a\cos\alpha)y + bc\sin\alpha}{\sqrt{b^2\sin^2\alpha + a^2 - b^2 + 2ca\cos\alpha + a^25\cos^2\alpha}} \\
&= \frac{b\sin\alpha \cdot (a + c\cos\alpha) - (a + c\cos\alpha)y}{\cos\alpha\sqrt{c^2\cos^2\alpha + 2ca\cos\alpha + a^2}} = \frac{b\sin\alpha - y}{\cos\alpha}, \\
D_{P-P_0F} &= \frac{b\sin\alpha \cdot x + (c - a\cos\alpha)y - bc\sin\alpha}{\sqrt{b^2\sin^2\alpha + (c - a\cos\alpha)^2}} \\
&= \frac{\sin\alpha \cdot a(b - \sin\alpha \cdot y)/\cos\alpha + (c - a\cos\alpha)y - bc\sin\alpha}{\sqrt{b^2\sin^2\alpha + a^2 - b^2 - 2ca\cos\alpha + a^2\cos^2\alpha}} \\
&= \frac{b\sin\alpha \cdot (a - c\cos\alpha) - (a - c\cos\alpha)y}{\cos\alpha\sqrt{c^2\cos^2\alpha - 2ca\cos\alpha + a^2}} = \frac{b\sin\alpha - y}{\cos\alpha},
\end{aligned}$$

所以 $D_{P-P_0F'} = D_{P-P_0F}$, 从而 $T'T$ 平分 $\angle F'P_0F$ 或其邻补角.

类似地, 可以证明双曲线的情形.

定理 2.2.7(Zerr 定理)　设 $P'P$ 是过抛物线焦点的弦, $PQ, P'Q'$ 分别是过 P, P' 的法线弦, 则 $QQ'//P'P$, 且 $d_{QQ'} = 3d_{P'P}$.

证明　如图 2.2.9 所示. 设抛物线的方程为 $y^2 = 4px$, 则焦点为 $F(p, 0)$. 又设 P, P' 的坐标分别为 $(pt^2, 2pt), (pt'^2, 2pt')$, 则由 P, P', F 三点共线得

$$\begin{vmatrix} pt^2 & 2pt & 1 \\ pt'^2 & 2pt' & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

解得 $t' = -1/t$. 于是 P' 的坐标为 $(p/t^2, -2p/t)$.

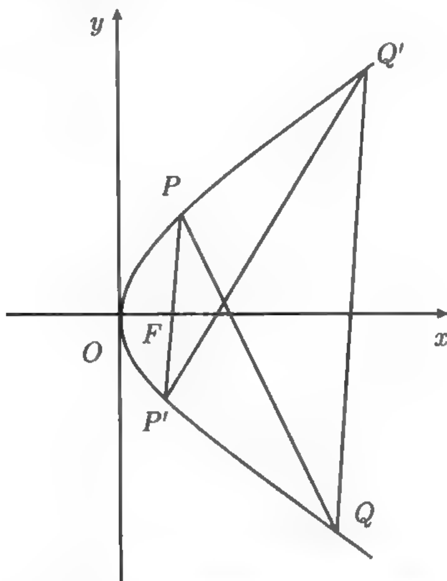


图 2.2.9　抛物线的 Zerr 定理

过 P 点的切线方程为 $2pty = 2p(x + pt^2)$, 于是求得过 P 点的法线方程为 $y - 2pt = -t(x - pt^2)$. 解方程组

$$\begin{cases} y - 2pt = -t(x - pt^2), \\ y^2 = 4px, \end{cases}$$

求得该法线与抛物线的另一个交点 $Q(p(t + 2/t)^2, -2p(t + 2/t))$.

类似地可以求得过 P' 点的切线方程 $y - 2pt' = -t'(x - pt'^2)$, 以及该法线与抛物线的另一个交点 $Q'(p(t' + 2/t')^2, -2p(t' + 2/t')) = Q'(p(2t + 1/t)^2, 2p(2t + 1/t))$.

直线 QQ' 的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p(t + 2/t)^2 & -2p(t + 2/t) & 1 \\ p(2t + 1/t)^2 & 2p(2t + 1/t) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$-6(t+1/t)x+3(t^2-1/t^2)y-2p(t+2/t)(2t+1/t)(t-1/t)=0.$$

于是

$$d_{Q'Q}D_{P-Q'Q}=-6p(t+1/t)t^2+6p(t^2-1/t^2)t-2p(t+2/t)(2t+1/t)(t-1/t),$$

$$d_{Q'Q}D_{P-Q'Q}=-6p(t+1/t)/t^2-6p(t^2-1/t^2)/t-2p(t+2/t)(2t+1/t)(t-1/t).$$

容易验证 $d_{Q'Q}D_{P-Q'Q}=d_{Q'Q}D_{P'-Q'Q}$, 从而 $D_{P-Q'Q}=D_{P'-Q'Q}$, 所以 $QQ'//P'P$.

2.3 二次曲线外切多角形中有向距离的定值定理

在文献 [3] 中, 给出了圆外切多角形的两个结论: ①设 S 是 $2n$ 角形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的内切圆, l 是 S 的任一切线, 则从该 $2n$ 角形的偶数编号的顶点到 l 的距离的乘积等于从该 $2n$ 角形的奇数编号的顶点到 l 的距离的乘积; ②设 S 是 $2n$ 角形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的内切圆,l 是 S 的任一切线, 则从该 $2n$ 角形的偶数编号的顶点到 l 的距离的乘积等于从该 $2n$ 角形的奇数编号的顶点到 l 的距离的乘积.

本节利用有向距离定值法, 探讨二次曲线外切多角形中有关的问题. 先介绍二次曲线外切多角形的概念, 再依次得出各类二次曲线外切多角形及圆锥曲线外切多角形中有向距离的几个定值定理. 我们发现, 文献 [3] 中的两个结论仅对抛物线外切多边形成立, 对圆外切多边形并不成立.

2.3.1 二次曲线外切多角形的概念

在直角坐标系中, 含 x,y 的二次方程所表示的曲线称为二次曲线. 非退化二次曲线包括椭圆、双曲线和抛物线. 多角形是由线段首尾相连所构成的封闭的图形. 二次曲线的外切多角形是各边或边的延长线都与二次曲线相切的多角形. 如图 2.3.1 所示.

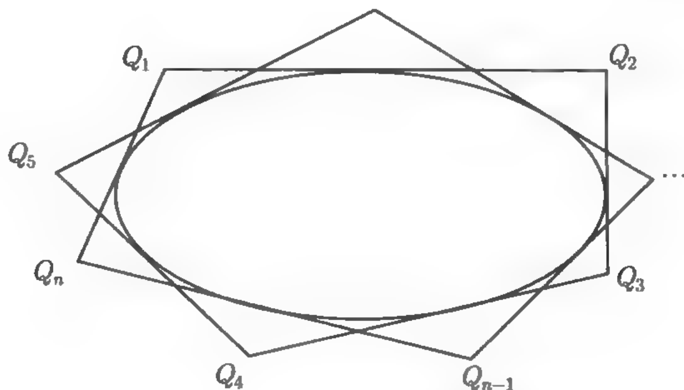


图 2.3.1 二次曲线外切多角形

2.3.2　椭圆类二次曲线外切多角形中有向距离的定值定理

定理 2.3.1　设 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 是椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的外切多角形,Q_iQ_{i+1} 所在直线与椭圆的切点为 $P_i(a\cos\alpha_i, b\sin\alpha_i)(i=1,2,\cdots,n)$, l 是椭圆任一切线, 则

$$\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}D_{Q_i-l}-\prod_{i=1}^{n}D_{P_i-l}=0(\text{为定值}).\tag{2.3.1}$$

证明　设 l 与椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的切点为 $P(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, 于是 l 的方程为

$$\frac{\cos\alpha}{a}x+\frac{\sin\alpha}{b}y=1,$$

即

$$b\cos\alpha\cdot x+a\sin\alpha\cdot y-ab=0.$$

由 $Q_{i+n-1}Q_i$ 的直线方程

$$b\cos\alpha_{i+n-1}\cdot x+a\sin\alpha_{i+n-1}\cdot y=ab$$

和 Q_iQ_{i+1} 的直线方程

$$b\cos\alpha_i\cdot x+a\sin\alpha_i\cdot y=ab$$

求得 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{a\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}},\frac{b\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}}\right)(i=1,2,\cdots,n).$$

于是

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}D_{Q_i-l}\\
=&\prod_{i=1}^{n}\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}}\\
&\cdot\left(\cos\alpha\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}-\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}\right)\\
=&\prod_{i=1}^{n}\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}}\left[\cos\left(\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}-\alpha\right)-\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}\right]\\
=&\prod_{i=1}^{n}\frac{-2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}}\sin\frac{\alpha_i-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha}{2}\\
=&\left(\frac{-2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}}\right)^n\prod_{i=1}^{n}\sin^2\frac{\alpha_i-\alpha}{2},
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} D_{P_i-l} &= \prod_{i=1}^{n} \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}(\cos\alpha\cos\alpha_i + \sin\alpha\sin\alpha_i - 1)\\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}[\cos(\alpha_i - \alpha) - 1]\\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{-2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}\sin^2\frac{\alpha_i - \alpha}{2}\\ &= \left(\frac{-2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}\right)^n \prod_{i=1}^{n}\sin^2\frac{\alpha_i - \alpha}{2},\end{aligned}$$

所以式 (2.3.1) 成立.

注 2.3.1 根据定理 2.3.1 可知, 文献 [3] 中关于圆的结论 (1) 有误.

定理 2.3.2 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n}$ 是椭圆 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ 的外切多角形,Q_iQ_{i+1} 所在直线与椭圆的切点为 $P_i(a\cos\alpha_i, b\sin\alpha_i)(i = 1, 2, \cdots, 2n)$, l 是椭圆任一切线, 则

$$\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_{2i} - \alpha_{2i+2n-1}}{2}D_{Q_{2i}-l} - \prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_{2i-1} - \alpha_{2i+2n-2}}{2}D_{Q_{2i-1}-l} = 0(\text{为定值}). \tag{2.3.2}$$

证明 由定理 2.3.1 证明可知

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_{2i} - \alpha_{2i+2n-1}}{2}D_{Q_{2i}-l}\\ =&\prod_{i=1}^{n}\frac{-2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}\sin\frac{\alpha_{2i} - \alpha}{2}\sin\frac{\alpha_{2i+2n-1} - \alpha}{2}\\ =&\left(\frac{-2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}\right)^n\prod_{i=1}^{2n}\sin\frac{\alpha_i - \alpha}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_{2i-1} - \alpha_{2i+2n-2}}{2}D_{Q_{2i-1}-l}\\ =&\prod_{i=1}^{n}\frac{-2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}\sin\frac{\alpha_{2i-1} - \alpha}{2}\sin\frac{\alpha_{2i+2n-2} - \alpha}{2}\\ =&\left(\frac{-2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}\right)^n\prod_{i=1}^{2n}\sin\frac{\alpha_i - \alpha}{2},\end{aligned}$$

所以式 (2.3.2) 成立.

注 2.3.2 根据定理 2.3.2 可知, 文献 [3] 中关于圆的结论 (2) 有误.

2.3.3　双曲类二次曲线外切多角形中有向距离的定值定理

定理 2.3.3　设 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 是双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 的外切多角形,Q_iQ_{i+1} 所在直线与双曲线的切点为 $P_i(a\sec\alpha_i, b\tan\alpha_i)(i=1,2,\cdots,n)$, l 是双曲线的任一切线, 则

$$\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}D_{Q_i-l}-\prod_{i=1}^{n}\cos\alpha_i D_{P_i-l}=0(\text{为定值}). \tag{2.3.3}$$

证明　设 l 与双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 的切点为 $P(a\sec\alpha, b\tan\alpha)$, 于是 l 的方程为

$$\frac{\sec\alpha}{a}x-\frac{\tan}{b}y=1,$$

即

$$b\sec\alpha\cdot x-a\tan\alpha\cdot y-ab=0.$$

由 $Q_{i+n-1}Q_i$ 的直线方程

$$b\sec\alpha_{i+n-1}\cdot x-a\tan\alpha_{i+n-1}y=ab$$

和 Q_iQ_{i+1} 的直线方程

$$b\sec\alpha_i\cdot x-a\tan\alpha_i\cdot y=ab$$

求得 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{a\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}},\frac{b\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}}\right)\ (i=1,2,\cdots,n).$$

于是

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}D_{Q_i-l}\\
=&\prod_{i=1}^{n}\frac{ab}{\sqrt{b^2\sec^2\alpha+a^2\tan^2\alpha}}\left(\sec\alpha\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}\right.\\
&\left.+\tan\alpha\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}-\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}\right)\\
=&\prod_{i=1}^{n}\frac{ab\sec\alpha}{\sqrt{b^2\sec^2\alpha+a^2\tan^2\alpha}}\left[\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}-\cos\left(\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}-\alpha\right)\right]\\
=&\prod_{i=1}^{n}\frac{2ab\sec\alpha}{\sqrt{b^2\sec^2\alpha+a^2\tan^2\alpha}}\sin\frac{\alpha_i-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha}{2}\\
=&\left(\frac{2ab\sec\alpha}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}}\right)^n\prod_{i=1}^{n}\sin^2\frac{\alpha_i-\alpha}{2},
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\cos\alpha_i D_{P_i-l}&=\prod_{i=1}^{n}\frac{ab}{\sqrt{b^2\sec^2\alpha+a^2\tan^2\alpha}}(\sec\alpha-\tan\alpha\sin\alpha_i-\cos\alpha_i)\\&=\prod_{i=1}^{n}\frac{ab\sec\alpha}{\sqrt{b^2\sec^2\alpha+a^2\tan^2\alpha}}[1-\cos(\alpha_i-\alpha)]\\&=\prod_{i=1}^{n}\frac{2ab\sec\alpha}{\sqrt{b^2\sec^2\alpha+a^2\tan^2\alpha}}\sin^2\frac{\alpha_i-\alpha}{2}\\&=\left(\frac{2ab\sec\alpha}{\sqrt{b^2\sec^2\alpha+a^2\tan^2\alpha}}\right)^n\prod_{i=1}^{n}\sin^2\frac{\alpha_i-\alpha}{2},\end{aligned}$$

所以式 (2.3.3) 成立.

定理 2.3.4 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n}$ 是双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 的外切多角形,Q_iQ_{i+1} 所在直线与双曲线的切点为 $P_i(a\sec\alpha_i,b\tan\alpha_i)(i=1,2,\cdots,n)$, l 是双曲线的任一切线, 则

$$\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_{2i}+\alpha_{2i+2n-1}}{2}D_{Q_{2i}-l}-\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_{2i-1}+\alpha_{2i+2n-2}}{2}D_{Q_{2i-1}-l}=0(\text{为定值}).\tag{2.3.4}$$

证明 由定理 2.3.3 证明可知

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_{2i}+\alpha_{2i+2n-1}}{2}D_{Q_{2i}-l}\\=&\prod_{i=1}^{n}\frac{2ab\sec\alpha}{\sqrt{b^2\sec^2\alpha+a^2\tan^2\alpha}}\sin\frac{\alpha_{2i}-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_{2i+2n-1}-\alpha}{2}\\=&\left(\frac{2ab\sec\alpha}{\sqrt{b^2\sec^2\alpha+a^2\tan^2\alpha}}\right)^n\prod_{i=1}^{2n}\sin\frac{\alpha_i-\alpha}{2},\\&\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha_{2i-1}+\alpha_{2i+2n-2}}{2}D_{Q_{2i-1}-l}\\=&\prod_{i=1}^{n}\frac{2ab\sec\alpha}{\sqrt{b^2\sec^2\alpha+a^2\tan^2\alpha}}\sin\frac{\alpha_{2i-1}-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_{2i+2n-2}-\alpha}{2}\\=&\left(\frac{2ab\sec\alpha}{\sqrt{b^2\sec^2\alpha+a^2\tan^2\alpha}}\right)^n\prod_{i=1}^{2n}\sin\frac{\alpha_i-\alpha}{2},\end{aligned}$$

所以式 (2.3.4) 成立.

2.3.4 抛物类二次曲线外切多角形中有向距离的定值定理

定理 2.3.5 设 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 是抛物线的外切多角形,Q_iQ_{i+1} 所在直线与抛物

线的切点为 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$, l 是抛物线的任一切线, 则

$$\prod_{i=1}^{n} D_{Q_i-l}-\prod_{i=1}^{n} D_{P_i-l}=0(\text{为定值}). \tag{2.3.5}$$

证明　不妨设抛物线的方程为 $x^2=2py$, Q_iQ_{i+1} 所在直线与抛物线的切点的坐标为 $P_i(2pt_i,2pt_i^2)(i=1,2,\cdots,n)$, l 与抛物线 $x^2=2py$ 的切点的坐标为 $P(2pt,2pt^2)$, 于是 l 的方程为

$$2ptx=2p\frac{y+2pt^2}{2},$$

即

$$2ptx-y-2pt^2=0.$$

由 $Q_{i+n-1}Q_i$ 的直线方程

$$2pt_{i+n-1}x-y=2pt_{i+n-1}^2$$

和 Q_iQ_{i+1} 的直线方程

$$2pt_ix-y=2pt_i^2$$

求得 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 顶点的坐标

$$Q_i\left(p(t_i+t_{i+n-1}),2pt_it_{i+n-1},\right)\ (i=1,2,\cdots,n).$$

于是

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} D_{Q_i-l}&=\prod_{i=1}^{n}\frac{2p}{\sqrt{1+4t^2}}[t(t_i+t_{i+n-1})-t_it_{i+n-1}-t^2]\\&=\prod_{i=1}^{n}\frac{-2p}{\sqrt{1+4t^2}}(t-t_i)(t-t_{i+n-1})=\left(\frac{-2p}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(t-t_i)^2,\end{aligned}$$

又

$$\prod_{i=1}^{n} D_{P_i-l}=\prod_{i=1}^{n}\frac{2p}{\sqrt{1+4t^2}}(2tt_i-t_i^2-t^2)=\left(\frac{-2p}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(t-t_i)^2,$$

所以式 (2.3.5) 成立.

定理 2.3.6　设 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 是抛物线的外切多角形,Q_iQ_{i+1} 所在直线与抛物线的切点为 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$, l 是抛物线的任一切线, 则

$$\prod_{i=1}^{n} D_{Q_{2i}-l}-\prod_{i=1}^{n} D_{Q_{2i-1}-l}=0(\text{为定值}). \tag{2.3.6}$$

证明 不妨设抛物线的方程、Q_iQ_{i+1} 所在直线与抛物线切点的坐标和 l 与抛物线的切点的坐标均如定理 2.3.5, 由定理 2.3.5 证明可知

$$\prod_{i=1}^{n} D_{Q_{2i}-l}=\prod_{i=1}^{n}\frac{-2p}{\sqrt{1+4t^2}}(t-t_{2i})(t-t_{2i+2n-1})=\left(\frac{-2p}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^n\prod_{i=1}^{2n}(t-t_i),$$

$$\prod_{i=1}^{n} D_{Q_{2i-1}-l}=\prod_{i=1}^{n}\frac{-2p}{\sqrt{1+4t^2}}(t-t_{2i-1})(t-t_{2i+2n-2})=\left(\frac{-2p}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^n\prod_{i=1}^{2n}(t-t_i).$$

所以式 (2.3.6) 成立.

2.3.5 圆锥曲线外切多角形中有向距离的定值定理

定理 2.3.7 设$Q_1Q_2\cdots Q_n$ 是圆锥曲线 $\rho=\dfrac{a}{1-e\cos\alpha}(a>0,e\geqslant 0)$ 的外切多角形,Q_iQ_{i+1} 所在直线与圆锥曲线的切点为 $P_i\left(\dfrac{a\cos\alpha_i}{1-e\cos\alpha_i},\dfrac{b\sin\alpha_i}{1-e\cos\alpha_i}\right)(i=1,2,\cdots,n)$, l 是圆锥曲线的任一切线, 则

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{n}\left(\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}-e\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}\right)D_{Q_i-l}\\&-\prod_{i=1}^{n}(1-e\cos\alpha_i)D_{P_i-l}=0(\text{为定值}).\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

证明 设 l 圆锥曲线 $\rho=\dfrac{a}{1-e\cos\alpha}(a>0,e\geqslant 0)$ 的切点为 $P\left(\dfrac{a\cos\alpha}{1-e\cos\alpha},\dfrac{b\sin\alpha}{1-e\cos\alpha}\right)$, 于是 l 的斜率为

$$y'_x=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{a\sin\theta}{1-e\cos\theta}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{a\cos\theta}{1-e\cos\theta}\right)}=\frac{\dfrac{a\cos\theta(1-e\cos\theta)-a\sin\theta\cdot e\sin\theta}{(1-e\cos\theta)^2}}{\dfrac{-a\sin\theta(1-e\cos\theta)-a\cos\theta\cdot e\sin\theta}{(1-e\cos\theta)^2}}=\frac{e-\cos\theta}{\sin\theta},$$

于是 l 的方程为

$$y-\frac{a\sin\alpha}{1-e\cos\alpha}=\frac{e-\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(x-\frac{a\cos\alpha}{1-e\cos\alpha}\right),$$

即

$$(\cos\alpha-e)x+\sin\alpha\cdot y-a=0.$$

由 $Q_{i+n-1}Q_i$ 的直线方程

$$(\cos\theta_{i+n-1}-e)x+\sin\theta_{i+n-1}\cdot y=a$$

和 Q_iQ_{i+1} 的直线方程

$$(\cos\theta_i - e)\cdot x + \sin\theta_i \cdot y = a$$

求得 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{a\cos\dfrac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}}{\cos\dfrac{\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2}-e\cos\dfrac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}},\frac{a\sin\dfrac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}}{\cos\dfrac{\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2}-e\cos\dfrac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}}\right)$$

$$(i=1,2,\cdots,n).$$

于是

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n}\left(\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+n-1}}{2}-e\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+n-1}}{2}\right)D_{Q_i-l}\\
=&\prod_{i=1}^{n}\frac{a}{\sqrt{(\cos\alpha-e)^2+\sin^2\alpha}}\left[(\cos\alpha-e)\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}-\sin\alpha\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}\right.\\
&\left.-\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}+e\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}\right]\\
=&\prod_{i=1}^{n}\frac{a}{\sqrt{1-2e\cos\alpha+e^2}}\left[\cos\left(\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}-\alpha\right)-e\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}\right]\\
=&\prod_{i=1}^{n}\frac{-2a}{\sqrt{1-2e\cos\alpha+e^2}}\sin\frac{\alpha_i-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha}{2}\\
=&\left(\frac{-2a}{\sqrt{1-2e\cos\alpha+e^2}}\right)^n\prod_{i=1}^{n}\sin^2\frac{\alpha_i-\alpha}{2},
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n}(1-e\cos\alpha_i)D_{P_i-l}\\
=&\prod_{i=1}^{n}\frac{a}{\sqrt{1-2e\cos\alpha+e^2}}[(\cos\alpha-e)\cos\alpha_i+\sin\alpha\sin\alpha_i-1+e\cos\alpha_i]\\
=&\prod_{i=1}^{n}\frac{a}{\sqrt{1-2e\cos\alpha+e^2}}[\cos(\alpha_i-\alpha)-1]=\prod_{i=1}^{n}\frac{-2a}{\sqrt{1-2e\cos\alpha+e^2}}\sin^2\frac{\alpha_i-\alpha}{2}\\
=&\left(\frac{-2a}{\sqrt{1-2e\cos\alpha+e^2}}\right)^n\prod_{i=1}^{n}\sin^2\frac{\alpha_i-\alpha}{2},
\end{aligned}$$

所以式 (2.3.7) 成立.

定理 2.3.8 $Q_1Q_2\cdots Q_n$是圆锥曲线 $\rho=\dfrac{a}{1-e\cos\alpha}(a>0,e\geqslant 0)$ 的外切多角形,Q_iQ_{i+1} 所在直线与圆锥曲线的切点为 $P_i\left(\dfrac{a\cos\alpha_i}{1-e\cos\alpha_i},\dfrac{b\sin\alpha_i}{1-e\cos\alpha_i}\right)(i=1,2,\cdots,n)$,$l$ 是圆锥曲线的任一切线, 则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\cos\frac{\theta_{2i}-\theta_{2i+2n-1}}{2}-e\cos\frac{\theta_{2i}+\theta_{2i+2n-1}}{2}\right)D_{Q_{2i}-l}$$
$$-\prod_{i=1}^{n}\left(\cos\frac{\theta_{2i-1}-\theta_{2i+2n-2}}{2}-e\cos\frac{\theta_{2i-1}+\theta_{2i+2n-2}}{2}\right)D_{Q_{2i-1}-l}=0(\text{为定值}).\quad(2.3.8)$$

证明 由定理 2.3.7 证明可知

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{n}\left(\cos\frac{\theta_{2i}-\theta_{2i+2n-1}}{2}-e\cos\frac{\theta_{2i}+\theta_{2i+2n-1}}{2}\right)D_{Q_{2i}-l}\\&=\prod_{i=1}^{n}\frac{-2a}{\sqrt{1-2e\cos\alpha+e^2}}\sin\frac{\alpha_{2i}-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_{2i+2n-1}-\alpha}{2}\\&=\left(\frac{-2a}{\sqrt{1-2e\cos\alpha+e^2}}\right)^n\prod_{i=1}^{2n}\sin\frac{\alpha_i-\alpha}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{n}\left(\cos\frac{\theta_{2i-1}-\theta_{2i+2n-2}}{2}-e\cos\frac{\theta_{2i-1}+\theta_{2i+2n-2}}{2}\right)D_{Q_{2i-1}-l}\\&=\prod_{i=1}^{n}\frac{-2a}{\sqrt{1-2e\cos\alpha+e^2}}\sin\frac{\alpha_{2i-1}-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_{2i+2n-2}-\alpha}{2}\\&=\left(\frac{-2a}{\sqrt{1-2e\cos\alpha+e^2}}\right)^n\prod_{i=1}^{2n}\sin\frac{\alpha_i-\alpha}{2},\end{aligned}$$

所以式 (2.3.8) 成立.

第 3 章　二次曲线中有向距离的定值定理及其应用

3.1　二次曲线中有向距离的定值定理及其应用

众所周知, 配极定理是配极理论中重要的定理, 它在几何证明和实际问题中应用广泛. 本节主要利用有向距离定值方法研究有关问题, 分别得到 "过椭圆、双曲线和抛物线上不同四点的六条割线中, 如果有两条割线相交于椭圆、双曲线和抛物线对称轴上一点, 那么其余两对割线的交点到其对称轴的有向距离恒为定值" 的结论, 并据此导出椭圆、双曲线和抛物线的有关结论, 以及圆的配极定理, 并讨论圆的配极理论的一些应用.

3.1.1　椭圆中有向距离的定值定理及其应用

定理 3.1.1　自 x 轴 (或 y 轴) 上一点 $(c,0)$(或 $(0,c)$) 任意作两条直线, 分别与椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 相交于 A_1,A_2 和 B_1,B_2. ①若 $c\neq 0$, 则直线 A_1B_2 与 A_2B_1 的交点及直线 A_1B_1 与 A_2B_2 的交点到 $x=0$(或 $y=0$) 的有向距离均恒为定值 a^2/c(或 b^2/c); ②若 $c=0$, 则直线 A_1B_2 与 A_2B_1 及直线 A_1B_1 与 A_2B_2 均相交于无穷远点, 即弦 A_1B_2 与 A_2B_1 及弦 A_1B_1 与 A_2B_2 均平行.

证明　如图 3.1.1 所示. 只证明自 x 轴上一点 $(c,0)$ 任意作两条直线的情形. 不妨设两直线的方程分别为

$$L_i: x=c+l_it,\quad y=m_it(\text{其中}l_i,m_i\text{不全为零};i=1,2).$$

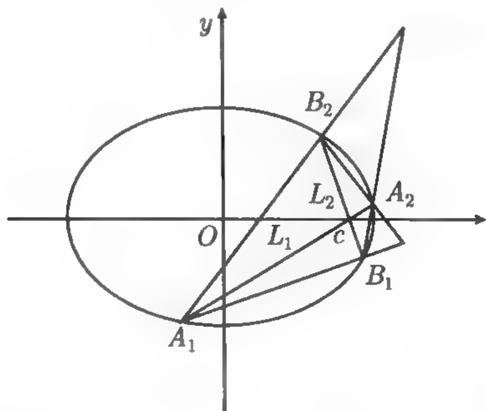


图 3.1.1　x 轴上一点的椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的两割线端点连线交点坐标的定值性

记 $S_1=b^2l_1^2+a^2m_1^2, S_2=b^2l_2^2+a^2m_2^2$, 将 $L_1: x=c+l_1t, y=m_1t$ 代入椭圆方程 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, 并化简得

$$(b^2l_1^2+a^2m_1^2)t^2+2b^2cl_1t+b^2(c^2-a^2)=0,$$

解得

$$t_1=\frac{-b^2cl_1+ab\sqrt{S_1-m_1^2c^2}}{S_1},\quad t_2=\frac{-b^2cl_1-ab\sqrt{S_1-m_1^2c^2}}{S_1},$$

所以 L_1 与椭圆的交点为 $A_i(c+l_1t_i,m_1t_i)(i=1,2)$.

同理由

$$(b^2l_2^2+a^2m_2^2)t^2+2b^2cl_2t+b^2(c^2-a^2)=0,$$

求得

$$t_1'=\frac{-b^2cl_2+ab\sqrt{S_2-m_2^2c^2}}{S_2},\quad t_2'=\frac{-b^2cl_2-ab\sqrt{S_2-m_2^2c^2}}{S_2},$$

所以 L_2 与圆交点的坐标为

$$B_i(c+l_2t_i',m_2t_i')(i=1,2).$$

A_1B_2 的方程为

$$(m_2t_2'-m_1t_1)x+(l_1t_1-l_2t_2')y=(l_1m_2-l_2m_1)t_1t_2'+c(m_2t_2'-m_1t_1),\qquad(3.1.1)$$

A_2B_1 的方程为

$$(m_2t_1'-m_1t_2)x+(l_1t_2-l_2t_1')y=(l_1m_2-l_2m_1)t_1't_2+c(m_2t_1'-m_1t_2),\qquad(3.1.2)$$

(3.1.1) 和 (3.1.2) 两式联立, 解得

$$\delta=\begin{vmatrix}m_2t_2'-m_1t_1 & l_1t_1-l_2t_2'\\ m_2t_1'-m_1t_2 & l_1t_2-l_2t_1'\end{vmatrix}=(l_1m_2-l_2m_1)(t_2t_2'-t_1t_1'),$$

$$\begin{aligned}\delta_x=&\begin{vmatrix}(l_1m_2-l_2m_1)t_1t_2'+c(m_2t_2'-m_1t_1) & l_1t_1-l_2t_2'\\ (l_1m_2-l_2m_1)t_2t_1'+c(m_2t_1'-m_1t_2) & l_1t_2-l_2t_1'\end{vmatrix}\\ =&(l_1m_2-l_2m_1)[l_1t_1t_2(t_2'-t_1')+l_2t_1't_2'(t_2-t_1)+c(t_2t_2'-t_1t_1')].\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}t_1t_2=&b^2(c^2-a^2)/S_1,\quad t_1't_2'=b^2(c^2-a^2)/S_2;\\ t_2-t_1=&\frac{-2ab\sqrt{S_1-m_1^2c^2}}{S_1},\quad t_2'-t_1'=\frac{-2ab\sqrt{S_2-m_2^2c^2}}{S_2};\\ t_2t_2'-t_1t_1'=&t_2(t_2'+t_1')-t_1'(t_2+t_1)\\ =&-\frac{b^2cl_1+ab\sqrt{S_1-m_1^2c^2}}{S_1}\cdot\frac{-2b^2cl_2}{S_2}\end{aligned}$$

$$-\frac{-b^2cl_2+ab\sqrt{S_2-m_2^2c^2}}{S_2}\cdot\frac{-2b^2cl_1}{S_1}$$
$$=\frac{2ab^3c}{S_1S_2}(l_1\sqrt{S_2-m_2^2c^2}+l_2\sqrt{S_1-m_1^2c^2}),$$

所以

(1) 当 $c\neq 0$ 时, $\delta\neq 0$, 两直线有唯一解, 且交点的横坐标为

$$\begin{aligned}x=&\frac{\delta_x}{\delta}=\frac{l_1t_1t_2(t_2'-t_1')+l_2t_1't_2'(t_2-t_1)}{t_2t_2'-t_1t_1'}+c\\=&\frac{l_1\cdot\dfrac{b^2(a^2-c^2)}{S_1}\cdot\dfrac{-2ab\sqrt{S_2-m_2^2c^2}}{S_2}+l_2\cdot\dfrac{b^2(a^2-c^2)}{S_2}\cdot\dfrac{-2ab\sqrt{S_1-m_1^2c^2}}{S_1}}{\dfrac{2ab^3c}{S_1S_2}(l_1\sqrt{S_2-m_2^2c^2}+l_2\sqrt{S_1-m_1^2c^2})}+c\\=&\frac{a^2-c^2}{c}+c=\frac{a^2}{c}(\text{恒为定值}).\end{aligned}$$

(2) 当 $c=0$ 时, $\delta=0$, 两直线交点的纵坐标为无穷大, 所以直线 A_1B_2 与 A_2B_1 相交于无穷远点, 即弦 A_1B_2 与 A_2B_1 平行.

类似地、可以证明直线 A_1B_1 与 A_2B_2 的情形.

推论 3.1.1 椭圆关于一半轴所在直线上任意一点的极线垂直于这点到椭圆中心的连线, 与连线位于另一半轴的同侧且椭圆中心到极线的距离等于该半轴的平方与椭圆中心到极点的距离之比.

证明 因为经过适当的旋转和平移, 可以把椭圆化为 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的形式, 并把 P 变成 x 或 y 轴上的点. 于是根据定理 3.1.1 即得定理推论 3.1.1.

推论 3.1.2 自 x 轴 (或 y 轴) 上一点 $(c,0)$(或 $(0,c)$) 任意作两条直线, 分别与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相交于 A_1,A_2 和 B_1,B_2. (1) 若 $c\neq 0$, 则直线 A_1B_2 与 A_2B_1 的交点及直线 A_1B_1 与 A_2B_2 的交点到 $x=0$(或 $y=0$) 的有向距离均恒为定值 a^2/c; (2) 若 $c=0$, 则直线 A_1B_2 与 A_2B_1 及直线 A_1B_1 与 A_2B_2 均相交于无穷远点, 即弦 A_1B_2 与 A_2B_1 及弦 A_1B_1 与 A_2B_2 均平行.

证明 在定理 3.1.1 中令 $a=b$ 即得.

3.1.2 圆的配极定理及其应用

定理 3.1.2(圆的配极定理) 设 P 是不在圆 S 上的一点, 过 P 作圆 S 所有可能成对的割线 (切线看成是割线的特殊情形), 它们同 S 的交点分别为 A_1,A_2 和 B_1,B_2, 则直线 A_1B_2 与 A_2B_1 的交点和直线 A_1B_1 与 A_2B_2 的交点恒在一定直线 l 之上.

证明 如图 3.1.2 和图 3.1.3 所示. 因为经过适当的旋转和平移, 可以把 P 变成 x 轴或 y 轴上的点, 同时把 S 的圆心变成坐标原点. 于是根据推论 3.1.2 即得.

定义 3.1.1 直线 l 称为点 P 关于圆 S 的配极直线, 而 P 称为直线 l 关于圆 S 的配极点.

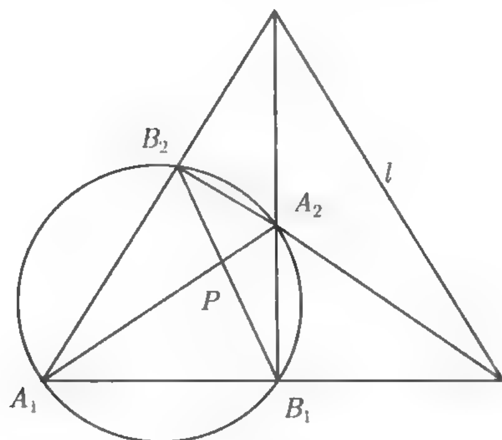


图 3.1.2 圆内点的配极直线

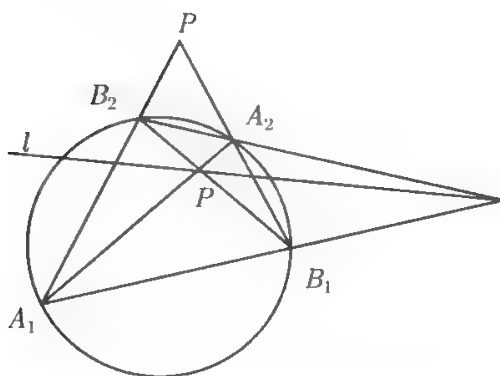


图 3.1.3 圆外点的配极直线

推论 3.1.3(第 12 届中国中学生数学冬令营试题) 设 $P_1P_2P_3P_4$ 是圆 S 的内接四边形, 其边 P_1P_2 与 P_3P_4 的延长线相交于点 P, P_2P_3 与 P_4P_1 的延长线相交于点 Q, 过 Q 作圆 S 的两条切线, 切点分别为 Q_1, Q_2, 求证: P, Q_1, Q_2 三点共线.

证明由定理 3.1.2 即得.

定理 3.1.3 圆关于平面任意一点 P 的极线垂直于这点到圆心的连线, 与连线位于平行于极线的半径的同侧且圆心到极线的距离等于圆半径的平方与圆中心到极点的距离之比.

证明 经过适当的旋转和平移, 可以把圆化为 $x^2+y^2=a^2$ 的形式, 并把 P 变成 y 轴上的点. 于是根据推论 3.1.2 和定理 3.1.2 即得.

推论 3.1.4 设从半径为 1 的圆 S 的中心 O 到一点 A 的距离为 d, 则从 O 到 A 关于圆 S 的极线 l_A 的距离等于 $1/d$.

证明 在定理 3.1.1 中令 $a=b=1, c=d$, 再根据定理 3.1.3 即得.

推论 3.1.5 设 $P_1P_2P_3P_4$ 是圆 S 的内接 (外切) 四边形, 证明: 从 S 的中心

到四边形两组对边交点的连线的垂线经过它的对角线的交点.

证明　如图 3.1.4 所示. 设圆 S 的中心为 O, 四边形两组对边 P_1P_2, P_3P_4 和 P_2P_3, P_4P_1 的交点分别为 E, F, 对角线 P_1P_3, P_2P_4 的交点为 P, 则由定理 3.1.2 知, P 点的极线是 EF, EF 的极点是 P. 从而 $OP\perp EF$.

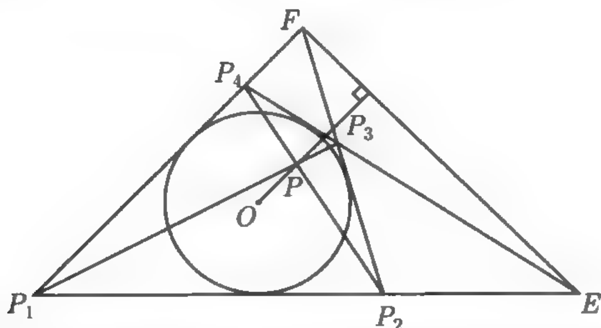


图 3.1.4　圆心到其外切四边形两组对边交点的连线的垂线经过四边形对角线的交点

推论 3.1.6(Salmon 定理)　设 A, B 关于中心在 O 的圆 S 的极线分别为 l_A, l_B, 则

$$d_{OA}/d_{A-l_B} = d_{OB}/d_{B-l_A}. \tag{3.1.3}$$

证明　如图 3.1.5 所示. 设 $OP\perp l_A$ 于 $P, OQ\perp l_B$ 于 Q, S 的半径为 R. 作 $AC\perp OQ$ 于 $C, BD\perp OP$ 于 D, 则直角三角形 AOC 与直角三角形 BOD 相似. 从而

$$d_{OA}/d_{OC} = d_{OB}/d_{OD},$$

$$(d_{O-l_B} - d_{A-l_B})/d_{OA} = (d_{O-l_A} - d_{B-l_A})/d_{OB},$$

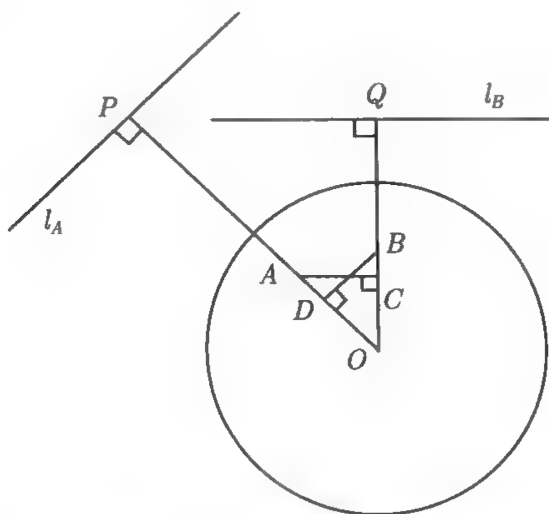


图 3.1.5　圆关于两点的极线距离之间的关系

由定理 3.1.3 得

$$(R^2/d_{OB} - d_{A-l_B})/d_{OA} = (R^2/d_{OA} - d_{B-l_A})/d_{OB}$$

化简得

$$R^2 - d_{OB}d_{A-l_B} = R^2 - d_{OA}d_{B-l_A},$$

$$d_{OB}d_{A-l_B} = d_{OA}d_{B-l_A},$$

从而式 (3.1.3) 成立.

3.1.3 双曲线中有向距离的定值定理及其应用

定理 3.1.4 自 x 轴 (或 y 轴) 上一点 $(c,0)$(或 $(0,c)$) 任意作两条直线, 分别与双曲线 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 相交于 A_1, A_2 和 B_1, B_2. (1) 若 $c \neq 0$, 则直线 A_1B_2 与 A_2B_1 的交点及直线 A_1B_1 与 A_2B_2 的交点到 $x=0$(或 $y=0$) 的有向距离均恒为定值 a^2/c(或 $-b^2/c$); (2) 若 $c=0$, 则直线 A_1B_2 与 A_2B_1 及直线 A_1B_1 与 A_2B_2 均相交于无穷远点, 即弦 A_1B_2 与 A_2B_1 及弦 A_1B_1 与 A_2B_2 均平行.

证明 如图 3.1.6 所示. 只证明自 y 轴上一点 $(0,c)$ 任意作两条直线的情形. 不妨设两直线的方程分别为

$$L_i: x = l_i t, \quad y = c + m_i t (\text{其中} l_i, m_i \text{不全为零}; i = 1, 2).$$

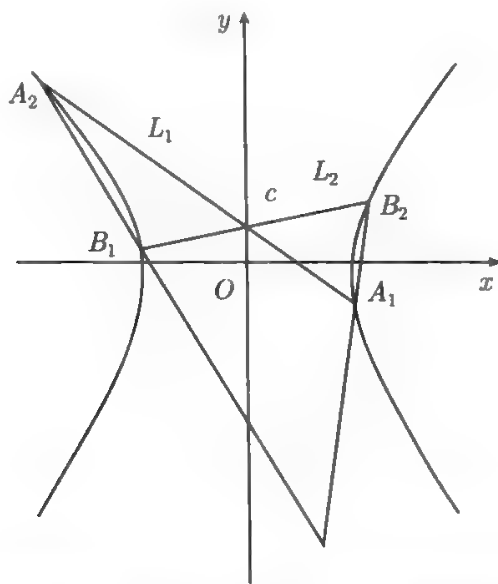


图 3.1.6 y 轴上一点关于双曲线 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 的两割线端点连线交点坐标的定值性

记 $S_1 = b^2l_1^2 - a^2m_1^2, S_2 = b^2l_2^2 - a^2m_2^2$, 将 $L_1: x = l_1t, y = c + m_1t$ 代入双曲线的方程并化简得

$$(b^2l_1^2 - a^2m_1^2)t^2 - 2a^2cm_1t - a^2(b^2 + c^2) = 0,$$

解得

$$t_1 = \frac{a^2cm_1 + ab\sqrt{S_1 + l_1^2c^2}}{S_1}, \quad t_2 = \frac{a^2cm_1 - ab\sqrt{S_1 + l_1^2c^2}}{S_1},$$

所以 L_1 与双曲线的交点为 $A_i(l_1t_i, c+m_1t_i)(i=1,2)$.

同理由

$$(b^2l_2^2-a^2m_2^2)t^2-2a^2cm_2t-a^2(b^2+c^2)=0,$$

求得

$$t_1'=\frac{a^2cm_2+ab\sqrt{S_2+l_1^2c^2}}{S_2},\quad t_2'=\frac{a^2cm_2-ab\sqrt{S_2+l_2^2c^2}}{S_2},$$

所以 L_2 与双曲线交点的坐标为

$$B_i(l_2t_i', c+m_2t_i')(i=1,2).$$

A_1B_2 的方程为

$$(m_2t_2'-m_1t_1)x+(l_1t_1-l_2t_2')y=(l_1m_2-l_2m_1)t_1t_2'+c(l_1t_1-l_2t_2'),\tag{3.1.4}$$

A_2B_1 的方程为

$$(m_2t_1'-m_1t_2)x+(l_1t_2-l_2t_1')y=(l_1m_2-l_2m_1)t_1't_2+c(l_1t_2-l_2t_1'),\tag{3.1.5}$$

(3.1.4) 和 (3.1.5) 两式联立, 解得

$$\delta=\begin{vmatrix} m_2t_2'-m_1t_1 & l_1t_1-l_2t_2' \\ m_2t_1'-m_1t_2 & l_1t_2-l_2t_1' \end{vmatrix}=(l_1m_2-l_2m_1)(t_2t_2'-t_1t_1'),$$

$$\begin{aligned}\delta_y=&\begin{vmatrix} m_2t_2'-m_1t_1 & (l_1m_2-l_2m_1)t_1t_2'+c(l_1t_1-l_2t_2') \\ m_2t_1'-m_1t_2 & (l_1m_2-l_2m_1)t_2t_1'+c(l_1t_2-l_2t_1') \end{vmatrix}\\ =&(l_1m_2-l_2m_1)[m_1t_1t_2(t_2'-t_1')+m_2t_1't_2'(t_2-t_1)+c(t_2t_2'-t_1t_1')].\end{aligned}$$

因为

$$t_1t_2=-a^2(b^2+c^2)/S_1,\quad t_1't_2'=-a^2(b^2+c^2)/S_2;$$

$$t_2-t_1=\frac{-2ab\sqrt{S_1+l_1^2c^2}}{S_1},\quad t_2'-t_1'=\frac{-2ab\sqrt{S_2+l_2^2c^2}}{S_2};$$

$$\begin{aligned}t_2t_2'-t_1t_1'=&t_2(t_2'+t_1')-t_1'(t_2+t_1)\\ =&\frac{a^2cm_1-ab\sqrt{S_1+l_1^2c^2}}{S_1}\cdot\frac{2a^2cm_2}{S_2}\\ &-\frac{a^2cm_2+ab\sqrt{S_2+l_2^2c^2}}{S_2}\cdot\frac{2a^2cm_1}{S_1}\\ =&-\frac{2a^3bc}{S_1S_2}\left(m_1\sqrt{S_2+l_2^2c^2}+m_2\sqrt{S_1+l_1^2c^2}\right),\end{aligned}$$

所以

(1) 当 $c\neq 0$ 时, $\delta\neq 0$, 两直线有唯一解, 且交点的纵坐标为

$$\begin{aligned}y=&\frac{\delta_y}{\delta}=\frac{m_1t_1t_2(t_2'-t_1')+m_2t_1't_2'(t_2-t_1)}{t_2t_2'-t_1t_1'}+c\\=&\frac{m_1\cdot\dfrac{-a^2(b^2+c^2)}{S_1}\cdot\dfrac{-2ab\sqrt{S_2+l_2^2c^2}}{S_2}+m_2\cdot\dfrac{a^2(b^2+c^2)}{S_2}\cdot\dfrac{-2ab\sqrt{S_1+l_1^2c^2}}{S_1}}{-\dfrac{2a^3bc}{S_1S_2}(m_1\sqrt{S_2+l_2^2c^2}+m_2\sqrt{S_1+l_1^2c^2})}+c\\=&-\frac{b^2+c^2}{c}+c=-\frac{b^2}{c}(\text{恒为定值}).\end{aligned}$$

(2) 当 $c=0$ 时, $\delta=0$, 两直线交点的纵坐标为无穷大, 所以直线 A_1B_2 与 A_2B_1 相交于无穷远点, 即弦 A_1B_2 与 A_2B_1 平行.

类似地, 可以证明直线 A_1B_1 与 A_2B_2 的情形.

推论 3.1.7 双曲线关于一半轴所在直线上任意一点的极线垂直于这点到双曲线中心的连线, 极点在正半轴 (虚半轴) 所在直线时与连线位于虚半轴的同侧 (实半轴的异侧) 且双曲线中心到极线的距离等于该半轴的平方与双曲线中心到极点的距离之比.

证明 因为经过适当的旋转和平移, 可以把双曲线化为 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 的形式, 并把 P 变成 x 或 y 轴上的点. 于是根据定理 3.1.4 即得.

3.1.4 抛物线中有向距离的定值定理及其应用

定理 3.1.5 自 y 轴上一点 $(0,c)$ 任意作两条与该轴不对称的直线, 分别与抛物线 $x^2=2py$ 相交于 A_1,A_2 和 B_1,B_2. (1) 若 $c\neq 0$, 则直线 A_1B_2 与 A_2B_1 的交点及直线 A_1B_1 与 A_2B_2 的交点到 $x=0$ 的有向距离均恒为定值 $-c$; (2) 若 $c=0$, 则直线 A_1B_2 与 A_2B_1 或直线 A_1B_1 与 A_2B_2 相交于坐标原点.

证明 如图 3.1.7 所示. 不妨设两直线的方程分别为 $L_i: x=l_it, y=c+m_it$(其中 l_i,m_i 不全为零; $i=1,2$). 将 $L_1: x=l_1t, y=c+m_1t$ 代入抛物线方程 $x^2=2py$, 并化简得

$$l_1^2t^2+2(cl_1-pm_1)t+c^2=0,$$

解得

$$t_1=\frac{pm_1-cl_1+\sqrt{p^2m_1^2-2pcl_1m_1}}{l_1^2},\quad t_2=\frac{pm_1-cl_1-\sqrt{p^2m_1^2-2pcl_1m_1}}{l_1^2},$$

所以 L_1 与抛物线的交点为 $A_i(l_1t_i,c+m_1t_i)(i=1,2)$.

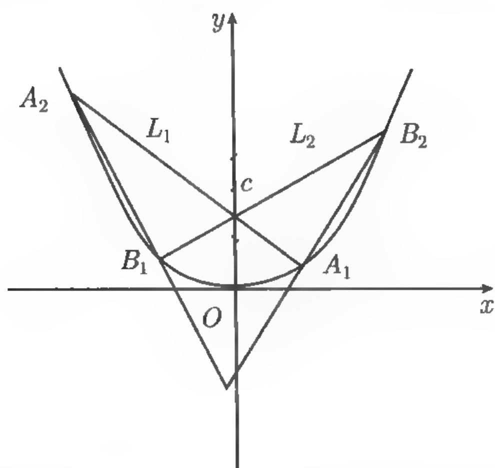


图 3.1.7　y 轴上一点关于抛物线 $x^2=2py$ 两割线端点连线交点坐标的定值性

同理由

$$l_2^2t^2+2(cl_2-pm_2)t+c^2=0,$$

求得

$$t_1'=\frac{pm_2-cl_2+\sqrt{p^2m_2^2-2pcl_2m_2}}{l_2^2},\quad t_2'=\frac{pm_2-cl_2-\sqrt{p^2m_2^2-2pcl_2m_2}}{l_2^2};$$

所以 L_2 与抛物线交点的坐标为

$$B_i(l_2t_i',c+m_2t_i')(i=1,2).$$

A_1B_2 的方程为

$$(m_2t_2'-m_1t_1)x+(l_1t_1-l_2t_2')y=(l_1m_2-l_2m_1)t_1t_2'+c(m_2t_2'-m_1t_1),\tag{3.1.6}$$

A_2B_1 的方程为

$$(m_2t_1'-m_1t_2)x+(l_1t_2-l_2t_1')y=(l_1m_2-l_2m_1)t_1't_2+c(m_2t_1'-m_1t_2),\tag{3.1.7}$$

(3.1.6) 和 (3.1.7) 两式联立, 解得

$$\delta=\begin{vmatrix} m_2t_2'-m_1t_1 & l_1t_1-l_2t_2' \\ m_2t_1'-m_1t_2 & l_1t_2-l_2t_1' \end{vmatrix}=(l_1m_2-l_2m_1)(t_2t_2'-t_1t_1'),$$

$$\begin{aligned}\delta_y=&\begin{vmatrix} m_2t'_2-m_1t_1 & (l_1m_2-l_2m_1)t_1t'_2+c(m_2t'_2-+m_1t_1) \\ m_2t'_1-m_1t_2 & (l_1m_2-l_2m_1)t'_1t_2+c(m_2t'_1-m_1t_2) \end{vmatrix}\\ =&(l_1m_2-l_2m_1)\begin{vmatrix} m_2t_2'-m_1t_1 & t_1t_2' \\ m_2t_1'-m_1t_2 & t_2t_1' \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} m_2t_2'-m_1t_1 & l_1t_1-l_2t_2' \\ m_2t_1'-m_1t_2 & l_1t_2-l_2t_1' \end{vmatrix}\\ =&(l_1m_2-l_2m_1)[m_1t_1t_2(t'_2-t'_1)+m_2t'_1t'_2(t_2-t_1)+c(t_2t'_2-t_1t'_1)].\end{aligned}$$

因为

$$t_1t_2=-2pc/l_1^2,\quad t_1't_2'=-2pc/l_2^2;$$

$$t_2-t_1=\frac{-2\sqrt{p^2m_1^2+2pcl_1^2}}{l_1^2},\quad t_2'-t_1'=\frac{-2\sqrt{p^2m_2^2+2pcl_2^2}}{l_2^2};$$

$$\begin{aligned}t_2t_2'-t_1t_1'=&t_2(t_2'+t_1')-t_1'(t_2+t_1)\\=&\frac{pm_1-\sqrt{p^2m_1^2+2pcl_1^2}}{l_1^2}\cdot\frac{2pm_2}{l_2^2}-\frac{pm_2+\sqrt{p^2m_2^2+2pcl_2^2}}{l_2^2}\cdot\frac{2pm_1}{l_1^2}\\=&-\frac{2p}{l_1^2l_2^2}(m_1\sqrt{p^2m_2^2+2pcl_2^2}+m_2\sqrt{p^2m_1^2+2pcl_1^2}),\end{aligned}$$

所以

(1) 因为 L_1,L_2 关于 y 轴不对称, 所以 $l_1m_2\pm l_2m_1\neq 0$. 故当 $c\neq 0$ 时, $t_2t_2'-t_1t_1'\neq 0$, 于是当 $c\neq 0$ 时 $\delta\neq 0$, 两直线有唯一解, 且交点的纵坐标为

$$\begin{aligned}y=&\frac{\delta_y}{\delta}=\frac{m_1t_1t_2(t_2'-t_1')+m_2t_1't_2'(t_2-t_1)}{t_2t_2'-t_1t_1'}+c\\=&\frac{m_1\cdot\frac{-2pc}{l_1^2}\cdot\frac{-2\sqrt{p^2m_2^2+2pcl_2^2}}{l_2^2}+m_2\cdot\frac{-2pc}{l_2^2}\cdot\frac{-2\sqrt{p^2m_1^2+2pcl_1^2}}{l_1^2}}{-\frac{2p}{l_1^2l_2^2}(m_1\sqrt{p^2m_2^2+2pcl_2^2}+m_2\sqrt{p^2m_1^2+2pcl_1^2})}+c\\=&-2c+c=-c(\text{恒为定值}).\end{aligned}$$

(2) 当 $c=0$ 时, $\delta=0$, 此时两直线 A_1B_2 与 A_2B_1(或直线 A_1B_1 与 A_2B_2) 与 L_1,L_2 重合, 相交于坐标原点.

推论 3.1.5 抛物线关于对称轴所在直线上任意一点的极线垂直于这点到抛物线顶点的连线, 与连线位于对称轴的的异侧且抛物线顶点到极线的距离等于抛物线顶点到极点的距离.

证明 因为经过适当的旋转和平移, 可以把抛物线化为 $x^2=2py$ 的形式, 并把 P 变成 y 轴上的点. 于是根据定理 3.1.5 即得.

3.2 一般二次曲线极线的方程及其应用

本节主要讨论一般二次曲线的极线理论. 首先给出一般二次曲线极线的方程及其若干推论; 再利用极线的方程导出一般二次曲线的配极定理, 并讨论配极定理的应用; 最后给出一般二次曲线极线的两个定值定理及其推论.

3.2.1 一般二次曲线极线的方程及其应用

设二次曲线的一般方程为

$$S: f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{3.2.1}$$

其中 A, B, C 不全为零.

记 $\varphi(x,y) = Ax^2+2Bxy+Cy^2, f_1(x,y) = Ax+By+D, f_2(x,y) = Bx+Cy+E,$ $f_3(x,y) = Dx + Ey + F;\quad f_1 = f_1(x_0,y_0), f_2 = f_2(x_0,y_0), f_3 = f_3(x_0,y_0)$.

定理 3.2.1　自一点 $P(x_0,y_0)$ 向二次曲线 S 任意作两条直线 l_1, l_2, 分别与 S 相交于 A_1, A_2 和 B_1, B_2, 则 (1) 若 f_1, f_2 不全为零, 则直线 A_1B_2 与 A_2B_1 及直线 A_1B_1 与 A_2B_2 的交点恒在直线 l:

$$f_1 \cdot x + f_2 \cdot y + f_3 = 0 \tag{3.2.2}$$

上; (2) 若 $f_1 = f_2 = 0$, 则直线 A_1B_2 与 A_2B_1 及直线 A_1B_1 与 A_2B_2 均相交于无穷远点, 即弦 A_1B_2 与 A_2B_1 及弦 A_1B_1 与 A_2B_2 均平行.

证明　如图 3.2.1 所示. 设两直线的方程为 $l_i: x = x_0 + m_it, y = y_0 + n_it$ $(i = 1,2)$, 其中 m_i, n_i $(i = 1,2)$ 均不全为零. 记 $\varphi_1 = \varphi(l_1, m_1), \varphi_2 = \varphi(m_2, n_2); f = f(x_0,y_0); g_1 = m_1f_1 + n_1f_2, g_2 = m_2f_1 + n_2f_2$. 将 l_1 代入 S 的方程, 并化简得

$$\varphi_1t^2 + 2g_1t + f = 0,$$

解得

$$t_1 = \frac{-g_1 + \sqrt{g_1^2 - \varphi_1 f}}{\varphi_1}, \quad t_2 = \frac{-g_1 - \sqrt{g_1^2 - \varphi_1 f}}{\varphi_1},$$

所以 l_1 与 S 的交点为 $A_i(x_0 + m_1t_i, y_0 + n_1t_i)(i = 1,2)$.

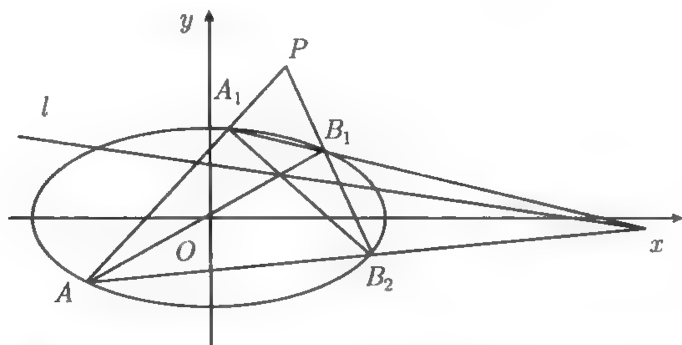


图 3.2.1　过一点的二次曲线两割线端点的连线

同理由

$$\varphi_2t^2 + 2g_2t + f = 0,$$

求得

$$t_1' = \frac{-g_2 + \sqrt{g_2^2 - \varphi_2 f}}{\varphi_2}, \quad t_2' = \frac{-g_2 - \sqrt{g_2^2 - \varphi_2 f}}{\varphi_2},$$

所以 l_2 与 S 的交点为 $B_i(x_0 + m_2 t_i', y_0 + n_2 t_i')(i = 1, 2)$.

直线 A_1B_2 和 A_2B_1 的方程分别为

$$(n_2t_2' - n_1t_1)x + (m_1t_1 - m_2t_2')y = (m_1n_2 - m_2n_1)t_1t_2' + x_0(n_2t_2' - n_1t_1) + y_0(m_1t_1 - m_2t_2'), \tag{3.2.3}$$

$$(n_2t_1' - n_1t_2)x + (m_1t_2 - m_2t_1')y = (m_1n_2 - m_2n_1)t_1't_2 + x_0(n_2t_1' - n_1t_2) + y_0(m_1t_2 - m_2t_1'). \tag{3.2.4}$$

(3.2.3) 和 (3.2.4) 两式联立, 解得

$$\Delta = \begin{vmatrix} n_2t_2' - n_1t_1 & m_1t_1 - m_2t_2' \\ n_2t_1' - n_1t_2 & m_1t_2 - m_2t_2 \end{vmatrix} = (m_1n_2 - m_2n_1)(t_2t_2' - t_1t_1'),$$

$$\begin{aligned}\Delta_x = &\begin{vmatrix} (m_1n_2 - m_2n_1)t_1t_2' + x_0(n_2t_2' - n_1t_1) + y_0(m_1t_1 - m_2t_2') & m_1t_1 - m_2t_2' \\ (m_1n_2 - m_2n_1)t_1't_2 + x_0(n_2t_1' - n_1t_2) + y_0(m_1t_2 - m_2t_1') & m_1t_2 - m_2t' \end{vmatrix} \\ =&(m_1n_2 - m_2n_1)[m_1t_1t_2(t_2' - t_1') + m_2t_1't_2'(t_2 - t_1) + x_0(t_2t_2' - t_1t_1')]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_y = &\begin{vmatrix} n_2t_2' - n_1t_1 & (m_1n_2 - m_2n_1)t_1t_2' + x_0(n_2t_2' - n_1t_1) + y_0(m_1t_1 - m_2t_2') \\ n_2t_1' - n_1t_2 & (m_1n_2 - m_2n_1)t_1't_2 + x_0(n_2t_1' - n_1t_2) + y_0(m_1t_2 - m_2t_1') \end{vmatrix} \\ =&(m_1n_2 - m_2n_1)[n_1t_1t_2(t_2' - t_1') + n_2t_1't_2'(t_2 - t_1) + y_0(t_2t_2' - t_1t_1')].\end{aligned}$$

因为

$$t_1t_2 = \frac{f}{\varphi_1}, \quad t_1't_2' = \frac{f}{\varphi_2}; \quad t_1 + t_2 = -\frac{2g_1}{\varphi_1}, t_1' + t_2' = -\frac{2g_2}{\varphi_2};$$

$$t_2 - t_1 = \frac{-2\sqrt{g_1^2 - \varphi_1 f}}{\varphi_1}, \quad t_2' - t_1' = \frac{-2\sqrt{g_2^2 - \varphi_2 f}}{\varphi_2};$$

$$\begin{aligned}t_2t_2' - t_1t_1' =&t_2(t_2' + t_1') - t_1'(t_2 + t_1) \\ =&\frac{-g_1 - \sqrt{g_1^2 - \varphi_1 f}}{\varphi_1} \cdot \frac{-2g_2}{\varphi_2} - \frac{-g_2 + \sqrt{g_2^2 - \varphi_2 f}}{\varphi_2} \cdot \frac{-2g_1}{\varphi_1} \\ =&\frac{2}{\varphi_1\varphi_2}(g_1\sqrt{g_2^2 - \varphi_2 f} + g_2\sqrt{g_1^2 - \varphi_1 f}),\end{aligned}$$

所以,

(1) 当 f_1, f_2 不全为零时, 则 $\delta \neq 0$. 事实上, 由 f_1, f_2 不全为零, 可得 $m_1f_1 + n_1f_2$, $m_2f_1 + n_2f_2$ 不全为零. 否则, 由方程组 $m_1f_1 + n_1f_2 = 0, m_2f_1 + n_2f_2 = 0$ 有非零解, 可得其系数行列式 $m_1n_2 - m_2n_1 = 0$, 这与 m_1, n_1 和 m_2, n_2 是过一点的两条直线的方向量相矛盾.

因此, 方程组有唯一解, 即两直线有唯一交点, 且交点的坐标为

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{m_1t_1t_2(t_2'-t_1')+m_2t_1't_2'(t_2-t_1)}{t_2t_2'-t_1t_1'}+x_0,$$
$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{n_1t_1t_2(t_2'-t_1')+n_2t_1't_2'(t_2-t_1)}{t_2t_2'-t_1t_1'}+y_0.$$

于是

$$f_1\cdot x+f_2\cdot y-x_0f_1-y_0f_2=\frac{(m_1f_1+n_1f_2)t_1t_2(t_2'-t_1')+(m_2f_1+n_2f_2)t_1't_2'(t_2-t_1)}{t_2t_2'-t_1t_1'}$$
$$=\frac{\dfrac{-2f}{\varphi_1\varphi_2}(g_1\sqrt{g_2^2-\varphi_2f}+g_2\sqrt{g_1^2-\varphi_1f})}{\dfrac{2}{\varphi_1\varphi_2}(g_1\sqrt{g_2^2-\varphi_2f}+g_2\sqrt{g_1^2-\varphi_1f})}=-f,$$

所以 $f_1\cdot x+f_2\cdot y-x_0f_1-y_0f_2+f=0$, 即 $f_1\cdot x+f_2\cdot y+f_3=0$.

(2) 当 $f_1=f_2=0$ 时, 则 $\Delta=0$, 方程组无解, 两直线交点的坐标至少有一个为无穷大, 所以直线 A_1B_2 与 A_2B_1 相交于无穷远点, 即弦 A_1B_2 与 A_2B_1 相互平行.

类似地, 可以证明直线 A_1B_1 与 A_2B_2 的情形.

推论 3.2.1　自一点 $P(x_0,y_0)$ 向两相交直线 $l_i(x,y)=a_ix+b_iy+c_i=0(i=1,2)$ 任意作两条直线分别与这两条直线相交, 则交点所组成的四边形对边所在直线的交点恒在通过两直线交点的直线 $l:l_1(x_0,y_0)l_2(x,y)+l_2(x_0,y_0)l_1(x,y)=0$ 上.

证明　如图 3.2.2 所示. 令 $f(x,y)=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$ $(a_1b_2-a_2b_1\neq0)$. 将 $f(x,y)$ 展开得

$$f(x,y)=a_1a_2x^2+(a_1b_2+a_2b_1)xy+b_1b_2y^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+(b_1c_2+b_2c_1)y+c_1c_2=0,$$

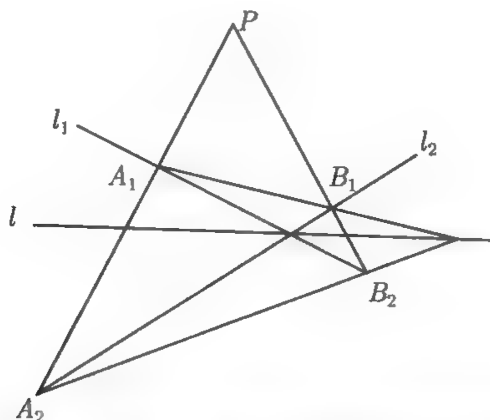


图 3.2.2　过一点的任意二条直线与两相交直线交点的连线

于是

$$A=a_1a_2,B=(a_1b_2+a_2b_1)/2,C=b_1b_2,$$

$$D=(a_1c_2+a_2c_1)/2, B=(b_1c_2+b_2c_1)/2, F=c_1c_2.$$

所以

$$\begin{aligned}2f_1 =&2a_1a_2x_0+(a_1b_2+a_2b_1)y_0+(a_1c_2+a_2c_1)\\ =&a_1(a_2x_0+b_2y_0+c_2)+a_2(a_1x_0+b_1y_0+c_1)\\ =&a_1F_2(x_0,y_0)+a_2F_1(x_0,y_0),\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}2f_2 =&b_1(a_2x_0+b_2y_0+c_2)+b_2(a_1x_0+b_1y_0+c_1)=b_1F_2(x_0,y_0)+b_2F_1(x_0,y_0),\\ 2f_3 =&c_1(a_2x_0+b_2y_0+c_2)+c_2(a_1x_0+b_1y_0+c_1)=c_1F_2(x_0,y_0)+c_2F_1(x_0,y_0).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&f_1\cdot x+f_2\cdot y+f_3\\ =&[a_1l_2(x_0,y_0)+a_2l_1(x_0,y_0)]x+[b_1l_2(x_0,y_0)\\ &+b_2l_1(x_0,y_0)]y+c_1l_2(x_0,y_0)+c_2l_1(x_0,y_0)\\ =&l_1(x_0,y_0)(a_2x+b_2y+c_2)+l_2(x_0,y_0)(a_1x+b_1y+c_1)\\ =&l_1(x_0,y_0)l_2(x,y)+l_2(x_0,y_0)l_1(x,y)\end{aligned}$$

所以根据定理 3.2.1 知, 交点所组成的四边形对角线的交点恒在通过两直线交点的定直线 $l_1(x_0,y_0)l_2(x,y)+l_2(x_0,y_0)l_1(x,y)=0$ 上.

推论 3.2.2 自一点 $P(x_0,y_0)$ 向两平行直线 $l_i(x,y)=ax+by+c_i=0(i=1,2)$ 任意作两条直线分别与这两条直线相交, 则交点所组成的四边形对角线的交点恒在两直线的平行线 $[l_1(x_0,y_0)+l_2(x_0,y_0)](ax+by)+c_1l_2(x_0,y_0)+c_2l_1(x_0,y_0)=0$ 上.

证明 如图 3.2.3 所示. 在推论 3.2.1 中令 $a_1=a_2=a, b_1=b_2=b$, 得

$$\begin{aligned}&f_1\cdot x+f_2\cdot y+f_3\\ =&a[l_2(x_0,y_0)+l_1(x_0,y_0)]x+b[l_2(x_0,y_0)+l_1(x_0,y_0)]y+c_1l_2(x_0,y_0)+c_2l_1(x_0,y_0)\\ =&[l_1(x_0,y_0)+l_2(x_0,y_0)](ax+by)+c_1l_2(x_0,y_0)+c_2l_1(x_0,y_0),\end{aligned}$$

所以根据定理 3.2.1 知, 交点所组成的四边形对角线的交点恒通过两直线 F_1,F_2 的平行线

$$l:[l_1(x_0,y_0)+l_2(x_0,y_0)](ax+by)+c_1l_2(x_0,y_0)+c_2l_1(x_0,y_0)=0.$$

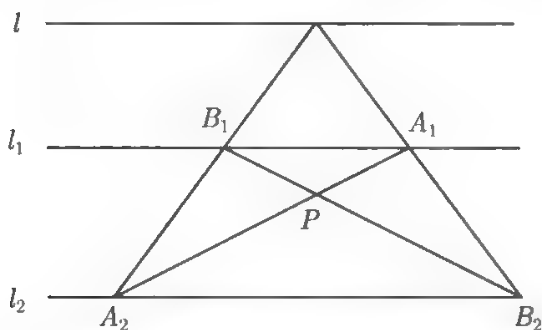


图 3.2.3　过一点的任意二条直线与两平行直线交点的连线

3.2.2　一般二次曲线的配极定理及其应用

如果我们约定一条直线和其平行的所有直线的交点为一无穷远点, 定理 3.2.1 中所有平行线所在直线的交点集合为一条无穷直线, 那么对确定的二次曲线而言, 定理 3.2.1 中的点和线是对应的 (但非一对一的, 参看推论 3.2.3). 于是得出如下的结论.

定理 3.2.2(配极定理)　设 P 是二次曲线 S 所在平面上一点, 过 P 作 S 所有可能成对的割线 (切线看成是割线的特殊情形), 与 S 的交点分别为 A_1, A_2 和 B_1, B_2, 则直线 A_1B_2 与 A_2B_1 的交点和直线 A_1B_1 与 A_2B_2 的交点都在一直线 l 之上.

定义 3.2.1　以下定直线 l 叫做点 $P(x_0, y_0)$ 关于二次曲线 S 的极线, 定点 $P(x_0, y_0)$ 叫做二次曲线 S 关于直线 L 的极点, 极点与极线之间的对偶关系叫做配极. 方程 (3.2.2) 叫做点 $P(x_0, y_0)$ 关于二次曲线 S 的极线的方程, f_1, f_2, f_3 叫做该极线的特征数.

定理 3.2.3(配极原则)　A 点在 B 点的极线 l_B 上的充分必要条件是 B 点在 A 点的极线 l_A 上.

证明　设两点的坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 于是

$$\begin{aligned}
&A\text{点在}B\text{点的极线}l_B\text{上}\\
\Leftrightarrow&(Ax_2+By_2+D)x_1+(Bx_2+Cy_2+E)y_1+(Dx_2+Ey_2+F)=0\\
\Leftrightarrow&(Ax_1+By_1+D)x_2+(Bx_1+Cy_1+E)y_2+(Dx_1+Ey_1+F)=0\\
\Leftrightarrow&B\text{点在}A\text{点的极线}l_A\text{上}.
\end{aligned}$$

注 3.2.1　这说明推论 3.2.1 中 $l_1(x_0, y_0)l_2(x, y) + l_2(x_0, y_0)l_1(x, y) = 0$ 上一点的极线是过 P 和两直线交点的直线, 因此直线用过 P 和两直线交点的直线上一点 P_1 取代 P, 其极线不变.

推论 3.2.3　非退化二次曲线的切点与切线是配极的, 即非退化二次曲线上一点的极线是二次曲线在这点的切线, 为切线的极点是极线与二次曲线的切点.

证明 设 $P(x_0,y_0)$ 是非退化二次曲线 S 上一点, 则 $f(x_0,y_0)=0$. 由于

$$\begin{aligned}f_x(x_0,y_0)=&[2Ax+2By+2D]|_{(x_0,y_0)}=2(Ax_0+By_0+D)=2f_1,\\ f_y(x_0,y_0)=&[2Bx+2Cy+2E]|_{(x_0,y_0)}=2(Ax_0+Cy_0+E)=2f_2,\end{aligned}$$

不妨设 $f_2\neq 0$, 于是 $P(x_0,y_0)$ 点的切线方程为

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=-\frac{f_1}{f_2},$$

即

$$f_1\cdot x+f_2\cdot y-(x_0f_1+y_0f_2)=0.$$

因为

$$\begin{aligned}x_0f_1+y_0f_2=&x_0(Ax_0+By_0+D)+y_0(Bx_0+Cy_0+E)\\ =&Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+Dx_0+Ey_0=f(x_0,y_0)-(Dx_0+Ey_0+F)\\ =&-(Dx_0+Ey_0+F)=-f_3,\end{aligned}$$

所以 $f_1\cdot x+f_2\cdot y+f_3=0$, 即为 $P(x_0,y_0)$ 关于非退化二次曲线 S 的极线方程.

反之, 若 $P(x_0,y_0)$ 关于非退化二次曲线 S 的极线方程为 $f_1\cdot x+f_2\cdot y+f_3=0$, 注意到在 f_1,f_2 不全为零的条件下, 上述证明过程都是可逆的, 因此 $f_1\cdot x+f_2\cdot y+f_3=0$ 为 S 处的切线.

3.2.3 一般二次曲线极线的定值定理

定理 3.2.4 设 $P(x_0,y_0)$ 为二次曲线 $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=K$ 上任意一点, $P(x_0,y_0)$ 关于二次曲线 S 的极线为 l, 则

$$\sqrt{f_1^2+f_2^2}\cdot D_{P-l}=K(\text{为定值}).$$

证明 根据点到直线的有向距离公式及定理 3.2.1, 得

$$D_{P-l}=\frac{f_1\cdot x_0+f_2\cdot y_0+f_3}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}},$$

因为

$$\begin{aligned}f_1\cdot x_0+f_2\cdot y_0+f_3=&(Ax_0+By_0+D)x_0+(Bx_0+Cy_0+E)y_0+Dx_0+Ey_0+F\\ =&Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F\\ =&f(x_0,y_0)=K,\end{aligned}$$

所以

$$\sqrt{f_1^2+f_2^2}\cdot D_{P-l}=K(\text{为定值}).$$

推论 3.2.4　设 $P(x_0,y_0)$ 为圆 $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=K$ 上任意一点, $P(x_0,y_0)$ 关于圆的极线为 l, 则当 $D^2+E^2+K-F\neq 0$ 时,

$$D_{P-l}=K/\sqrt{D^2+E^2+K-F}(\text{为定值}).$$

证明　因为

$$\begin{aligned}f_1^2+f_2^2=&(x_0+D)^2+(y_0+E)^2\\=&Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+D^2+E^2\\=&D^2+E^2+(Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F)-F\\=&D^2+E^2+K-F,\end{aligned}$$

所以

$$D_{P-l}=K/\sqrt{D^2+E^2+K-F}(\text{为定值}).$$

定理 3.2.5　设点 $P(x_0,y_0)$ 关于两直线 $l_i(x,y)=a_ix+b_iy+c_i=0(i=1,2)$ 的极线为 l, 则

$$D_{P-l}\sqrt{D_{P-l_1}^2+D_{P-l_2}^2}=2D_{P-l_1}D_{P-l_2}.\tag{3.2.5}$$

证明　若 $P(x_0,y_0)$ 为两直线 $l_i(x,y)=a_ix+b_iy+c_i=0(i=1,2)$ 的交点, 由推论 3.2.1, $D_{P-l}=0$, 式 (3.2.5) 显然成立.

若 $P(x_0,y_0)$ 不是两直线 $l_i(x,y)=a_ix+b_iy+c_i=0(i=1,2)$ 的交点, 则 $l_{10}=l_1(x_0,y_0)$, $l_{20}=l_2(x_0,y_0)$ 不全为零. 根据推论 3.2.1 和推论 3.2.2 得

$$l_{10}=\sqrt{a_1^2+b_1^2}D_{P-l_1},\quad l_{20}=\sqrt{a_2^2+b_2^2}D_{P-l_2},$$

于是

$$\begin{aligned}D_{P-l}=&\frac{2l_{10}l_{20}}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)l_{20}^2+(a_2^2+b_2^2)l_{10}^2}}\\=&\frac{2\sqrt{a_1^2+b_1^2}D_{P-l_1}\sqrt{a_2^2+b_2^2}D_{P-l_2}}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)D_{P-l_2}^2+(a_2^2+b_2^2)(a_1^2+b_1^2)D_{P-l_1}^2}}\\=&\frac{2D_{P-l_1}D_{P-l_2}}{\sqrt{D_{P-l_2}^2+D_{P-l_1}^2}},\end{aligned}$$

所以式 (3.2.5) 成立.

推论 3.2.5　设点 $P(x_0,y_0)$ 关于两直线 $l_i(x,y)=a_ix+b_iy+c_i=0(i=1,2)$ 的极线为 l, 则

$$d_{P-l}\leqslant\sqrt{2d_{P-l_1}d_{P-l_2}},\tag{3.2.6}$$

等号当且仅当 $P(x_0,y_0)$ 到两直线 l_1,l_2 的距离相等时成立.

证明　根据定理 3.2.5 可得

$$d_{P-l}\sqrt{d_{P-l_1}^2+d_{P-l_2}^2}=2d_{P-l_1}d_{P-l_2}.$$

因为 $d_{P-l_1}^2+d_{P-l_2}^2\geqslant 2d_{P-l_1}d_{P-l_2}$, 等号当且仅当 $d_{P-l_1}=d_{P-l_2}$ 时成立, 从而不等式 (3.2.6) 得证.

3.3　二次曲线极线方程在几何证题中的应用

我们知道, Papuss 定理和 Desarque 定理是射影几何中的重要定理, 本节利用二次曲线极线的方程给出这两个定理的证明.

引理 3.3.1　设 A 都是 m 阶方阵, B 是 $m\times n$ 矩阵, 则 $R(AB)=R(B)$.

证明　由方程组 $(AB)\vec{x}=\vec{0}$ 与 $B\vec{x}=\vec{0}$ 同解即得.

定理 3.3.1(二次曲线的 Pappus 定理)　设 $Q_1Q_2\cdots Q_6$ 是二次曲线 S 内接六角形 (不必凸的、甚至边自交的), 则 $Q_1Q_2\cdots Q_6$ 三组对边的交点共线.

证明　如图 3.3.1 所示. 设二次曲线 S 的方程为 (3.2.1), $Q_1Q_2\cdots Q_6$ 三组对边 $Q_iQ_{i+1},Q_{i+3}Q_{i+4}$ 的交点依次为 $P_i(a_i,b_i)$ $(i=1,2,3)$, 对角线 $Q_iQ_{i+3},Q_{i+1}Q_{i+4}$ 的交点为 $R_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3)$. 于是

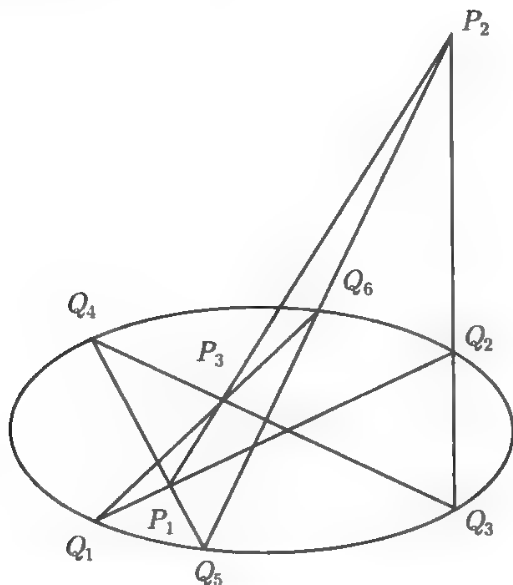


图 3.3.1　二次曲线的 Pappus 定理

根据定理 3.2.1 可知 $P_i(a_i,b_i)$ 在 $R_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3)$ 关于二次曲线 S 的极线上, 故

$$(Ax_i+By_i+D)a_i+(Bx_i+Cy_i+E)b_i+Da_i+Eb_i+F=0(i=1,2,3).$$

写成矩阵的形式, 即

$$\begin{pmatrix} Ax_1+By_1+D & Bx_1+Cy_1+E & Dx_1+Ey_1+F \\ Ax_2+By_2+D & Bx_2+Cy_2+E & Dx_2+Ey_2+F \\ Ax_3+By_3+D & Bx_3+Cy_3+E & Dx_3+Ey_3+F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

即

$$UGV=O,$$

其中

$$U=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix},G=\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix},V=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由于对角线的交点 $R_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3)$ 不共线, 所以 $\det(U)\neq 0$, 从而 $R(U)=3$, 所以 $R(UGV)=R(GV)$; 因为 $R(UGV)=R(O)=0$, 所以 $R(GV)=0$. 又因为 A,B,C 不全为零, 所以 $R(G)\geqslant 1$, 于是 $R(V)<3$, 故 $\det(V)=0$, 从而三组对边 $Q_iQ_{i+1},Q_{i+3}Q_{i+4}$ 的交点 P_1,P_2,P_3 共线.

推论 3.3.1(两直线上的 Pappus 定理)　如果六角形 $Q_1Q_2\cdots Q_6$(不必凸的、甚至边自交的) 的顶点 $Q_1,Q_3,Q_5;Q_2,Q_4,Q_6$ 分别在两直线 l_1,l_2 上, 则 $Q_1Q_2\cdots Q_6$ 三组对边的交点共线.

证明　如图 3.3.2 所示. 设两直线的方程为 $l_i:a_ix+b_iy+c_i=0$ $(i=1,2)$, 令二次曲线的方程为

$$S:f(x,y)=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0,$$

根据定理 3.3.1 即知推论 3.3.1 结论成立.

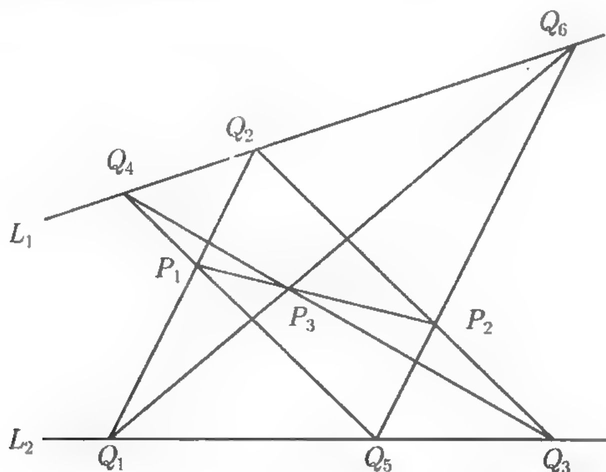


图 3.3.2　两直线上的 Pappus 定理

引理 3.3.2　设 A,B 都是 n 阶方阵. 若 $AB=O$, 则 $R(A)+R(B)\leqslant n$.

证明 由 $AB=O$ 知, B 的每一列向量都是齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量. 若 $R(A)=n$, 方程组 $Ax=0$ 只有零解, 故 $B=O$, 于是 $R(B)=0$, $R(A)+R(B)=n$, 结论成立.

若 $R(A)<n$, 方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有 $n-R(A)$ 个向量, 从而 B 的列向量组的秩 $\leqslant n-R(A)$, 即 $R(B)\leqslant n-R(A)$, 所以 $R(A)+R(B)\leqslant n$.

定理 3.3.2(Desarques 定理) 设两个三角形 ABC 和 $A_1B_1C_1$ 位于同一平面上, 则三直线 AA_1, BB_1, CC_1 共点的充分必要条件是三对直线 AB 和 A_1B_1, BC 和 B_1C_1, CA 和 C_1A_1 的交点共线.

证明 如图 3.3.3 所示. 设三对直线 $AB, A_1B_1; BC, B_1C_1; CA, C_1A_1$ 的交点为 $P_i(u_i, v_i)$ $(i=1,2,3)$, 三对直线 $AA_1, BB_1; BB_1, CC_1; CC_1, AA_1$ 交点的坐标分别为 $Q_i(x_i, y_i)(i=1,2,3)$.

必要性. 设三对直线 $AB, A_1B_1; BC, B_1C_1; CA, C_1A_1$ 的方程分别为

$$l_{i1}: a_{i1}x+b_{i1}y+c_{i1}=0, \quad l_{i2}: a_{i2}x+b_{i2}y+c_{i2}=0\ (i=1,2,3),$$

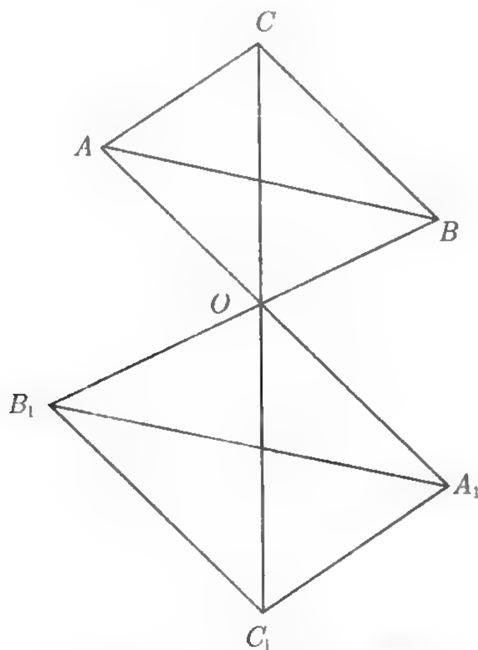


图 3.3.3 Desarques 定理

其中 $a_{i1}b_{i2}-a_{i,2}b_{i1}\neq 0(i=1,2,3)$. 令二次曲线 $S_i: l_{i1}l_{i2}=0(i=1,2,3)$, $f_{ij}(j=1,2,3)$ 是 Q_i 关于 $S_i(i=1,2,3)$ 的极线的特征数, 则

$$f_{i1}=A_ix_i+B_iy_i+D_i=0, \quad f_{i2}=B_ix_i+C_iy_i+E_i=0,$$

$$f_{i3}=D_ix_i+E_iy_i+F_i=0(i=1,2,3).$$

由推论 3.2.1 知, Q_i 关于 S_i 的极线通过点 $P_i(u_i, v_i)$ $(i=1,2,3)$, 于是

$$f_{i1}u_i + f_{i2}v_i + f_{i3} = 0\ (i = 1, 2, 3).$$

即

$$(A_i x_i + B_i y_i + D_i)u_i + (B_i x_i + C_i y_i + E_i)v_i + (D_i x_i + E_i y_i + F_i) = 0\ (i = 1, 2, 3)$$

写成矩阵方程的形式为

$$MU = O,$$

其中

$$M = \begin{pmatrix} A_1x_1 + B_1y_1 + D_1 & B_1x_1 + C_1y_1 + E_1 & D_1x_1 + E_1y_1 + F_1 \\ A_2x_2 + B_2y_2 + D_2 & B_2x_2 + C_2y_2 + E_2 & D_2x_2 + E_2y_2 + F_2 \\ A_3x_3 + B_3y_3 + D_3 & B_3x_3 + C_3y_3 + E_3 & D_3x_3 + E_3y_3 + F_3 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 Q_1, Q_2, Q_3 重合, 所以 $x_1 = x_2 = x_3 = x_0, y_1 = y_2 = y_3 = y_0$, 且存在 $\lambda \neq 0$ 使 $l_3 = l_1 + \lambda l_2$. 所以 $A_3 = A_1 + \lambda A_2, B_3 = B_1 + \lambda B_2, C_3 = C_1 + \lambda C_2, D_3 = D_1 + \lambda D_2, E_3 = E_1 + \lambda E_2, F_3 = F_1 + \lambda F_2$. 故

$$M \sim \begin{pmatrix} A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 & B_1x_0 + C_1y_0 + E_1 & D_1x_0 + E_1y_0 + F_1 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 & B_2x_0 + C_2y_0 + E_2 & D_2x_0 + E_2y_0 + F_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $Q_1 = Q_2 = Q$ 关于 S_1, S_2 的极线是相交的, 所以 M 二阶顺序主子式不等于零, 故 $R(M) = 2$. 又因为 $R(MU) = R(O) = 0$, 所以 $R(U) < 3$. 事实上, 若 $R(U) = 3$, 则 $R(MU) = R(M) = 2$, 这与 $R(MU) = 0$ 矛盾. 所以 $\det(U) = 0$, P_1, P_2, P_3 三点共线.

充分性. 设三直线 AA_1, BB_1, CC_1 的方程分别为

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad l_3 : a_3x_1 + b_3y + c_3 = 0,$$

其中 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0, a_3b_1 - a_1b_3 \neq 0$. 令二次曲线 $S_i : l_il_{i+1} = 0(i = 1, 2, 3; l_4 = l_1)$, $f_{ij}(j = 1, 2, 3)$ 是 P_i 关于 $S_i(i = 1, 2, 3)$ 的极线的特征数, 则

$$f_{i1} = A_iu_i + B_iv_i + D_i = 0, \quad f_{i2} = B_iu_i + C_iv_i + E_i = 0,$$

$$f_{i3} = D_iu_i + E_iv_i + F_i = 0\ (i = 1, 2, 3).$$

由推论 3.2.1 知, P_i 关于 S_i 的极线通过点 $Q_i(x_i, y_i)$ $(i=1,2,3)$, 于是

$$f_{i1}x_i + f_{i2}y_i + f_{i3} = 0\ (i=1,2,3),$$

写成矩阵方程的形式为

$$NV = O,$$

其中

$$N = \begin{pmatrix} A_1u_1 + B_1v_1 + D_1 & B_1u_1 + C_1v_1 + E_1 & D_1u_1 + E_1v_1 + F_1 \\ A_2u_2 + B_2v_2 + D_2 & B_2u_2 + C_2v_2 + E_2 & D_2u_2 + E_2v_2 + F_2 \\ A_3u_3 + B_3v_3 + D_3 & B_3u_3 + C_3u_3 + E_3 & D_3u_3 + E_3v_3 + F_3 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 P_1, P_2, P_3 是共线且不完全重合的三点, 所以存在 t, 使 $u_3 = (1-t)u_1 + tu_2, v_3 = (1-t)v_1 + tv_2$, 故

$$N \sim \begin{pmatrix} A_1u_1 + B_1v_1 + D_1 & B_1u_1 + C_1v_1 + E_1 & D_1u_1 + E_1v_1 + F_1 \\ A_2u_2 + B_2v_2 + D_2 & B_2u_2 + C_2v_2 + E_2 & D_2u_2 + E_2v_2 + F_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{于是} R(N) = 2.$$

又因为 $R(NV) = R(O) = 0$, 所以 $R(V) \leqslant 1$. 事实上, 若 $R(V) > 1$, 则 $R(NV) \geqslant 1$, 这与 $R(NV) = 0$ 矛盾. 所以 Q_1, Q_2, Q_3 三点重合.

第 4 章　多边形有向面积公式及应用

4.1　三角形有向面积公式及其应用

本节主要讨论三角形有向面积公式及其应用. 首先给出三角形有向面积的概念、性质与公式; 再利用有向面积法给出著名的 Ceva 定理、等截共轭点定理、共轭直径的 Apollonius 定理和两角和、差的三角公式等结论的证明; 最后利用有向面积法给出一些有趣的几何问题的证明, 并借助于多元函数的极值方法给出了三角形的一个不等式, 该结论是著名的 Weitzentock 不等式的加强.

4.1.1　三角形有向面积概念、性质与公式

定义 4.1.1　设 $P_1P_2P_3$ 为三角边, 若 $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$ 的绕向是逆时针 (顺时针) 的, 则称 $P_1P_2P_3$ 为正向 (反向) 三角形.

定义 4.1.2　设三角形 $P_1P_2P_3$ 的面积为 $S_{P_1P_2P_3}$, 则三角形 $P_1P_2P_3$ 的有向面积

$$D_{P_1P_2P_3} = \pm S_{P_1P_2P_3}, \tag{4.1.1}$$

其中当 $P_1P_2P_3$ 为正向三角形时取 “+” 号, 当 $P_1P_2P_3$ 为反向三角形时取 “−” 号.

特别地, 当 P_1, P_2, P_3 共线时, 我们把线段 $P_1P_2P_3$ 看成是三角形的特殊情形, 并规定式 (4.1.1) 中的有向面积为零.

显然, $D_{P_1P_2P_3} = D_{P_2P_3P_1} = D_{P_3P_1P_2} = -D_{P_2P_1P_3} = -D_{P_1P_3P_2} = -D_{P_3P_2P_1}$. 因此, 在有向面积下, 过三点的三角形与过这三点次序有关的.

定理 4.1.1　设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, 则三角形的有向面积

$$D_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i), \tag{4.1.2}$$

其中 $x_{3+1} = x_1, y_{3+1} = y_1$.

证明　(1) 当三角形 $P_1P_2P_3$ 为正向三角形时, 若三角形 $P_1P_2P_3$ 有一边与 x 轴平行, 不妨设 P_1P_2 与 x 轴平行, 如图 4.1.1 所示. 由有向面积的定义、三角形面积公式及 $y_1 = y_2$, 得

$$D_{P_1P_2P_3} = S_{P_1P_2P_3}$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(y_3-y_2)=\frac{1}{2}(x_2y_3-x_2y_2-x_1y_3+x_1y_2)$$
$$=\frac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)]. \tag{4.1.3}$$

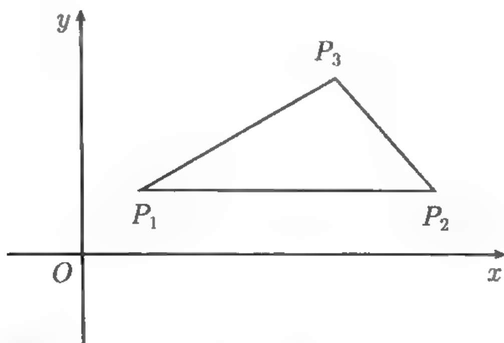


图 4.1.1　一边与 x 轴平行的三角形

若三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边都不平行于 x 轴, 则过某顶点且平行于 x 轴的直线必和其对边相交. 不妨设 P_1Q 平行于 x 轴, 交对边 P_2P_3 于 $Q(x,y)$, 如图 4.1.2 所示. 由 P_2, P_3, Q 三点共线, 得

$$x_2y_3-x_3y_2=x_2y-xy_2+xy_1-x_1y \tag{4.1.4}$$

由式 (4.1.3) 和式 (4.1.4) 得

$$\begin{aligned}D_{P_1P_2P_3}=&S_{P_1P_2Q}+S_{P_1QP_3}\\=&\frac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y-xy_2)+(xy_1-x_1y)]\\&+\frac{1}{2}[(x_1y-xy_1)+(xy_3-x_3y)+(x_3y_1-x_1y_3)]\\=&\frac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)].\end{aligned}$$

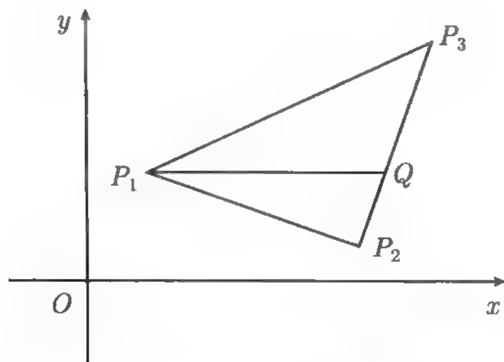


图 4.1.2　边与 x 轴都不平行的三角形

(2) 当三角形 $P_1P_2P_3$ 为反向三角形时, 则三角形 $P_3P_2P_1$ 为正向的. 根据情形 (1) 及 $D_{P_1P_2P_3}=-D_{P_3P_2P_1}$, 容易证明式 (4.1.1) 成立.

4.1.2　三角形有向面积公式在几何定理证明中的应用

定理 4.1.2(Ceva 定理)　在三角形$P_1P_2P_3$ 的边 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 所在直线上依次取点 Q_1, Q_2, Q_3. 试证: P_1Q_2, P_2Q_3, P_3Q_1 交于一点的充分必要条件是 $\dfrac{P_1Q_1}{Q_1P_2}\cdot\dfrac{P_2Q_2}{Q_2P_3}\cdot\dfrac{P_3Q_3}{Q_3P_1}=1$.

证明　如图 4.1.3 所示. 不妨设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_1(0,0), P_2(a,0), P_3(b,c), \dfrac{P_1Q_1}{Q_1P_2}=\lambda_1, \dfrac{P_2Q_2}{Q_2P_3}=\lambda_2, \dfrac{P_3Q_3}{Q_3P_1}=\lambda_3$. 于是 Q_1, Q_2, Q_3 的坐标为

$$Q_1\left(\frac{a\lambda_1}{1+\lambda_1},0\right),\quad Q_2\left(\frac{a+b\lambda_2}{1+\lambda_2},\frac{c\lambda_2}{1+\lambda_2}\right),\quad Q_3\left(\frac{b}{1+\lambda_3},\frac{c}{1+\lambda_3}\right).$$

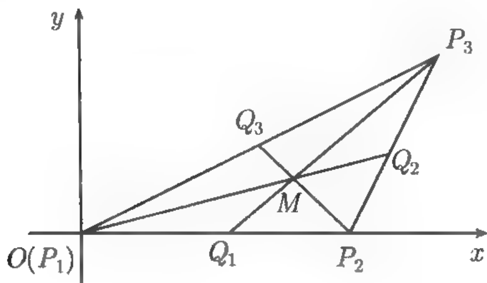


图 4.1.3　Ceva 定理

从而求得 P_1Q_2 的方程为

$$y=\frac{c\lambda_2}{a+b\lambda_2}x, \tag{4.1.5}$$

P_2Q_3 的方程为

$$y=\frac{c}{b-a-a\lambda_3}x-\frac{ac}{b-a-a\lambda_3}. \tag{4.1.6}$$

(4.1.4) 和 (4.1.5) 两式联立求得 P_1Q_2 和 P_2Q_3 交点的坐标

$$M\left(\frac{a+b\lambda_2}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3},\frac{c\lambda_2}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}\right).$$

由三角形有向面积公式得

$$\begin{aligned}2D_{P_3Q_1M}=&\left(0-\frac{ac\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)+\left(\frac{a\lambda_1}{1+\lambda_1}\cdot\frac{c\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2\lambda_3}-0\right)\\&+\left(\frac{a+b\lambda_2}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}\cdot c-b\cdot\frac{c\lambda_2}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}\right)\\=&\frac{1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)}\cdot[ac\lambda_1\lambda_2-ac\lambda_1(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)+ac(1+\lambda_1)]\\=&\frac{ac(1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)},\end{aligned}$$

所以

$$P_1Q_2,P_2Q_3,P_3Q_1\text{交于一点} \Leftrightarrow D_{P_3Q_1M}=0 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3=1 \Leftrightarrow \frac{P_1Q_1}{Q_1P_2}\cdot\frac{P_2Q_2}{Q_2P_3}\cdot\frac{P_3Q_3}{Q_3P_1}=1.$$

定理 4.1.3 在三角形 $P_1P_2P_3$ 的边 P_1P_2,P_2P_3,P_3P_1 所在直线上依次截取线段 Q_1R_1,Q_2R_2,Q_3R_3, 使得 $d_{P_1Q_1}=d_{P_2R_1}$, $d_{P_2Q_2}=d_{P_3R_2},d_{P_3Q_3}=d_{P_1R_3}$. 证明: P_1Q_2,P_2Q_3,P_3Q_1 交于一点的充要条件是 P_1R_2,P_2R_3,P_3R_1 交于一点.

证明 如图 4.1.4 所示. 不妨设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_1(0,0),P_2(a,0)$, $P_3(b,c)$; P_1Q_2,P_2Q_3 和 P_1R_2, P_2R_3 的交点分别 M,N, 且 $\dfrac{P_1Q_1}{Q_1P_2}=\lambda_1,\dfrac{P_2Q_2}{Q_2P_3}=\lambda_2$, $\dfrac{P_3Q_3}{Q_3P_1}=\lambda_3$.

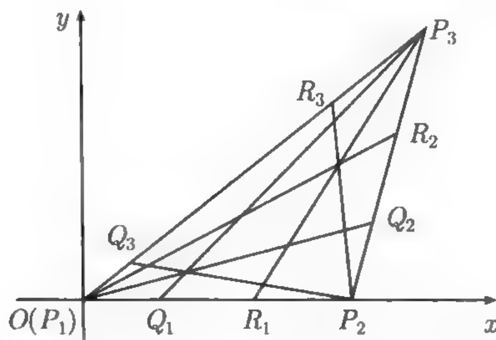


图 4.1.4 三角形等截共轭点定理

由 $d_{P_1Q_1}=d_{P_2R_1},d_{P_2Q_2}=d_{P_3R_2},d_{P_3Q_3}=d_{P_1R_3}$, 得 $\dfrac{P_1R_1}{R_1P_2}=\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{P_2R_2}{R_2P_3}=\dfrac{1}{\lambda_2},\dfrac{P_3R_3}{R_3P_1}=\dfrac{1}{\lambda_3}$. 于是根据定理 4.1.2 的证明有

$$D_{P_1Q_2M}=\frac{ac(1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)},$$

$$D_{P_1R_2N}=\frac{ac[1-(1/\lambda_1)(1/\lambda_2)(1/\lambda_3)]}{(1+1/\lambda_1)[1+1/\lambda_2+1/(\lambda_2\lambda_3)]}=\frac{ac(\lambda_1\lambda_2\lambda_3-1)}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)},$$

于是 P_1Q_2,P_2Q_3,P_3Q_1 交于一点 $\Leftrightarrow D_{P_1Q_2M}=0\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1\Leftrightarrow D_{P_1R_2N}=0\Leftrightarrow$ P_1R_2,P_2R_3,P_3R_1 交于一点.

注 4.1.1 在三角形 $P_1P_2P_3$ 的边 P_1P_2,P_2P_3,P_3P_1 截取线段 Q_1R_1,Q_2R_2,Q_3R_3 时, P_1Q_2,P_2Q_3,P_3Q_1 的交点 M 和 P_1R_2,P_2R_3,P_3R_1 交点 N 称为三角形 $P_1P_2P_3$ 的等截共轭点, 相应的结论就是所谓的 "等截共轭点定理".

定理 4.1.4(共轭直径的 Apollonius 定理) 设 P,P' 分别是椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 或双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 与其任意两条共轭直径的一个交点, 则 (1) $d_{OP}^2+d_{OP'}^2=a^2+b^2$(恒为定值), 或 $d_{OP}^2-d_{OP'}^2=a^2-b^2$(恒为定值); (2) 以 OP,OP' 为邻边组成的平行四边形的面积等于 ab(恒为定值).

证明　(1) 如图 4.1.5 所示. 不妨设椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的共轭直径的方程为 $y=kx, y=k'x$, 则 $kk'=-b^2/a^2$, 即 $k'=-b^2/ka^2$.

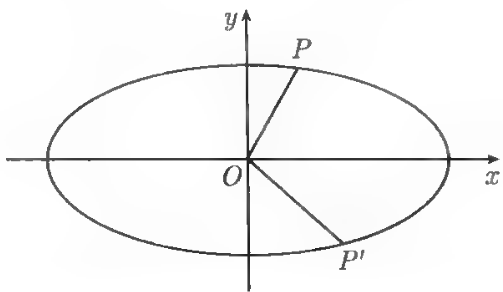


图 4.1.5　椭圆共轭直径的 Apollonius 定理

设 P, P' 的坐标分别为 $P(x,y), P'(x',y')$, 则 $d_{OP}^2=x^2+y^2, d_{OP'}^2=x'^2+y'^2$. 解方程组

$$\begin{cases} x^2/a^2+y^2/b^2=1, \\ y=kx \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{a^2b^2}{k^2a^2+b^2}, \\ y^2=\dfrac{k^2a^2b^2}{k^2a^2+b^2}, \end{cases}$$

以 $-b^2/(ka^2)$ 代上式中的 k, 得

$$\begin{cases} x'^2=\dfrac{k^2a^4}{k^2a^2+b^2}, \\ y'^2=\dfrac{b^4}{k^2a^2+b^2}. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} d_{OP}^2+d_{OP'}^2 &= \frac{a^2b^2+k^2a^2b^2}{k^2a^2+b^2}+\frac{k^2a^4+b^4}{k^2a^2+b^2} \\ &= \frac{b^2(a^2+b^2)+k^2a^2(a^2+b^2)}{k^2a^2+b^2}=a^2+b^2(\text{为定值}). \end{aligned}$$

同理可以证明双曲线的情形.

(2) 不妨设 P 位于 x 轴的上方, P' 位于 x 轴的下方, 则

$$x=\frac{\pm ab}{\sqrt{k^2a^2+b^2}}, y=\frac{|k|ab}{\sqrt{k^2a^2+b^2}},\quad x'=\frac{\pm|k|a^2}{\sqrt{k^2a^2+b^2}}, y'=\frac{-b^2}{\sqrt{k^2a^2+b^2}},$$

因为

$$2D_{OPP'}=xy'-x'y=\frac{\pm ab}{\sqrt{k^2a^2+b^2}}\cdot\frac{-b^2}{\sqrt{k^2a^2+b^2}}-\frac{\pm|k|a^2}{\sqrt{k^2a^2+b^2}}\cdot\frac{|k|ab}{\sqrt{k^2a^2+b^2}}$$

$$=\frac{\mp ab(k^2a^2+b^2)}{k^2a^2+b^2}=\mp ab,$$

所以以 OP, OP' 为邻边组成的平行四边形为 $S=2|D_{OPP'}|=ab$.

同理可以证明双曲线的情形.

定理 4.1.5 利用三角形有向面积公式证明:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta, \tag{4.1.7}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \tag{4.1.8}$$

证明 如图 4.1.6 所示. 不妨设 $2\pi>\alpha>\beta\geqslant 0$. 当 $\alpha=\beta, \pi+\beta$ 时, 结论显然成立. 当 $\alpha\neq\beta$ 时, 在单位圆上取两点:

$$A(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\quad B(\cos\beta,\ \sin\beta).$$

根据式 (4.1.1), 坐标原点与这两点构成的三角形 OAB 的有向面积

$$D_{OAB}=\frac{1}{2}(\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta).$$

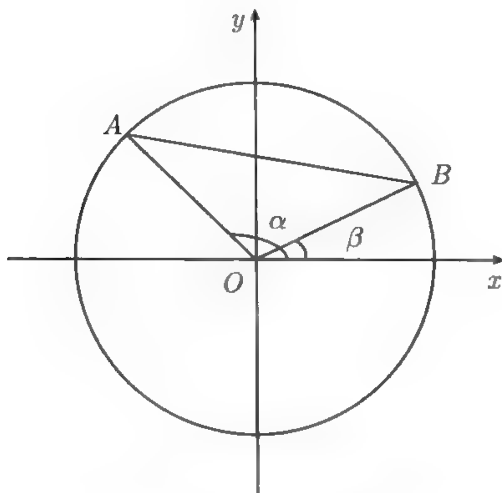


图 4.1.6 单位圆中三角形

当 $\alpha-\beta<\pi(\alpha-\beta>\pi)$ 时, 三角形 OAB 为反向 (正向) 三角形. 于是

$$S_{OAB}=\mp D_{OAB}=\pm\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta).$$

另一方面, 由等腰三角形面积公式有

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot|\sin(\alpha-\beta)|=\pm\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta),$$

因此式 (4.1.7) 成立.

类似地, 在单位圆上取两点:

$$A'\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=A'(-\sin\alpha,\ \cos\alpha),\ B(\cos\beta,\ \sin\beta),$$

可以证明式 (4.1.8) 成立.

定理 4.1.6　设 $P_1P_2P_3$ 是椭圆的内接三角形, P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 是椭圆的通径 (即是通过椭圆中心的弦), 证明:

$$D_{P_1P_2P_3}+D_{Q_1P_2P_3}+D_{Q_2P_3P_1}+D_{Q_3P_1P_2}=0. \tag{4.1.9}$$

证明　如图 4.1.7 所示. 不妨设椭圆的方程为 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, 三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(a\cos\alpha_i, b\sin\alpha_i)(i=1,2,3)$, 于是椭圆通径 P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 另一端点的坐标为 $Q_i(-a\cos\alpha_i, -b\sin\alpha_i)(i=1,2,3)$. 记 $P_{3+i}=P_i, \alpha_{3+i}=\alpha_i$, 则

$$2D_{P_1P_2P_3}=ab\sum_{i=1}^{3}(\cos\alpha_i\sin\alpha_{i+1}-\sin\alpha_i\cos\alpha_{i+1})=ab\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i),$$

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{3}D_{Q_iP_{i+1}P_{i+2}}=&ab\sum_{i=1}^{3}[(-\cos\alpha_i\sin\alpha_{i+1}+\sin\alpha_i\cos\alpha_{i+1})+(\cos\alpha_{i+1}\sin\alpha_{i+2}\\&-\cos\alpha_{i+2}\sin\alpha_{i+1})+(-\cos\alpha_{i+1}\sin\alpha_{i+2}+\cos\alpha_i\sin\alpha_{i+2})]\\=&ab\sum_{i=1}^{3}[\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_i)]\\=&ab\sum_{i=1}^{3}[\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})+\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)+\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})]\\=&-ab\sum_{i=1}^{n}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i),\end{aligned}$$

因此, 式 (4.1.9) 成立.

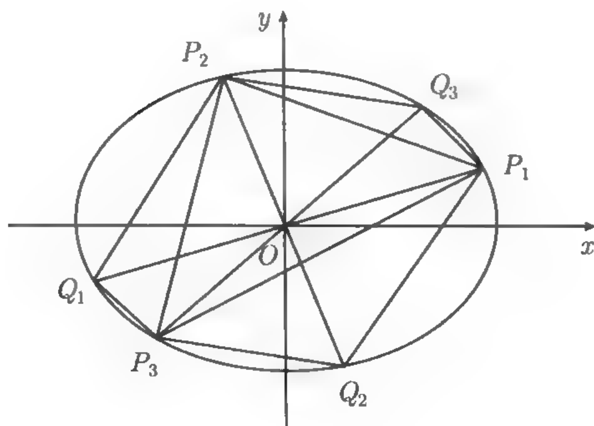


图 4.1.7

推论 4.1.1　设 $P_1P_2P_3$ 是圆的内接三角形, P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 是圆的直径.

(1) 若 $P_1P_2P_3$ 为锐角三角形, 则 $S_{P_1P_2P_3}=S_{Q_1P_2P_3}+S_{Q_2P_3P_1}+S_{Q_3P_1P_2}$;(2) 若 $P_1P_2P_3$ 为直角三角形, 则三个三角形的面积 $S_{Q_1P_2P_3}, S_{Q_2P_3P_1}, S_{Q_3P_1P_2}$ 中, 其中两

个等于零, 另一个等于 $S_{P_1P_2P_3}$; (3) 若 $P_1P_2P_3$ 为钝角三角形, 则三个三角形的面积 $S_{Q_1P_2P_3}, S_{Q_2P_3P_1}, S_{Q_3P_1P_2}$ 中, 其中钝角的通径另一端点所在的三角形的面积等于三角形 $P_1P_2P_3$ 的面积与另外两个面积的和.

证明 (1) 如图 4.1.8 所示. 在式 (4.1.9) 中, 注意到三角形 $Q_1P_2P_3, Q_2P_3P_1$, $Q_3P_1P_2$ 与三角形 $P_1P_2P_3$ 都是反向的即得.

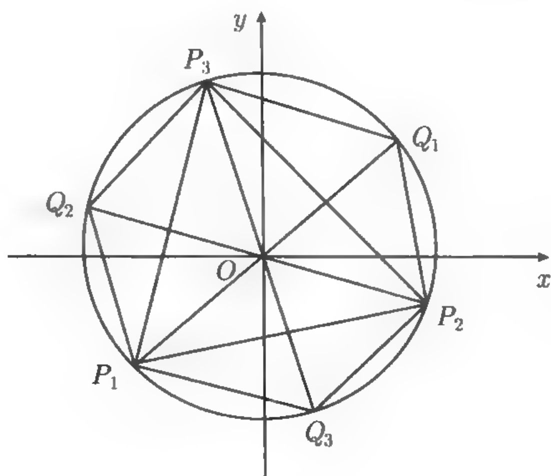


图 4.1.8

(2) 如图 4.1.9 所示. 不妨设 $\angle P_2P_1P_3 = 90°$, 此时点 P_3 与 Q_2 及 P_2 与 Q_3 均重合, 因此结论成立.

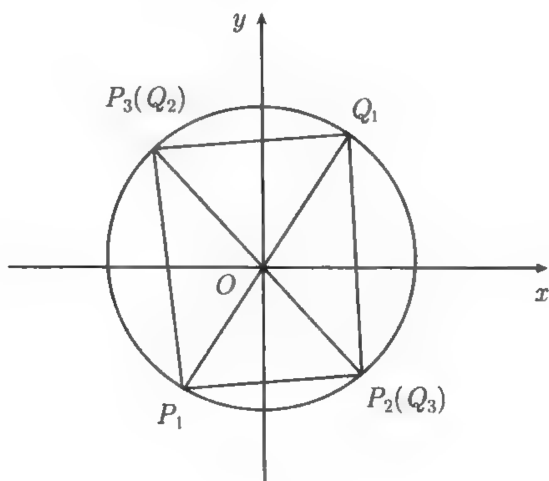


图 4.1.9

(3) 如图 4.1.10 所示. 不妨设 $P_1P_2P_3$ 为正向三角形, 且三角形 $\angle P_2P_1P_3 >$ $90°$, 则此时 $Q_1P_2P_3$ 为反向三角形, $Q_2P_3P_1$ 和 $Q_3P_1P_2$ 均为正向三角形, 故根据式 (4.1.9) 知

$$S_{Q_1P_2P_3} = S_{P_1P_2P_3} + S_{Q_2P_3P_1} + S_{Q_3P_1P_2},$$

因此结论成立.

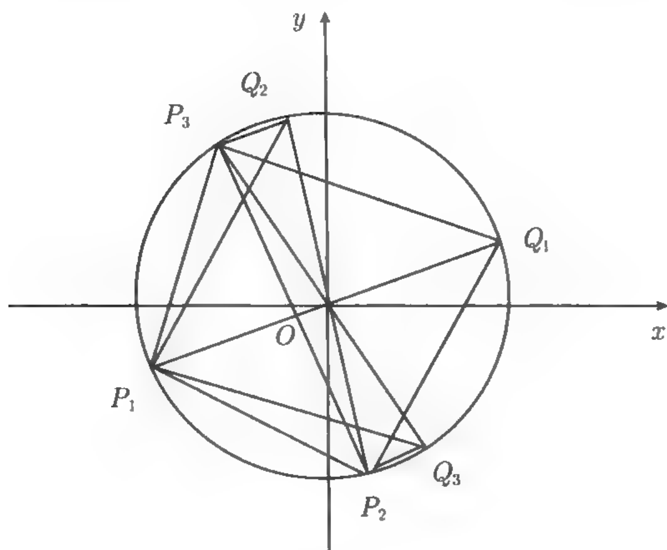


图 4.1.10

注 4.1.2 推论 4.1.1(1) 为1981 年中国安徽省芜湖市初中数学竞赛题.

定理 4.1.7 设 $P_1P_2P_3$ 是双曲线的内接三角形, P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 是通过双曲线中心的直线段且分别与双曲线相交于另一点 Q_1, Q_2, Q_3, 证明:

$$D_{P_1P_2P_3} + D_{Q_1P_2P_3} + D_{Q_2P_3P_1} + D_{Q_3P_1P_2} = 0. \tag{4.1.10}$$

证明 如图 4.1.11 所示. 不妨设双曲线的方程为 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, 三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(a\sec\alpha_i, b\tan\alpha_i)(i = 1, 2, 3)$, 于是直线段 P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 另一端点的坐标为 $Q_i(-a\sec\alpha_i, -b\tan\alpha_i)(i = 1, 2, 3)$. 从而

$$\begin{aligned}
2D_{P_1P_2P_3} =& ab\sum_{i=1}^{3}(\sec\alpha_i\tan\alpha_{i+1} - \tan\alpha_i\sec\alpha_{i+1}) \\
=& ab\sum_{i=1}^{3}\sec\alpha_i\sec\alpha_{i+1}(\sin\alpha_{i+1} - \sin\alpha_i), \\
2\sum_{i=1}^{3}D_{Q_iP_{i+1}P_{i+2}} =& ab\sum_{i=1}^{3}[(\tan\alpha_i\sec\alpha_{i+1} - \sec\alpha_i\tan\alpha_{i+1}) + (\sec\alpha_{i+1}\tan\alpha_{i+2} \\
& - \sec\alpha_{i+2}\tan\alpha_{i+1}) + (\sec\alpha_i\tan\alpha_{i+2} - \sec\alpha_{i+2}\tan\alpha_i)] \\
=& ab\sum_{i=1}^{3}[2\sec\alpha_i\sec\alpha_{i+1}(\sin\alpha_i - \sin\alpha_{i+1}) \\
& + \sec\alpha_{i+1}\sec\alpha_{i+2}(\sin\alpha_{i+2} - \sin\alpha_{i+1})] \\
=& ab\sum_{i=1}^{3}\sec\alpha_i\sec\alpha_{i+1}(\sin\alpha_i - \sin\alpha_{i+1}),
\end{aligned}$$

因此, 式 (4.1.10) 成立.

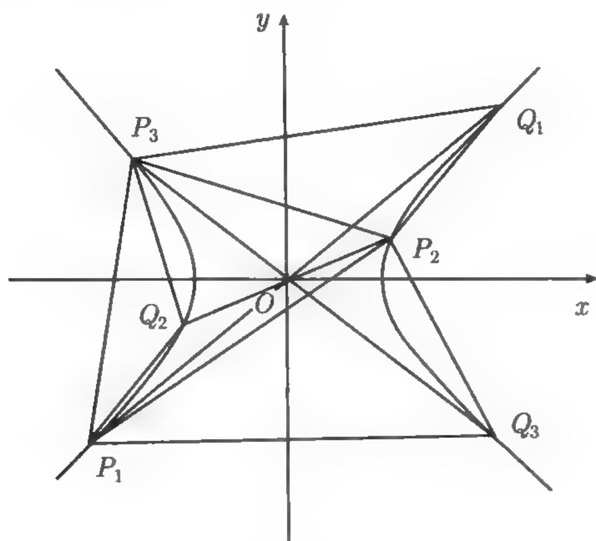


图 4.1.11

4.1.3 三角形有向面积公式在几何问题证明中的应用

例 4.1.1 连接四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 两对边中点的两线段交于点 M. 证明三角形 P_2MP_3 与 P_4MP_1 有向面积的和等于三角形 P_1MP_2 与 P_3MP_4 有向面积的和.

证明 如图 4.1.12 所示. 设四边形顶点的坐标为 $P_i(x_i,\ y_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, 于是 $P_1P_2P_3P_4$ 两对边中点的两线段交点的坐标为

$$M\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right).$$

所以

$$\begin{aligned}2D_{P_1MP_2}=&\left(x_1\cdot\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}-\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\cdot y_1\right)\\&+\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\cdot y_2-x_2\cdot\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)+(x_2y_1-x_1y_2)\\=&-\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)+\frac{1}{4}(x_1y_4-x_4y_1)+\frac{1}{4}(x_3y_2-x_2y_3).\end{aligned}$$

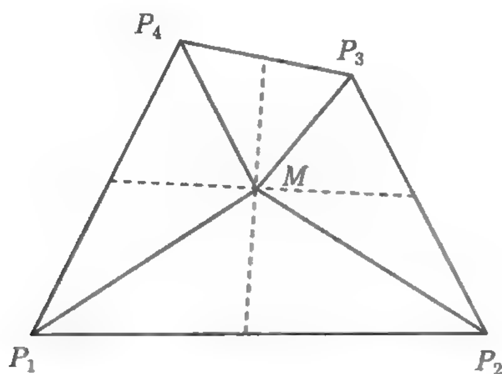


图 4.1.12 四边形中四个三角形的性质

同理

$$2D_{P_3MP_4}=-\frac{1}{2}(x_3y_4-x_4y_3)+\frac{1}{4}(x_3y_2-x_2y_3)+\frac{1}{4}(x_1y_4-x_4y_1),$$

于是

$$D_{P_1MP_2}+D_{P_3MP_4}=\frac{1}{4}[(x_1y_4-x_4y_1)+(x_3y_2-x_2y_3)-(x_1y_2-x_2y_1)-(x_3y_4-x_4y_3)].$$

类似地

$$D_{P_2MP_3}+D_{P_4MP_1}=\frac{1}{4}[(x_2y_1-x_1y_2)+(x_4y_3-x_3y_4)-(x_2y_3-x_3y_2)-(x_4y_1-x_1y_4)],$$

所以

$$D_{P_1MP_2}+D_{P_3MP_4}=D_{P_2MP_3}+D_{P_4MP_1}.$$

注意到三角形 $P_1MP_2, P_3MP_4, P_2MP_3$ 和 P_4MP_1 是同向的, 故

$$S_{P_1MP_2}+S_{P_3MP_4}=S_{P_2MP_3}+S_{P_4MP_1}.$$

例 4.1.2 证明：双曲线的切线与其两渐近线构成的三角形的面积等于双曲线两半轴的积.

证明 如图 4.1.13 所示. 不妨设双曲线的方程为 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, 切点为 $P(a\sec\alpha,\ b\tan\alpha)$. 于是双曲线的渐近线和切线的方程分别为

$$y=\pm\frac{b}{a}x \quad \text{和} \quad bx-a\sin\alpha\cdot y=ab\cos\alpha.$$

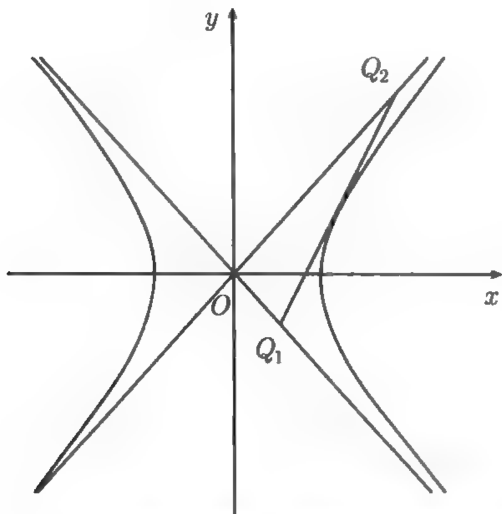


图 4.1.13 双曲线的切线与其两渐近线构成的三角形

求得渐近线与切线的交点

$$Q_1\left(\frac{a\cos\alpha}{1-\sin\alpha},\frac{b\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right),\quad Q_2\left(\frac{a\cos\alpha}{1+\sin\alpha},\frac{-b\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right).$$

于是

$$D_{OQ_1Q_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\cdot\frac{-b\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{a\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\cdot\frac{b\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)=-ab\Rightarrow S_{OQ_1Q_2}=ab.$$

例 4.1.3 已知凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的两对角线 P_1P_3 和 P_2P_4 相交于点 O. 证明: 若 $D^2_{P_2P_3O}=D_{P_1P_2O}D_{OP_3P_4}$, 则该四边形的两对边 P_1P_2, P_3P_4 相互平行.

证明 如图 4.1.14 所示. 不妨设四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的两对角线 P_1P_3 和 P_2P_4 交点 O 为坐标原点, 顶点的坐标为 $P_1(x_1,k_1x_1), P(x_2,k_2x_2), P_3(x_3,k_1x_3), P_4(x_4,k_2x_4)$. 由三角形有向面积公式得

$$\begin{aligned}2D_{P_2P_3O}=&x_2\cdot k_1x_3-k_2x_2\cdot x_3=(k_1-k_2)x_2x_3,\\2D_{P_1P_2O}=&x_1\cdot k_2x_2-x_2\cdot k_1x_1=(k_2-k_1)x_1x_2,\\2D_{OP_3P_4}=&x_3\cdot k_2x_4-x_4\cdot k_1x_3=(k_2-k_1)x_3x_4.\end{aligned}$$

依题设得 $x_2^2x_3^2=x_1x_2\cdot x_3x_4$, 于是 $x_4=x_2x_3/x_1$. 所以

$$k_{P_3P_4}=\frac{k_2x_4-k_1x_3}{x_4-x_3}=\frac{k_2\cdot x_2x_3/x_1-k_1x_3}{x_2x_3/x_1-x_3}=\frac{k_2x_2-k_1x_1}{x_2-x_1}=k_{P_1P_2},$$

从而四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的两对边 P_1P_2 与 P_3P_4 相互平行.

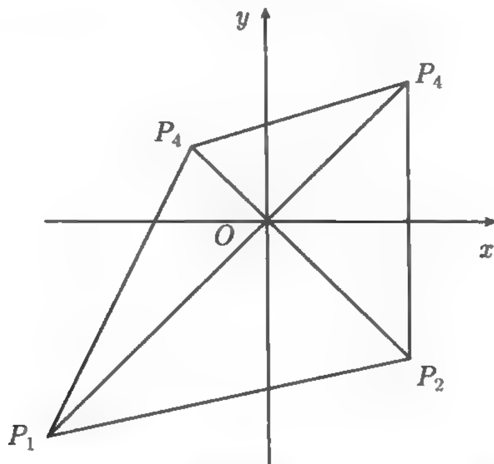


图 4.1.14 两对边相互平行的四边形

例 4.1.4 设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(a+R\cos\theta_i, b+R\sin\theta_i)$, l_i 是三角形 $P_1P_2P_3$ 外接圆 P_i 点的切线, Q_i 是 l_i 与 $l_{i+1}(i=1,2,3;l_4=l_1,\theta_4=\theta_1)$ 的交点. 证明

$$2D_{Q_1Q_2Q_3}\prod_{i=1}^{3}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}+D_{P_1P_2P_3}=0.$$

证明 不妨设 $a=0, b=0$. 于是由 l_i 和 l_{i+1} 的方程

$$\cos\theta_i\cdot x+\sin\theta_i\cdot y=R \quad 和 \quad \cos\theta_{i+1}\cdot x+\sin\theta_{i+1}\cdot y=R,$$

求得两切线的交点

$$Q_i\left(\frac{a\cos\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}}{\cos\dfrac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}},\frac{a\sin\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}}{\cos\dfrac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}}\right)\ (i=1,2,3).$$

于是

$$\begin{aligned}&2D_{Q_1Q_2Q_3}\prod_{i=1}^{3}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}\\=&a^2\sum_{i=1}^{3}\left(\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\sin\frac{\theta_{i+1}+\theta_{i+2}}{2}-\cos\frac{\theta_{i+1}+\theta_{i+2}}{2}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\right)\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_i}{2}\\=&a^2\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_{i+2}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_i}{2}=a^2\sum_{i=1}^{3}\sin(\theta_i-\theta_{i+1}),\end{aligned}$$

$$2D_{P_1P_2P_3}=a^2\sum_{i=1}^{3}(\cos\theta_i\sin\theta_{i+1}-\cos\theta_{i+1}\sin\theta_i)=a^2\sum_{i=1}^{3}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i).$$

所以

$$2D_{Q_1Q_2Q_3}\prod_{i=1}^{3}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}+D_{P_1P_2P_3}=0.$$

例 4.1.5(第 8 届国际数学奥林匹克题, 1966 年)　设 Q_i 是三角形 $P_1P_2P_3$ 的边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 上任意一点, 证明: 三角形 $P_1Q_1Q_3,P_2Q_2Q_1,P_3Q_3Q_2$ 中至少有一个三角形的面积不大于三角形 $P_1P_2P_3$ 面积的 1/4.

证明　如图 4.1.15 所示. 不妨设三角形 $P_1P_2P_3$ 为正向三角形, 其顶点的坐标为 $P_1(0,0),P_2(a,0)$, $P_3(b,c)(a,c>0)$, 边上的点的坐标为 $Q_1(\lambda_1a,0),Q_2(\lambda_2a+(1-\lambda_2)b,(1-\lambda_2)c),Q_3(\lambda_3b,\lambda_3c)$ $(0<\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3<1)$, 则三角形 $P_1Q_1Q_3,P_2Q_2Q_1$, $P_3Q_3Q_2$ 均为正向三角形. 于是

$$\begin{aligned}2S_{P_1P_2P_3}=&2D_{P_1P_2P_3}=ac,\\2S_{P_1Q_1Q_3}=&2D_{P_1Q_1Q_3}=\lambda_1\lambda_3ac,\\2S_{P_2Q_2Q_1}=&2D_{P_2Q_2Q_1}=(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)ac,\\2S_{P_3Q_3Q_2}=&2D_{P_3Q_3Q_2}=\lambda_2(1-\lambda_3)ac.\end{aligned}$$

令 $f(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=64\lambda_1(1-\lambda_1)\lambda_2(1-\lambda_2)\lambda_3(1-\lambda_3)$, 由于 $\lambda_i+(1-\lambda_i)=1(i=1,2,3)$, 所以当且仅当 $\lambda_i=1-\lambda_i$ 即 $\lambda_i=1/2(i=1,2,3)$ 时, $f(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 的最大值为 1:

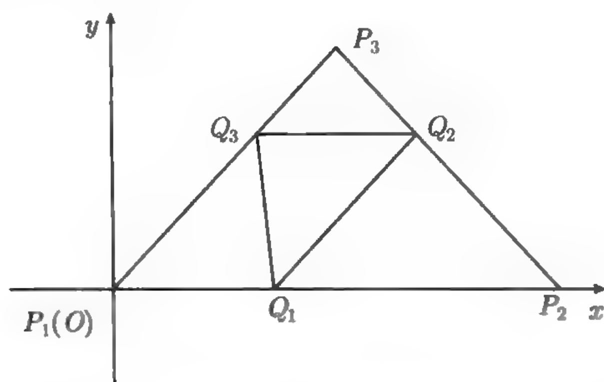


图 4.1.15 三角形被三边上的点的连线所剖分

现假设三角形 $P_1Q_1Q_3, P_2Q_2Q_1, P_3Q_3Q_2$ 的面积均大于三角形 $P_1P_2P_3$ 面积的 1/4, 则

$$4\lambda_1\lambda_3 ac > ac, \quad 4(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)ac > ac, \quad 4\lambda_2(1-\lambda_3)ac > ac,$$

即

$$4\lambda_1\lambda_3 > 1, \quad 4(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) > 1, \quad 4\lambda_2(1-\lambda_3) > 1,$$

于是

$$64\lambda_1(1-\lambda_1)\lambda_2(1-\lambda_2)\lambda_3(1-\lambda_3) > 1,$$

这与 $f(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 的最大值为 1 相矛盾, 从而三角形 $P_1Q_1Q_3, P_2Q_2Q_1, P_3Q_3Q_2$ 中至少有一个三角形的面积不大于三角形 $P_1P_2P_3$ 面积的 1/4.

定理 4.1.8 设三角形 $P_1P_2P_3$ 外接圆的半径为 $R, P_{3+i} = P_i$, 证明:

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{3} d^2_{P_iP_{i+1}} - 4\sqrt{3}S_{P_1P_2P_3} < 8R^2. \tag{4.1.11}$$

证明 如图 4.1.16 所示. 不妨设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(R\cos\theta_i, R\sin\theta_i)(i=1,2,3)$; $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi$. 于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} d^2_{P_iP_{i+1}} - 4\sqrt{3}S_{P_1P_2P_3} \\
=&R^2\sum_{i=1}^{3}[(\cos\theta_{i+1}-\cos\theta_i)^2 + (\sin\theta_{i+1}-\sin\theta_i)^2 \\
&-2\sqrt{3}(\cos\theta_i\sin\theta_{i+1} - \cos\theta_{i+1}\sin\theta_i)] \\
=&2R^2\sum_{i=1}^{3}[1-\cos(\theta_{i+1}-\theta_i) - \sqrt{3}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)] \\
=&8R^2\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\sin\left(\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}-\frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

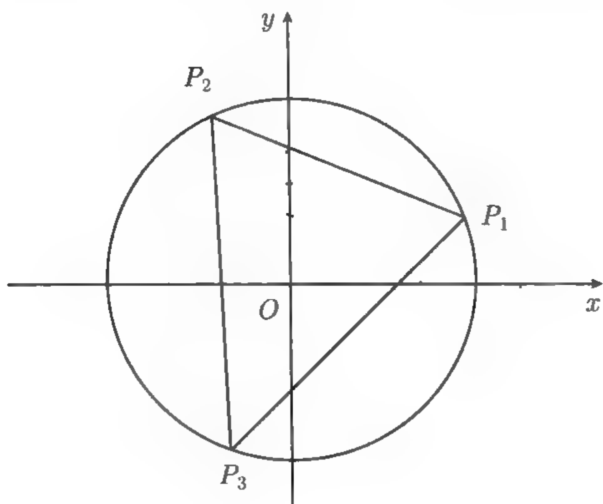


图 4.1.16

令$f(\alpha,\beta,\gamma) = \sin\alpha\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\beta\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\gamma\sin\left(\gamma-\dfrac{\pi}{3}\right)$, 其中 $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant\pi$, $-\pi\leqslant\gamma\leqslant 0$, $\alpha+\beta+\gamma=0$, 则

$f=\sin\alpha\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\beta\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin(\alpha+\beta)\sin\left(\alpha+\beta-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant\pi$. 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}=2\sin(2\alpha+\beta)\cos\left(\beta+\dfrac{\pi}{3}\right)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial\beta}=2\sin(\alpha+2\beta)\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=0\end{cases}$$

求得 f 定义域中的内点为

$$\begin{cases}\alpha=\pi/6,\\ \beta=\pi/6,\\ \gamma=-\pi/3,\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha=\pi/3,\\ \beta=\pi/3,\\ \gamma=-2\pi/3,\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha=\pi/6,\\ \beta=2\pi/3,\\ \gamma=-5\pi/6,\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha=2\pi/3,\\ \beta=\pi/6,\\ \gamma=-5\pi/6.\end{cases}$$

又 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}=4\cos(2\alpha+\beta)\cos\left(\beta+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}=2\cos\left(2\alpha+2\beta+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}=4\cos(\alpha+2\beta)\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(1) 当 $\alpha=\pi/6,\beta=\pi/6,\gamma=-\pi/3$ 时, $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}=0, B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}=-2, C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}=0$, 于是 $B^2-AC=4>0$, 故函数 f 在 $\alpha=\pi/6,\beta=\pi/6,\gamma=-\pi/3$ 处无极值.

(2) 当 $\alpha=\pi/3,\beta=\pi/3,\gamma=-2\pi/3$ 时, $A=C=2>0, B=1, B^2-AC=-3<0$, 故 f 在 $\alpha=\pi/3,\beta=\pi/3,\gamma=-2\pi/3$ 处取得极小值, 且极小值为 0.

(3) 当 $\alpha=\pi/6,\beta=2\pi/3,\gamma=-5\pi/6$ 时, $A=4, B=4, C=0, B^2-AC=16>0$, 故函数 f 在 $\alpha=\pi/6,\beta=2\pi/3,\gamma=-5\pi/6$ 处无极值;

同理, f 在 $\alpha=2\pi/3, \beta=\pi/6, \gamma=-5\pi/6$ 处无极值.

(4) 当 $\alpha=0(0\leqslant\beta\leqslant\pi)$ 时, $f=\sin\beta\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\beta\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin^2\beta$, 此时 f 的最大值为 1, 最小值为 0.

类似地, 可以求得 $\alpha=\pi(0\leqslant\beta\leqslant\pi); \beta=0(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$ 和 $\beta=\pi(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$ 时, f 的最大值为 1, 最小值为 0.

从而 f 在闭区域 $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant\pi$ 上的最大值为 1, 最小值为 0, 且最小值可以在区域内取得, 而最大值只能在边界上取得. 注意到 $0<\theta_{i+1}-\theta_i<\pi$, 由上述结论可得

$$\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\sin\left(\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$

的最小值为 0, 上确界为 1, 故式 (4.1.9) 成立.

注 4.1.3 式 (4.1.9) 的左式即著名的 **Weitzentock** 不等式.

4.2 平面多边形有向面积公式及其应用

本节主要将三角形有向面积公式推广到平面多边形的情形. 首先, 利用三角形有向面积公式和数学归纳法给出多边形有向面积公式; 其次, 利用多边形有向面积公式给出一些面积问题、定值问题和一些数学竞赛题的证明或推广, 包括著名的默比乌斯定理; 最后, 讨论曲边形有向面积与多边形有向面积之间的关系, 从而利用极限和多边形有向面积公式证明椭圆面积公式.

4.2.1 多边形有向面积公式

定义 4.2.1 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是平面 n 边形. 如果 $P_1\to P_2\to\cdots\to P_n\to P_1$ 的绕向是逆时针 (顺时针) 的, 则称 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正向 (反向)n 边形.

定义 4.2.2 设 $S_{P_1P_2\cdots P_n}$ 表示平面 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的面积, 则称

$$D_{P_1P_2\cdots P_n}=\pm S_{P_1P_2\cdots P_n}$$

为 $P_1P_2\cdots P_n$ 的有向面积, 其中当 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正向 n 边形时取 "+" 号; 当 $P_1P_2\cdots P_n$ 为反向 n 边形时取 "−" 号.

引理 4.2.1 每个 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ $(n\geqslant4)$ 都可以用其内部的一条对角线将它分成一个三角形和一个边数不小于 $n-3$ 且不大于 $n-1$ 的多边形的和; 且若 $P_1P_2\cdots P_n$ $(n\geqslant4)$ 是正向的, 那么被分成的三角形和多边形的顶点按原多边形顶点下标的大小顺序排列仍都是正向的.

证明 由于每个多边形都可以被其内部彼此不相交的对角线分成若干个三角形的和. 因此对 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ $(n\geqslant4)$ 的这种对角线的三角形剖分, 适当指定

某三角形后将其余的三角形合并, 可以得到一个边数不小于 $n-3$ 且不大于 $n-1$ 的多边形. 于是, 每个 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ $(n\geqslant 4)$ 都可以用其内部的一条对角线将它分成一个三角形和一个边数不小于 $n-3$ 且不大于 $n-1$ 的多边形的和.

显然, 若 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ $(n\geqslant 4)$ 是正向的, 被分成的三角形和多边形的顶点按原多边形顶点下标的大小顺序排列仍都是正向的.

定理 4.2.1　设 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则该 n 边形的有向面积

$$D_{P_1P_2\cdots P_n}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i),\tag{4.2.1}$$

其中 $x_{n+1}=x_1,y_{n+1}=y_1$.

证明　当 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 为反向多边形时, 则 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正向的. 由于 $D_{P_1P_2\cdots P_n}=-D_{P_nP_{n-1}\cdots P_1}$, 因此只需证明 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正向多边形时, 式 (4.2.1) 成立.

用数学归纳法. 当 $n=3$ 时, 根据定理 10.1 结论成立. 假设结论对边数不超过 k 的正向多边形成立, 则当 $n=k+1$ 时, 根据引理 4.2.1, 不妨设 $k+1$ 边形 $P_1P_2\cdots P_kP_{k+1}$ 被其内部的对角线 P_1P_3 分成正向三角形 $P_1P_2P_3$ 和正向多边形 M 之和.

(1) 如图 4.2.1 所示. 当 M 为 k 边形 $P_1P_3\cdots P_kP_{k+1}$ 时, 根据定义 4.2.2 和面积的可加性以及归纳假设, 得

$$\begin{aligned}&D_{P_1P_2\cdots P_kP_{k+1}}=S_{P_1P_2P_3}+S_{P_1P_3\cdots P_kP_{k+1}}\\=&\frac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)]\\&+\frac{1}{2}[(x_1y_3-x_3y_1)+(x_3y_4-x_4y_3)+\cdots\\&+(x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k)+(x_{k+1}y_1-x_1y_{k+1})\\=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k+1}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i).\end{aligned}$$

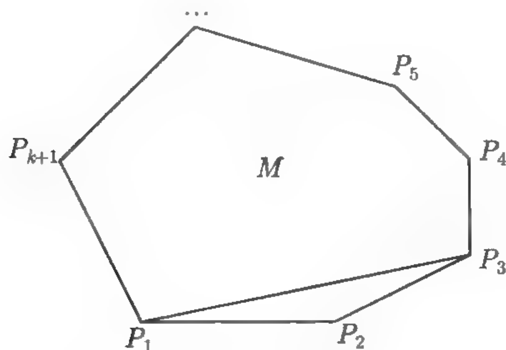


图 4.2.1　M 为 k 边形

(2) 如图 4.2.2 所示. 当 M 为 $k-1$ 边形时, 不妨设 M 为 $P_1P_4\cdots P_kP_{k+1}$. 此时, P_1,P_3,P_4 共线, 于是

$$(x_1y_3-x_3y_1)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)=0,$$

所以

$$\begin{aligned}D_{P_1P_2\cdots P_kP_{k+1}}=&S_{P_1P_2P_3}+S_{P_1P_4\cdots P_kP_{k+1}}\\=&\frac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)]\\&+\frac{1}{2}[(x_1y_3-x_3y_1)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)]\\&+\frac{1}{2}[(x_1y_4-x_4y_1)+(x_4y_5-x_5y_4)+\cdots\\&+(x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k)+(x_{k+1}y_1-x_1y_{k+1})\\=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k+1}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i).\end{aligned}$$

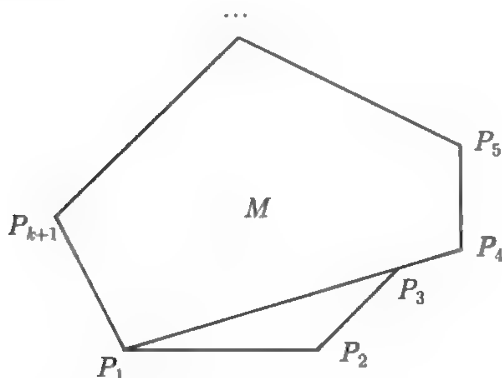


图 4.2.2 M 为 $k-1$ 边形

(3) 当 M 为 $k-2$ 边形时, 仿 (2) 可证式 (4.2.2) 成立.

综上所述, 结论对任意正向 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 成立.

4.2.2 多边形有向面积公式的应用

例 4.2.1 如图 4.2.3 所示, 求内接于半径为 R 的圆的正五星形 $P_1Q_1P_2Q_2P_3Q_3P_4Q_4P_5Q_5$ 的有向面积和面积.

解 不妨设正五星形在圆上的顶点的坐标为 $P_k\left(R\cos\dfrac{2k\pi}{5},R\sin\dfrac{2k\pi}{5}\right)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$. 于是 P_kP_{k+2} 的方程为

$$\begin{aligned}&R\left[\sin\frac{2(k+2)\pi}{5}-\sin\frac{2k\pi}{5}\right]x+R\left[\cos\frac{2k\pi}{5}-\cos\frac{2(k+2)\pi}{5}\right]y\\=&R^2\left[\sin\frac{2(k+2)\pi}{5}\cos\frac{2k\pi}{5}-\cos\frac{2(k+2)\pi}{5}\sin\frac{2k\pi}{5}\right],\end{aligned}$$

即

$$\cos\frac{2(k+1)\pi}{5}\cdot x+\sin\frac{2(k+1)\pi}{5}\cdot y=R\cos\frac{2\pi}{5}.$$

分别令 $k=5,\ 1$, 得 P_5P_2 和 P_1P_3 的直线方程

$$\cos\frac{2\pi}{5}\cdot x+\sin\frac{2\pi}{5}\cdot y=R\cos\frac{2\pi}{5},$$

$$\cos\frac{4\pi}{5}\cdot x+\sin\frac{4\pi}{5}\cdot y=R\cos\frac{2\pi}{5}.$$

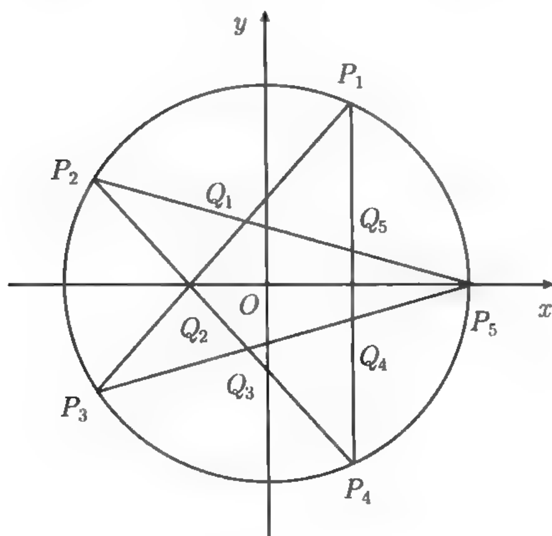


图 4.2.3　正五星形

于是求得 P_1P_3 和 P_2P_4 交点的坐标

$$Q_1\left(\frac{R\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}},\frac{R\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}\right).$$

所以

$$\begin{aligned}&D_{P_1Q_1P_2Q_2P_3Q_3P_4Q_4P_5Q_5}\\=&5D_{OP_1Q_1}=5R_2\left(\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}-\frac{\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}\cdot\sin\frac{2\pi}{5}\right)\\=&5R^2\tan\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}.\end{aligned}$$

例 4.2.2(1991 年苏联教委推荐试题)　设 AG,BE,CF 为锐角三角形的高, H 为垂心. 已知 $S_{BGHF}=S_{GCEH}$, 求证三角形 ABC 为等腰三角形.

证明　如图 4.2.4 所示. 设三角形顶点的坐标为 $A(0,a),B(-b,0),C(c,0)(abc>0)$, 于是 G 点的坐标为 $G(0,0),AB,CF,AC,BE$ 的方程分别为

$$-x/b+y/a=1, \tag{4.2.2}$$

$$x/c+y/a=1, \tag{4.2.3}$$

$$x/a+y/b=c/a, \tag{4.2.4}$$

$$x/a-y/c=-b/a. \tag{4.2.5}$$

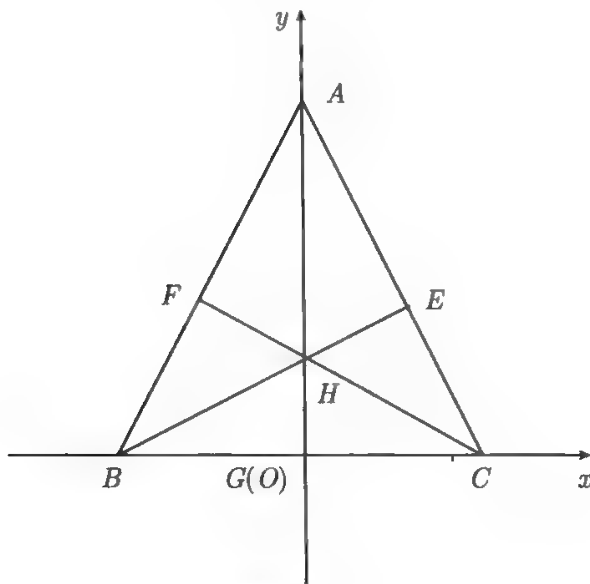


图 4.2.4

式 (4.2.3) 和 (4.2.5)、式 (4.2.2) 和 (4.2.3)、式 (4.2.4) 和 (4.2.5) 联立, 分别求得 H, F, E 点的坐标

$$H\left(0,\frac{bc}{a}\right),F\left(\frac{b(bc-a^2)}{a^2+b^2},\frac{ab(b-c)}{a^2+b^2}\right),\quad E\left(\frac{(a^2-bc)c}{a^2+c^2},\frac{ac(c-b)}{a^2+c^2}\right).$$

由多边形有向面积公式及 $S_{BGHF}=S_{GCEH}$, 得

$$\begin{aligned}&-\frac{b^2c(bc-a^2)}{a(a^2+b^2)}+\frac{ab^2(b-c)}{a^2+b^2}=\frac{ac^2(c-b)}{a^2+c^2}+\frac{bc^2(a^2-bc)}{a(a^2+c^2)}\\&\Rightarrow\frac{b^3(a^2-c^2)}{a^2+b^2}=\frac{c^3(a^2-b^2)}{a^2+c^2}\\&\Rightarrow(b-c)[a^4(b^2+c^2-bc)+b^3c^3]=0\Rightarrow b-c=0\Rightarrow b=c,\end{aligned}$$

所以三角形 ABC 为等腰三角形.

例 4.2.3 设 $P_1P_2\cdots P_6$ 是凸六边型, Q_i 是其对角线 P_iP_{i+2} 的分点使 $P_iQ_i/Q_iP_{i+2}=\lambda(i=1,2,\cdots,6)$, 且 $Q_1Q_2\cdots Q_6$ 为六边形, 证明:

$$D_{Q_1Q_2\cdots Q_6}=\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}D_{P_1P_2\cdots P_6},\quad S_{Q_1Q_2\cdots Q_6}=\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}S_{P_1P_2\cdots P_6}.$$

证明　设六边形 $P_1P_2\cdots P_6$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,6)$, 于是 $Q_1Q_2\cdots Q_6$ 顶点的坐标为 $Q_i\left(\dfrac{x_i+\lambda x_{i+2}}{1+\lambda},\dfrac{y_i+\lambda y_{i+2}}{1+\lambda}\right)(i=1,2,\cdots,6)$. 根据多边形有向面积公式得

$$\begin{aligned}
&2(1+\lambda)^2D_{Q_1Q_2\cdots Q_6}\\
=&\sum_{i=1}^{6}[(x_i+\lambda x_{i+2})(y_{i+1}+\lambda y_{i+3})-(x_{i+1}+\lambda x_{i+3})(y_i+\lambda y_{i+2})]\\
=&\sum_{i=1}^{6}[(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+\lambda(x_iy_{i+3}-x_{i+3}y_i)+\lambda(x_{i+2}y_{i+1}-x_{i+1}y_{i+2})\\
&+\lambda^2(x_{i+2}y_{i+3}-x_{i+3}y_{i+2})]\\
=&\sum_{i=1}^{6}[(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)-\lambda(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+\lambda^2(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)]\\
=&(1-\lambda+\lambda^2)\sum_{i=1}^{6}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)=2(1-\lambda+\lambda^2)D_{P_1P_2\cdots P_6},
\end{aligned}$$

又因为 $1-\lambda+\lambda^2>0$, 所以

$$D_{Q_1Q_2\cdots Q_6}=\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}D_{P_1P_2\cdots P_6},\quad S_{Q_1Q_2\cdots Q_6}=\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}S_{P_1P_2\cdots P_6}.$$

注 4.2.1　特别地, 当 $\lambda=1$, 即 Q_i 是对角线 P_iP_{i+2} 的中点时, 例 4.2.3 即为1975 年第 9 届全苏数学奥林匹克题.

例 4.2.4(1996 年世界城市国际数学联赛题)　设 Q_i 是六边型 $P_1P_2\cdots P_6$ 的各边 P_iP_{i+1} 的中点, 则

$$D_{P_1P_2\cdots P_6}=\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{6}D_{P_iP_{i+1}Q_{i+2}}.\tag{4.2.6}$$

证明　设六边形 $P_1P_2\cdots P_6$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,6)$, 于是各边中点的坐标为 $Q_i\left(\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2},\dfrac{y_i+y_{i+1}}{2}\right)(i=1,2,\cdots,6)$. 根据多边形有向面积公式得

$$\begin{aligned}
4\sum_{i=1}^{6}D_{P_iP_{i+1}Q_{i+2}}=&\sum_{i=1}^{6}[2(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+x_{i+1}(y_{i+2}+y_{i+3})\\
&-(x_{i+2}+x_{i+3})y_{i+1}+(x_{i+2}+x_{i+3})y_i-x_i(y_{i+2}+y_{i+3})]\\
=&\sum_{i=1}^{6}[2(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+(x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1})\\
&+(x_{i+1}y_{i+3}-x_{i+3}y_{i+1})+(x_{i+2}y_i-x_iy_{i+2})+(x_{i+3}y_i-x_iy_{i+3})]
\end{aligned}$$

$$=3\sum_{i=1}^{6}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)=6D_{P_1P_2\cdots P_6},$$

所以式 (4.2.6) 成立.

定理 4.2.2 设双曲线的半轴为 a 和 b, 过双曲线上一点 P 作其二渐近线的平行线, 两条渐近线和二平行线构成一平行四边形, 证明该平行四边形的面积等于两半轴乘积的一半.

证明 如图 4.2.5 所示. 不妨设双曲线的方程为 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, 点 P 的坐标为 $P(a\sec t,\ b\tan t)$. 于是双曲线的渐近线和与平行于渐近线的两直线的方程分别为

$$y=\pm\frac{b}{a}x \quad 和 \quad y=\pm\frac{b}{a}x+b(\tan t\mp\sec t).$$

求得渐近线与切线的交点

$$Q_1\left(\frac{a}{2}(\sec t-\tan t),\frac{b}{2}(-\sec t+\tan t)\right),\quad Q_2\left(\frac{a}{2}(\sec t+\tan t),\frac{b}{2}(\sec t+\tan t)\right).$$

于是

$$\begin{aligned}S_{OQ_1PQ_2}=&D_{OQ_1PQ_2}\\=&\frac{1}{2}\left[\frac{a}{2}(\sec t-\tan t)\cdot b\tan t-a\sec t\cdot\frac{b}{2}(-\sec t+\tan t)\right]\\&+\frac{1}{2}\left[a\sec t\cdot\frac{b}{2}(\sec t+\tan t)-\frac{a}{2}(\sec t+\tan t)\cdot b\tan t\right]\\=&\frac{1}{2}ab.\end{aligned}$$

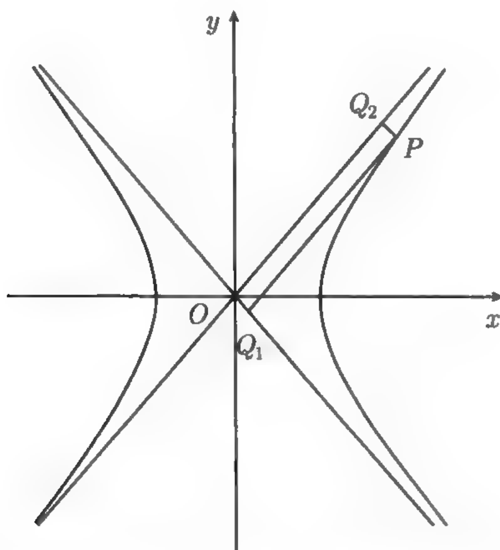


图 4.2.5 以两渐近线为边且一顶点在过双曲线上的平行四边形

定理 4.2.3 设有两抛物线 $L_1: y=x^2$ 和 $L_2: y=x^2+b^2\ (b>0)$. (1) 在 L_1 上任取一点 $P_0(x_0,x_0^2)$, 作 L_2 的切线, 切点为 Q_0,R_0, 证明三角形 $P_0Q_0R_0$ 的有向面积

(面积) 恒为定值; (2) 在 L_1 上任取两点 $P_1(x_1, x_1^2), P_2(x_2, x_2^2)$, 使 $x_2 - x_1 = h < 2b$, 过 P_1, P_2 作 L_2 的切线, 切点分别为 $Q_1, R_1; Q_2, R_2$(均按横坐标相同大小顺序排列), 证明: 对固定的 h, 四边形 $Q_1Q_2R_1R_2$ 的有向面积 (面积) 恒为定值.

证明　(1) 如图 4.2.6 所示. 设切点的坐标为 (X, Y). 将切线的方程

$$y = 2X(x - x_0) + x_0^2$$

代入 L_2 中得

$$2X(x - x_0) + x_0^2 = x^2 + b^2,$$

即

$$x^2 - 2Xx + (b^2 + 2Xx_0 - x_0^2) = 0.$$

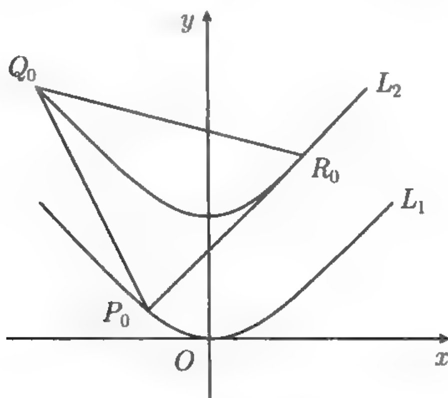


图 4.2.6　两平行抛物线的切点三角形

依题设

$$\Delta = 4X^2 - 4(b^2 + 2Xx_0 - x_0^2) = 4[X^2 - 2x_0X + (x_0^2 - b^2)] = 0,$$

解得

$$X = x_0 \pm b.$$

故得切点的坐标为

$$Q_0(x_0 - b, (x_0 - b)^2 + b^2), \quad R_0(x_0 + b, (x_0 + b)^2 + b^2).$$

于是

$$\begin{aligned}2D_{P_0Q_0R_0} =& x_0[(x_0 - b)^2 + b^2] - (x_0 - b)x_0^2 + (x_0 - b)[(x_0 + b)^2 + b^2] \\ & - (x_0 + b)[(x_0 - b)^2 + b^2] + (x_0 + b)x_0^2 - x_0[(x_0 + b)^2 + b^2] \\ =& 2bx_0^2 - b(x_0 + b)^2 - b(x_0 - b)^2 - 2b^3 = -4b^3,\end{aligned}$$

所以三角形 $P_0Q_0R_0$ 的有向面积 (面积) 恒为定值.

(2) 如图 4.2.7 所示. 由 (1) 类似地可以得到切点的坐标

$$Q_1(x_1-b,(x_1-b)^2+b_2),\quad R_1(x_1+b,(x_1+b)^2+b^2);$$
$$Q_2(x_2-b,(x_2-b)^2+b_2),\quad R_2(x_2+b,(x_2+b)^2+b^2).$$

于是

$$\begin{aligned}2D_{Q_1Q_2R_1R_2}=&(x_1-b)[(x_2-b)^2+b^2]-(x_2-b)[(x_1-b)^2+b^2]\\&+(x_2-b)[(x_1-b)^2+b^2]-(x_1+b)[(x_2-b)^2+b^2]\\&+(x_1+b)[(x_2+b)^2+b^2]-(x_1+b)[(x_2-b)^2+b^2]\\&+(x_2+b)[(x_1-b)^2+b^2]-(x_1-b)[(x_2+b)^2+b^2]\\=&-2b(x_1-b)^2 2b(x_1+b)^2+2b(x_2+b)^2+2b(x_1-b)^2\\=&8b^2(x_2-x_1)=8b^2h,\end{aligned}$$

所以, 对固定的 h, 四边形 $Q_1Q_2R_1R_2$ 的有向面积 (面积) 恒为定值.

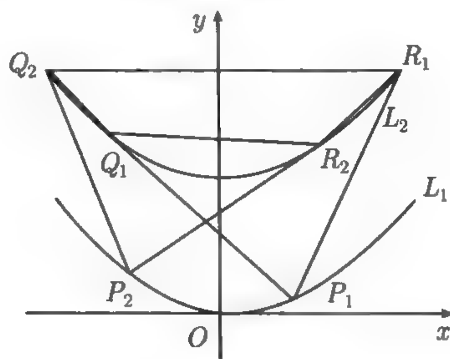


图 4.2.7 两平行抛物线的切点四边形

定理 4.2.4 如图 4.2.8 所示. 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 设抛物线内接 n 边形, l_i 是抛物线过 P_i 点的切线, Q_i 是 l_i 与 $l_{i+1}(i=1,2,\cdots,n;l_{n+1}=l_1)$ 的交点. 证明:

$$S_{P_1P_2\cdots P_n}=2S_{Q_1Q_2\cdots Q_n}.$$

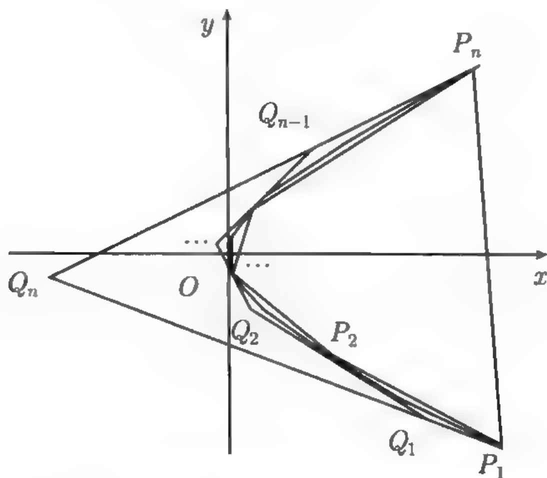


图 4.2.8 抛物线内接 n 边形的性质

证明 不妨设抛物线的参数坐标方程为

$$L: x=\frac{a\cos\theta}{1-\cos\theta},\quad y=\frac{a\sin\theta}{1-\cos\theta},$$

切点的坐标为

$$P_i\left(\frac{a\cos\theta_i}{1-\cos\theta_i},\frac{a\sin\theta_i}{1-\cos\theta_i}\right)=P_i\left(\frac{a}{2}\left(\cot^2\frac{\theta_i}{2}-1\right),a\cot\frac{\theta_i}{2}\right)(i=1,2,\cdots,n).$$

于是

$$y'_x=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{a\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{a\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)}=\frac{\dfrac{a\cos\theta\cdot(1-\cos\theta)-a\sin\theta\cdot\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}}{\dfrac{-a\sin\theta\cdot(1-\cos\theta)-a\cos\theta\cdot\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}}$$
$$=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\tan\frac{\theta}{2}.$$

分别求得切线 l_i 和 l_{i+1} 的方程

$$y=\tan\frac{\theta_i}{2}\cdot x+\frac{a}{2}\left(\cot\frac{\theta_i}{2}-\tan\frac{\theta_i}{2}\right)\quad 和\quad y=\tan\frac{\theta_{i+1}}{2}\cdot x+\frac{a}{2}\left(\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}-\tan\frac{\theta_{i+1}}{2}\right)$$

两式联立求得交点的坐标

$$Q_i\left(\frac{a}{2}\left(\cot\frac{\theta_i}{2}\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}-1\right),\frac{a}{2}\left(\cot\frac{\theta_i}{2}+\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}\right)\right)(i=1,2,\cdots,n).$$

于是由多边形有向面积公式得

$$\begin{aligned}
&4D_{P_1P_2\cdots P_n}\\
=&a^2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\cot^2\frac{\theta_i}{2}-1\right)\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}-\left(\cot^2\frac{\theta_{i+1}}{2}-1\right)\cot\frac{\theta_i}{2}\right]\\
=&a^2\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\theta_i}{2}\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}\left(\cot\frac{\theta_i}{2}-\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}\right),\\
&8D_{Q_1Q_2\cdots Q_n}\\
=&a^2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\cot\frac{\theta_i}{2}\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}-1\right)\left(\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}+\cot\frac{\theta_{i+2}}{2}\right)\right.\\
&\left.-\left(\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}\cot\frac{\theta_{i+2}}{2}-1\right)\left(\cot\frac{\theta_i}{2}+\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}\right)\right]\\
=&a^2\sum_{i=1}^{n}\left(\cot\frac{\theta_i}{2}\cot^2\frac{\theta_{i+1}}{2}-\cot^2\frac{\theta_{i+1}}{2}\cot\frac{\theta_{i+2}}{2}\right)\\
=&a^2\sum_{i=1}^{n}\left(\cot\frac{\theta_i}{2}\cot^2\frac{\theta_{i+1}}{2}-\cot^2\frac{\theta_i}{2}\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$=a^2\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\theta_i}{2}\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}\left(\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}-\cot\frac{\theta_i}{2}\right).$$

于是

$$4D_{P_1P_2\cdots P_n}+8D_{Q_1Q_2\cdots Q_n}=0,$$

所以

$$S_{P_1P_2\cdots P_n}=2S_{Q_1Q_2\cdots Q_n}.$$

注 4.2.2 当 $n=3$ 时, 即为著名的**默比乌斯定理**.

定理 4.2.6 设六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 的三对对顶点连线都把其面积分成两个相等的部分, 求证: $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 的三对角线 P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6 相交于一点.

证明 如图 4.2.9 所示. 不妨设 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 是正向六边形且其顶点坐标为 $P_i(x_i, y_i)(i=1,2,3,4,5,6)$, 对角线 P_2P_5, P_3P_6 的交点坐标为 $P(x,y)$, 则由 $D_{PP_1P_2P_3P_4}=D_{PP_4P_5P_6P_1}$ 可得

$$(y_1-y_4)x+(x_4-x_1)y+(x_1y_4-x_4y_1)+(D_{P_1P_2P_3P_4}-D_{P_4P_5P_6P_1})=0,$$

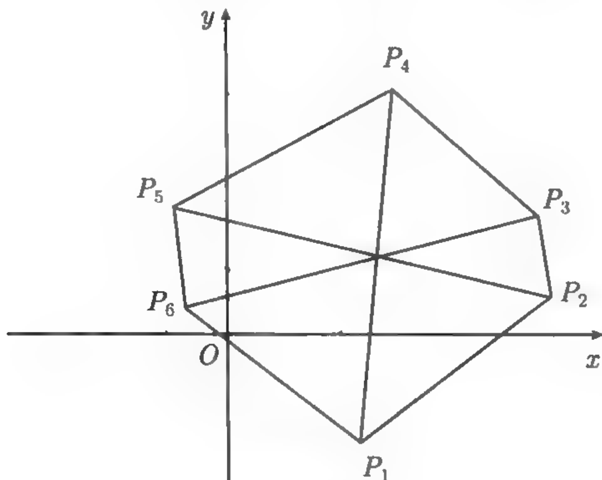


图 4.2.9

由于 P_1P_4 把六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 的面积分成两个相等的部分, 所以 $D_{P_1P_2P_3P_4}=D_{P_4P_5P_6P_1}$. 于是

$$(y_1-y_4)x+(x_4-x_1)y+(x_1y_4-x_4y_1)=0,$$

这说明 P 点的坐标满足对角线 P_1P_4 的直线方程, 因此 P 是三对角线 P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6 的交点.

4.2.3 曲边形有向面积与多边形有向面积之间的关系

定义 4.2.3 如果 L 为平面简单闭曲线, 则称 L 所围成的图形为平面曲边形 L, 并称 L 为平面曲边形的边界.

如果行人绕平面边界曲线 L 一周, 平面曲边形 L 始终在行人的左侧, 则称平面曲边形 L 为正向的; 如果始终在行人的右侧, 则称平面曲边形 L 为反向的.

定义 4.2.4 设 S_L 表示平面曲边形 L 的面积, 则称

$$D_L = \pm S_L$$

为曲边形 L 的有向面积, 其中当 L 为正向曲边形时取 "+" 号; 当 L 为反向曲边形时取 "−" 号.

定理 4.2.6 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是平面曲边形边界 L 的一个内接 n 边形, 且多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 和曲边形 L 同向. 记 $P_1P_2\cdots P_n$ 的最大边长为 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i|d_i=|P_iP_{i+1}|, P_{n+1}=P_1\}$. 若曲边形 L 的面积 S_L 存在, 且当 $d\to 0$ 时多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的面积的极限 $\lim\limits_{d\to 0}S_{P_1P_2\cdots P_n}$ 存在, 则曲边形 L 的面积 (有向面积)

$$S_L=\lim_{d\to 0}S_{P_1P_2\cdots P_n}\left(D_L=\lim_{d\to 0}D_{P_1P_2\cdots P_n}=\pm\lim_{d\to 0}S_{P_1P_2\cdots P_n}\right).$$

证明 只需证明 $D_L=\lim\limits_{d\to 0}D_{P_1P_2\cdots P_n}$. 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 顶点的坐标为 $P_i(x_1,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 记 $\Delta x=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i|\Delta x_i=x_{i+1}-x_i\}$, $\Delta y=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta y_i|\Delta y_i=y_{i+1}-y_i\}$, 则当 $d\to 0$ 时, $d_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}\to 0$, 从而 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$. 所以

$$\begin{aligned}
\lim_{d\to 0}D_{P_1P_2\cdots P_n}&=\frac{1}{2}\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\\
&=\frac{1}{2}\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}[x_i(y_{i+1}-y_i)-(x_{i+1}-x_i)y_i]\\
&=\frac{1}{2}\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sum_{i=1}^{n}(x_i\Delta y_i-y_i\Delta x_i)\\
&=\frac{1}{2}\oint_L(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=\pm S_L=D_L.
\end{aligned}$$

定理 4.2.7 证明椭圆 L: $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的面积为 πab.

证明 在椭圆上取分点 $P_i(a\cos\alpha_i,b\sin\alpha_i)$ $(i=1,2,\cdots,n+1)$, 且 $0=\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{n+1}=2\pi,\alpha_{i+1}-\alpha_i=2\pi/n(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\begin{aligned}
S_L&=\lim_{d\to 0}S_{P_1P_2\cdots P_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(a\cos\alpha_i\cdot b\sin\alpha_{i+1}-a\cos\alpha_{i+1}\cdot b\sin\alpha_i)\\
&=\frac{1}{2}ab\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)=\frac{1}{2}ab\lim_{n\to\infty}\sum_{i-1}^{n}\sin\frac{2\pi}{n}\\
&=\frac{1}{2}abn\sin\frac{2\pi}{n}=\pi ab.
\end{aligned}$$

4.3 矢量形式的多边形有向面积公式及其应用

本节首先给出多边形的边三角形的概念, 以及多边形的边三角形有向面积的一个定值定理, 并据此导出矢量形式的多边形有向面积公式, 再利用该公式把 Gauss 五边形公式等结论推广到有向面积的情形.

定义 4.3.1 以多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的边为一边的三角形称为该多边形的边三角形.

一般地, 过一点可以作多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的 n 个边三角形.

定义 4.3.2 各边相等的多边形称为等边多边形; $n-1$ 条边相等的 n 边形称为等腰多边形, 这 $n-1$ 条相等的边称为多边形的腰, 不等的边称为多边形的底边.

特别, 当 $n=3$ 时, 等边多边形和等腰多边形就是等边三角形和等腰三角形的情形.

4.3.1 边三角形有向面积的定值定理

定理 4.3.1 设 P 为 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{n} D_{PP_iP_{i+1}} = D_{P_1P_2\cdots P_n}(\text{为定值}). \tag{4.3.1}$$

证明 如图 4.3.1 所示. 设 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的顶点的坐标为 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, P 点的坐标为 $P(x,y)$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} D_{PP_iP_{i+1}} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[(xy_i - x_iy) + (x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i) + (x_{i+1}y - xy_{i+1})]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(xy_i - x_iy) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(xy_{i+1} - x_{i+1}y)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i) = D_{P_1P_2\cdots P_n}.\end{aligned}$$

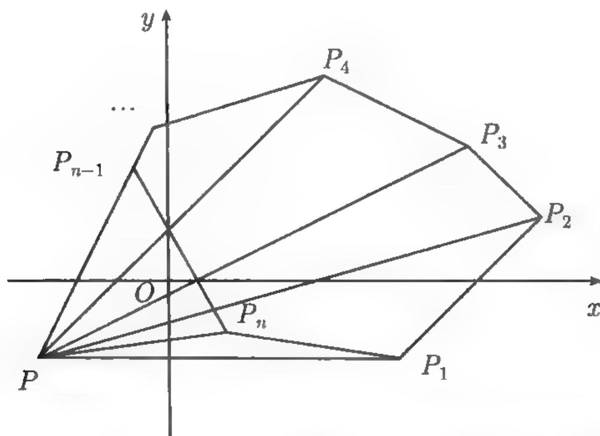


图 4.3.1 一点与多边形各边所构成的三角形

推论 4.3.1 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 为等边多边形, 则平面上任意一点 P 到各边 P_1P_2, $P_2P_3,\cdots,P_nP_1$ 的有向距离之和恒为定值.

证明 在式 (4.3.1) 中令 $d_{P_1P_2}=d_{P_2P_3}=\cdots=d_{P_nP_1}=a$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} D_{P-P_iP_{i+1}}=2D_{P_1P_2\cdots P_n}/a,$$

上式右边的值与任意点 P 无关, 故为定值.

推论 4.3.2 证明等腰多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 底边所在直线上任意一点 P 到各腰的有向距离之和恒为定值.

证明 不妨设 $d_{P_1P_2}=d_{P_2P_3}=\cdots=d_{P_{n-1}P_n}=a, P$ 是 P_nP_1 所在直线上任意一点, 由式 (4.3.1) 或推论 4.3.1 得

$$\sum_{i=1}^{n-1} D_{P-P_iP_{i+1}}=2D_{P_1P_2\cdots P_n}/a(\text{为定值}).$$

推论 4.3.3 设 $P_1P_2P_3$ 为正向 (反向) 正三边形, 证明平面上任意一点 P 到各边的有向距离之和恒等于等边三角形的高 h(高的负值 $-h$).

证明 在推论 4.3.1 中注意到 $n=3, D_{P_1P_2P_3}=ah/2$ $(D_{P_1P_2P_3}=-ah/2)$ 即得.

推论 4.3.4 证明正向 (反向) 等腰三角形 $P_1P_2P_3$ 底边上任意一点 P 到两腰的有向距离之和恒等于等腰三角形腰上的高 h(高的负值 $-h$).

证明 在推论 4.3.2 中注意到 $n=3, D_{P_1P_2P_3}=ah/2$ $(D_{P_1P_2P_3}=-ah/2)$ 即得.

4.3.2 矢量形式的多边形有向面积公式及应用

定理 4.3.2 设 $\overrightarrow{P}_i$ 表示点 P_i 的位置矢量 $\overrightarrow{OP_i}, \Lambda_{ij}=\overrightarrow{P}_i\times\overrightarrow{P_{i+1}}(P_{n+1}=P_1)$, 则多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的有向面积

$$D_{P_1P_2\cdots P_n}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{P_i}\times\overrightarrow{P_{i+1}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{ij}. \tag{4.3.2}$$

证明 在定理 4.3.1 中令任意点 P 为坐标原点 O 即得.

注 4.3.1 这里所指的有向面积是有向面积矢量, 这与非矢量形式的有向面积是不同的. 当然, 这两者之间并没有实质上的不同, 只不过是表达形式上的不同而已. 因此, 我们总是把它们视为同一的, 并用相同的符号表示.

定理 4.3.3 设 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 是平面五边形, 则以 P_1 为一个顶点的六个三角形的有向面积满足如下公式

$$D_{P_1P_2P_3}D_{P_1P_4P_5}+D_{P_1P_2P_5}D_{P_1P_3P_4}-D_{P_1P_2P_4}D_{P_1P_3P_5}=0. \tag{4.3.3}$$

证明 如图 4.3.2 所示. 利用有向面积公式将式 (4.3.2) 左端展开, 并抵消符号相反的项, 得

$$\begin{aligned}
&4(D_{P_1P_2P_3}D_{P_1P_4P_5}+D_{P_1P_2P_5}D_{P_1P_3P_4}-D_{P_1P_2P_4}D_{P_1P_3P_5})\\
=&(\Lambda_{12}+\Lambda_{23}+\Lambda_{31})\cdot(\Lambda_{14}+\Lambda_{45}+\Lambda_{51})\\
&+(\Lambda_{12}+\Lambda_{25}+\Lambda_{51})\cdot(\Lambda_{13}+\Lambda_{34}+\Lambda_{41})\\
&+(\Lambda_{21}+\Lambda_{14}+\Lambda_{42})\cdot(\Lambda_{13}+\Lambda_{35}+\Lambda_{51})\\
=&\Lambda_{12}\cdot\Lambda_{45}+\Lambda_{23}\cdot\Lambda_{14}+\Lambda_{23}\cdot\Lambda_{45}+\Lambda_{23}\cdot\Lambda_{51}+\Lambda_{31}\cdot\Lambda_{45}\\
&+\Lambda_{12}\cdot\Lambda_{34}+\Lambda_{25}\cdot\Lambda_{13}+\Lambda_{25}\cdot\Lambda_{34}+\Lambda_{25}\cdot\Lambda_{41}+\Lambda_{51}\cdot\Lambda_{34}+\Lambda_{12}\cdot\Lambda_{35}\\
&+\Lambda_{24}\cdot\Lambda_{13}+\Lambda_{24}\cdot\Lambda_{35}+\Lambda_{24}\cdot\Lambda_{51}+\Lambda_{41}\cdot\Lambda_{35}.
\end{aligned}$$

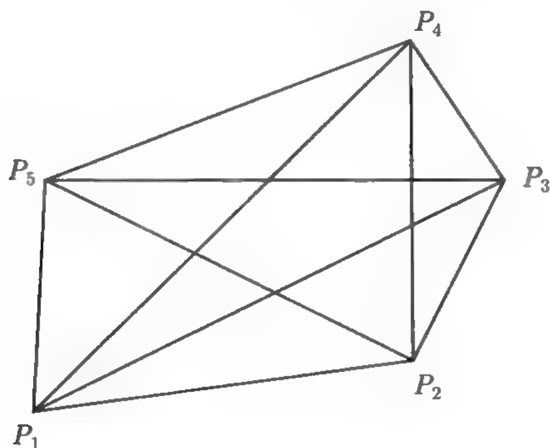


图 4.3.2 五边形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 中以 P_1 为顶点的三角形

设 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,5)$, 则

$$\lambda_{12}\cdot\lambda_{45}=x_1y_2x_4y_5-x_1y_2x_5y_4-x_2y_1x_4y_5+x_2y_1x_5y_4,$$

而

$$-x_1y_2x_4y_5,-x_5y_1x_2y_4\in\Lambda_{42}\cdot\Lambda_{51};\quad x_5y_2x_1y_4,x_4y_1x_2y_5\in\Lambda_{25}\cdot\Lambda_{41};$$

$$-x_1y_2x_4y_5,-x_5y_1x_2y_4\in\Lambda_{42}\cdot\Lambda_{51};\quad x_5y_2x_1y_4,x_4y_1x_2y_5\in\Lambda_{25}\cdot\Lambda_{41}.$$

因此 $\Lambda_{12}\cdot\Lambda_{45}$ 被完全抵消.

类似地可以证明其余各项 $\Lambda_{23}\cdot\Lambda_{14},\Lambda_{23}\cdot\Lambda_{45},\cdots,\Lambda_{42}\cdot\Lambda_{51}$ 均被完全抵消. 因此式 (4.3.3) 成立.

推论 4.3.5(Monge 公式)[11] 设 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 是平面凸五边形, 则以 P_1 为一个顶点的六个三角形的面积满足如下公式

$$S_{P_1P_2P_3}S_{P_1P_4P_5}+S_{P_1P_2P_5}S_{P_1P_3P_4}=S_{P_1P_2P_4}S_{P_1P_3P_5}. \tag{4.3.4}$$

证明　不妨设 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 是正向五边形, 则 $P_1P_2P_3, P_1P_4P_5, P_1P_2P_5, P_1P_3P_4, P_1P_2P_4, P_1P_3P_5$ 均为正向三角形, 于是式 (4.3.3) 中各三角形的有向面积等于它自身的面积. 从而式 (4.3.4) 成立.

定理 4.3.4　设 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 是平面五边形, $c_1 = \sum_{i=1}^{5} D_{P_{i-1}P_iP_{i+1}}, c_2 = \sum_{i=1}^{5} D_{P_{i-1}P_iP_{i+1}} D_{P_iP_{i+1}P_{i+2}} (P_{5+i} = P_i, P_0 = P_5$, 则

$$D^2_{P_1P_2P_3P_4P_5} - c_1 D_{P_1P_2P_3P_4P_5} + c_2 = 0. \tag{4.3.5}$$

证明　将 $D_{P_1P_3P_4} = D_{P_1P_2P_3P_4P_5} - D_{P_1P_2P_3} - D_{P_4P_5P_1}, D_{P_1P_2P_4} = D_{P_1P_2P_3P_4P_5} - D_{P_2P_3P_4} - D_{P_4P_5P_1}, D_{P_1P_3P_5} = D_{P_1P_2P_3P_4P_5} - D_{P_1P_2P_3} - D_{P_3P_4P_5}$ 代入式 (4.3.3), 化简即得式 (4.3.5).

推论 4.3.6　设 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 是平面五边形, $C_1 = \sum_{i=1}^{5} D_{P_{i-1}P_iP_{i+1}P_{i+2}}, C_2 = \sum_{i=1}^{5} D_{P_{i-1}P_iP_{i+1}P_{i+2}} D_{P_iP_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}} (P_{5+i} = P_i, P_0 = P_5)$, 则

$$D^2_{P_1P_2P_3P_4P_5} - C_1 D_{P_1P_2P_3P_4P_5} + C_2 = 0. \tag{4.3.6}$$

证明　因为 $D_{P_{i-1}P_iP_{i+1}} = D_{P_1P_2P_3P_4P_5} - D_{P_{i+1}P_{i+3}P_{i+4}P_i}$, 所以

$$\begin{aligned}
c_1 =& \sum_{i=1}^{5} D_{P_{i-1}P_iP_{i+1}} = \sum_{i=1}^{5} (D_{P_1P_2P_3P_4P_5} - D_{P_{i+1}P_{i+3}P_{i+4}P_i}) \\
=& 5D_{P_1P_2P_3P_4P_5} - \sum_{i=1}^{5} D_{P_{i-1}P_iP_{i+1}P_{i+2}} = 5D_{P_1P_2P_3P_4P_5} - C_1, \\
c_2 =& \sum_{i=1}^{5} (D_{P_1P_2P_3P_4P_5} - D_{P_{i+1}P_{i+2}P_{i+3}P_{i+4}})(D_{P_1P_2P_3P_4P_5} - D_{P_{i+2}P_{i+3}P_{i+4}P_i}) \\
=& 5D^2_{P_1P_2P_3P_4P_5} - 2C_1 D_{P_1P_2P_3P_4P_5} + C_2.
\end{aligned}$$

将两式代入式 (4.3.5), 化简即得式 (4.3.6).

推论 4.3.7(Gauss 五边形公式)[11]　设 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 是平面凸五边形, $c_1 = \sum_{i=1}^{5} S_{P_{i-1}P_iP_{i+1}}, c_2 = \sum_{i=1}^{5} S_{P_{i-1}P_ip_{i+1}} S_{P_iP_{i+1}P_{i+2}}$, 则

$$S^2_{P_1P_2P_3P_4P_5} - c_1 S_{P_1P_2P_3P_4P_5} + c_2 = 0.$$

证明　不妨设 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 是正向五边形, 则定理 4.3.4 中所有的有向面积均等于它自身的面积, 故由定理 4.3.4 即得推论 4.3.7.

推论 4.3.8 设凸五边形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 顶点三角形的面积均等于 s, 则 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 的面积

$$S_{P_1P_2P_3P_4P_5}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}s.$$

证明 由推论 4.3.7 得 $S^2_{P_1P_2P_3P_4P_5}-5sS_{P_1P_2P_3P_4P_5}+s^2=0$, 从而推论 4.3.8 结论成立.

特别地, 当 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 正五边形时, 即得 $S_{P_1P_2P_3P_4P_5}=\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}a$, 其中 a 为 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 正五边形的边长.

注 4.3.2 利用推论 4.3.6, 也可以得到类似于推论 4.3.7 和推论 4.3.8 的结论.

4.4 有向面积公式在共线定理证明中的应用

因为直线段的面积恒等于零, 所以其上任意点构成的构成的图形 (多边形的特殊情形) 为零. 因此, 利用多边形有向面积公式可以讨论三个或三个以上的点的共线性.

本节先介绍平面上 $n(n\geqslant 3)$ 个点共线的充要条件; 再通过得出一些问题中多边形有向面积之间的关系式, 并根据多点共线的充要条件证明一些数学竞赛题等的结论.

4.4.1 平面上多点共线的充要条件

定理 4.4.1 三点 P_1,P_2,P_3 共线的充分必要条件是 $D_{P_1P_2P_3}=0$.

证明 必要性. 若 P_1,P_2,P_3 共线, 显然 $S_{P_1P_2P_3}=0$, 从而 $D_{P_1P_2P_3}=0$.

充分性. 用反证法. 设 $D_{P_1P_2P_3}=0$. 若 P_1,P_2,P_3 不共线, 于是 $S_{P_1P_2P_3}\neq 0$, 所以 $D_{P_1P_2P_3}\neq 0$, 这与已知条件 $D_{P_1P_2P_3}=0$ 矛盾.

定理 4.4.2 平面上 n 个点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ $(n\geqslant 3)$ 共线的充分必要条件是 $D_{P_iP_{i+1}P_{i+2}}=0(i=1,\ 2,\cdots,n-2)$ 或对固定的 $i,\ j$, $D_{P_iP_jP_k}=0$ $(k\neq i,\ j)$.

证明 必要性. 若 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 共线, 显然对任意的 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-2$, 都有 $S_{P_iP_{i+1}P_{i+2}}=0$, 从而 $D_{P_iP_{i+1}P_{i+2}}=0$(或对固定的 $i,\ j$, 都有 $D_{P_iP_jP_k}=0$ $(k\neq i,\ j)$).

充分性. 若对任意的 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-2$, 都有 $D_{P_iP_{i+1}P_{i+2}}=0$(或对固定的 $i,\ j$, 都有 $D_{P_iP_jP_k}=0$ $(k\neq i,\ j)$), 则 $P_1,\ P_2,\ P_3;P_2,\ P_3,\ P_4;\cdots;P_{n-2},P_{n-1},P_n$(或对任意的 $k\neq i,j,P_i,P_j,P_k$) 均三点共线, 从而 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ $(n\geqslant 3)$ 共线.

注 4.4.1 对平面上任意的 n 点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$, 有 $D_{P_1P_2\cdots P_n}=0$, 并不能得出 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 共线.

如图 4.4.1 所示. 四点的坐标为 $A(-1,1),B(1,1),C(-1,1),D(1,-1)$, 易得

$$D_{ABCD}=(-1)\cdot 1-1\cdot 1+1\cdot 1-1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)-1\cdot 1+1\cdot 1-(-1)\cdot(-1)=0,$$

但显然 A,B,C,D 四点不共线.

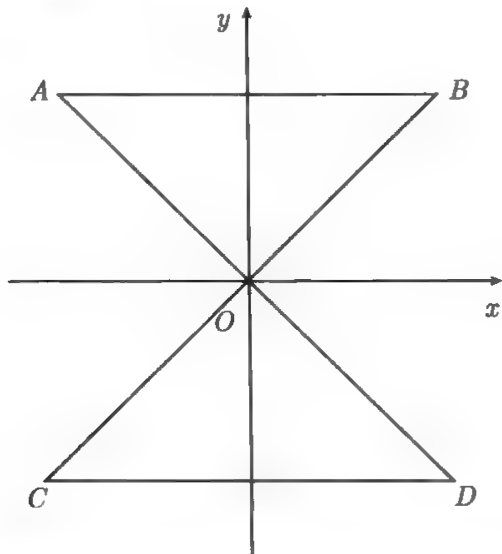


图 4.4.1 边自交的四边形有向面积为零但其四个顶点不共线

4.4.2 平面上多点共线充要条件的应用

定理 4.4.3 设 AD,BE,CF 分别为三角形 ABC 三边上的高, 垂足分别为 D,E,F. 自 D 分别作 AB,BE,CF,CA 的垂线, 垂足分别为 K,L,M,N. 求证 K,L,M,N 四点共线.

证明 如图 4.4.2 所示. 取 D 点为坐标原点, DC,DA 分别为 x,y 轴, 三角形顶点的坐标分别为 $A(0,a),B(b,0),C(c,0)$. 于是分别求得 AC,DN,CF,DM 的方程为

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1 \tag{4.4.1}$$

$$y=\frac{c}{a}x \tag{4.4.2}$$

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1 \tag{4.4.3}$$

$$y=\frac{b}{a}x+c \tag{4.4.4}$$

联立式 (4.4.1) 和 (4.4.2)、式 (4.4.3) 和 (4.4.4) 分别求得 AC 和 DN、CF 和 DM 交点的坐标

$$N\left(\frac{a^2c}{a^2+c^2},\frac{ac^2}{a^2+c^2}\right),\quad M\left(\frac{b^2c}{a^2+b^2},-\frac{abc}{a^2+c^2}\right),$$

类似地可以求得 AB 和 DK, BE 和 DL 交点的坐标

$$K\left(\frac{a^2b}{a^2+b^2},\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right),\quad L\left(\frac{bc^2}{a^2+c^2},-\frac{abc}{a^2+c^2}\right).$$

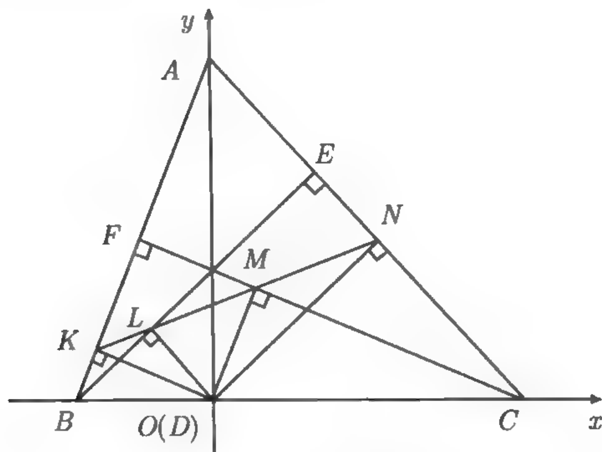


图 4.4.2 四垂足共线

于是

$$D_{NKM}=\frac{1}{2(a^2+b^2)^2(a^2+c^2)}\begin{vmatrix} a^2c & ac^2 & a^2+c^2 \\ a^2b & ab^2 & a^2+b^2 \\ b^2c & -abc & a^2+b^2 \end{vmatrix}=0,$$

$$D_{NKL}=\frac{1}{2(a^2+b^2)(a^2+c^2)^2}\begin{vmatrix} a^2c & ac^2 & a^2+c^2 \\ a^2b & ab^2 & a^2+b^2 \\ bc^2 & -abc & a^2+c^2 \end{vmatrix}=0,$$

从而 K,M,N 和 K,L,N 均三点共线, 所以 K,L,M,N 四点共线.

定理 4.4.4(第 17 届俄数学奥林匹克题的推广) 在四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 对角线 P_1P_3,P_2P_4 上分别取两点 $M,N;S,T$, 使 $P_1M=NP_3=\frac{1}{4}P_1P_3;P_2S=TP_4=\frac{1}{4}P_2P_4$, 则 P_1P_4,P_2P_3,MT,SN 的中点 P,Q,U,V 四点共线.

证明 如图 4.4.3 所示. 设四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4)$, 于是 $P,Q;M,N;S,T$ 的坐标依次为

$$P\left(\frac{x_1+x_4}{2},\frac{y_1+y_4}{2}\right),Q\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right);\quad M\left(\frac{3x_1+x_3}{4},\frac{3y_1+y_3}{4}\right),$$

$$N\left(\frac{x_1+3x_3}{4},\frac{y_1+3y_3}{4}\right);\quad S\left(\frac{3x_2+x_4}{4},\frac{3y_2+y_4}{4}\right),T\left(\frac{x_2+3x_4}{4},\frac{y_1+3y_4}{4}\right).$$

因此 U,V 的坐标为

$$U\left(\frac{3x_1+x_2+x_3+3x_4}{8},\frac{3y_1+y_2+y_3+3y_4}{8}\right),$$

$$V\left(\frac{x_1+3x_2+3x_3+x_4}{8},\frac{y_1+3y_2+3y_3+y_4}{8}\right).$$

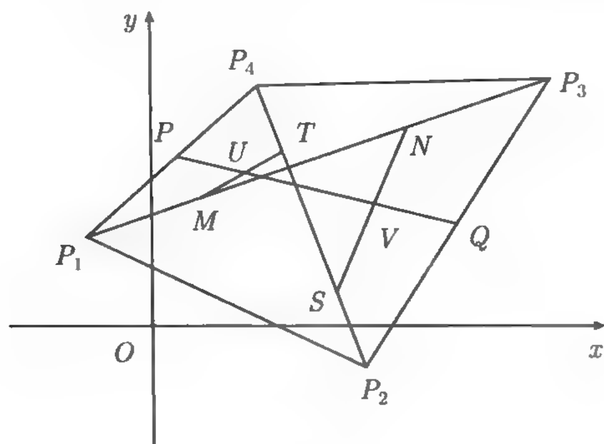


图 4.4.3

故

$$D_{PUQ}=\frac{1}{64}\begin{vmatrix} x_1+x_4 & y_1+y_4 & 2\\ 3x_1+x_2+x_3+3x_4 & 3y_1+y_2+y_3+3y_4 & 8\\ x_2+x_3 & y_2+y_3 & 2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-3r_1}\frac{1}{64}\begin{vmatrix} x_1+x_4 & y_1+y_4 & 2\\ x_2+x_3 & y_2+y_3 & 2\\ x_2+x_3 & y_2+y_3 & 2\end{vmatrix}=0,$$

因此 P,Q,U 三点共线.

同理可证 P,Q,V 三点共线. 从而 P,Q,U,V 四点共线.

注 4.4.2　当 $P_1P_2P_3P_4$ 为凸四边形时, 即得 P_1P_4, P_2P_3 中点的连线通过 MN, ST 的中点, 这就是第 17 届俄罗斯数学奥林匹克题的结论.

定理 4.4.5　设 $P_1P_2P_3P_4$ 为四边形, 点 M,N 分别为 P_1P_3, P_3P_4 的分点, 且 $P_1M/MP_3=P_3N/NP_4=\lambda$, 则

$$(1+\lambda)^2D_{P_2MN}=-D_{P_1P_2P_3}-\lambda D_{P_1P_2P_4}+\lambda^2D_{P_2P_3P_4}. \tag{4.4.5}$$

证明　如图 4.4.4 所示. 设四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4)$, 于是点 M,N 的坐标分别为 $M\left(\dfrac{x_1+\lambda x_3}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_3}{1+\lambda}\right), N\left(\dfrac{x_3+\lambda x_4}{1+\lambda},\dfrac{y_3+\lambda y_4}{1+\lambda}\right)$. 于是

$$\begin{aligned}2(1+\lambda)^2D_{P_2MN}=&(1+\lambda)[x_2(y_1+\lambda y_3)-(x_1+\lambda x_3)y_2]\\&+[(x_1+\lambda x_3)(y_3+\lambda y_4)-(x_3+\lambda x_4)(y_1+\lambda y_3)]\\&+(1+\lambda)[(x_3+\lambda x_4)y_2-x_2(y_3+\lambda y_4)]\\=&-[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\lambda[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_4-x_4y_2)+(x_4y_1-x_1y_4)]\\
&+\lambda^2[(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_2-x_2y_4)]\\
=&-2D_{P_1P_2P_3}-2\lambda D_{P_1P_2P_4}+2\lambda^2 D_{P_2P_3P_4},
\end{aligned}
$$

从而式 (4.4.5) 成立.

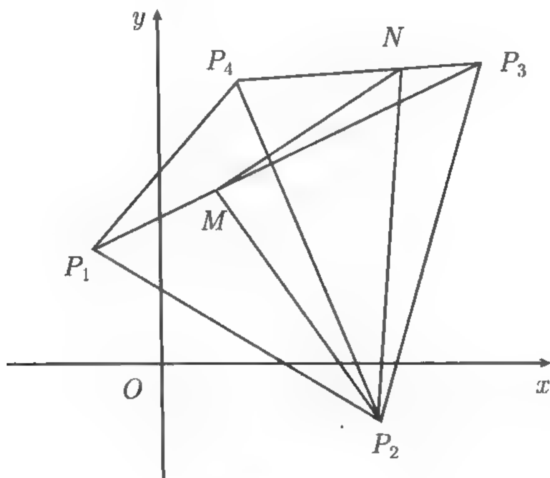


图 4.4.4

推论 4.4.1 设 $P_1P_2P_3P_4$ 为四边形, 点 M,N 分别为 P_1P_3, P_3P_4 的分点, 且 $P_1M/MP_3=P_3N/NP_4=\lambda$. 若 $D_{P_1P_2P_3}:D_{P_1P_2P_4}:D_{P_2P_3P_4}=1:3:4$, 则 P_2,M,N 共线的充分必要条件是 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1/4$.

证明 将 $D_{P_1P_2P_3}:D_{P_1P_2P_4}:D_{P_2P_3P_4}=1:3:4$ 代入式 (4.4.5) 得

$$(1+\lambda)^2 D_{P_2MN}=D_{P_1P_2P_3}(-1-3\lambda+\lambda^2),$$

注意到 $D_{P_1P_2P_3}\neq 0$, 得

$$P_2,M,N\text{共线}\Leftrightarrow D_{P_2MN}\Leftrightarrow -1-3\lambda+\lambda^2=0\Leftrightarrow \lambda=1\text{或}\lambda=-1/4.$$

推论 4.4.2(1983 年中国数学联赛试题的推广) 在 $P_1P_2P_3P_4$ 为四边形, 点 M,N 分别在线段 P_1P_3, P_3P_4 上, 且 $P_1M/MP_3=P_3N/NP_4$. 若 $S_{P_1P_2P_3}:S_{P_1P_2P_4}:S_{P_2P_3P_4}=1:3:4$, 则 P_2,M,N 共线的充分必要条件是 M,N 分别为 P_1P_3, P_3P_4 的中点.

证明 在推论 4.4.1 的证明中注意到三角形 $P_1P_2P_3, P_1P_2P_4, P_2P_3P_4$ 为同向三角形且 $\lambda>0$ 即得.

注 4.4.3 推论 4.4.2 的必要条件即为 1983 年中国数学联赛试题.

定理 4.4.6 设 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 是正六边形, 点 M,N 分别是其对角线 P_1P_3, P_3P_5 所在直线的分点, 且使 $P_1M/MP_3=P_3N/NP_5=\lambda$, 证明: P_2,M,N 三点共线的充分必要条件是 $\lambda=1/2\pm\sqrt{3}/2$.

证明　如图 4.4.5 所示. 不妨设正六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 顶点的坐标为

$$P_k\left(R\cos\frac{k-1}{3}\pi, R\sin\frac{k-1}{3}\pi\right)\ (k=0,1,2,3,4,5),$$

于是两对角线分点的坐标分别为

$$M\left(\frac{(2-\lambda)R}{2(1+\lambda)}, \frac{\sqrt{3}\lambda R}{2(1+\lambda)}\right),\quad N\left(-\frac{R}{2}, \frac{(1-\lambda)\sqrt{3}R}{2(1+\lambda)}\right).$$

根据三角形有向面积公式得

$$\begin{aligned}&8(1+\lambda)^2D_{P_2MN}\\=&\sqrt{3}R^2[(1+\lambda)\lambda-(1+\lambda)(2-\lambda)+(2-\lambda)(1-\lambda)\\&+\lambda(1+\lambda)-(1+\lambda)^2-(1+\lambda)(1-\lambda)]\\=&2(2\lambda^2-2\lambda-1),\end{aligned}$$

故 P_2, M, N 三点共线 $\Leftrightarrow D_{P_2MN}=0 \Leftrightarrow 2\lambda^2-2\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1/2\pm\sqrt{3}/2$.

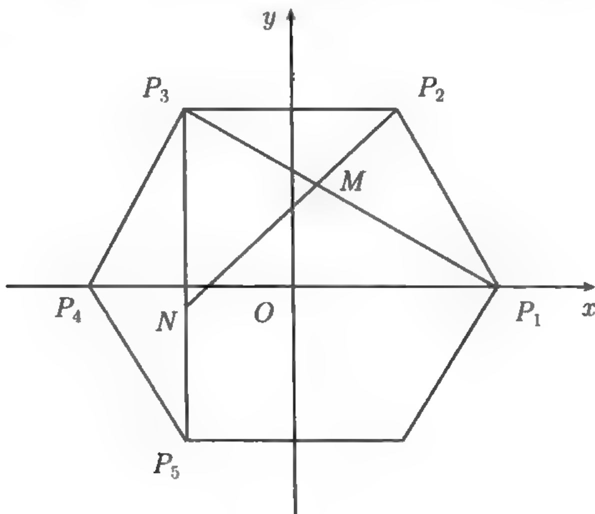


图 4.4.5

推论 4.4.3(第 23 届国际数学奥林匹克题)　设 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 是正六边形, 点 M, N 分别是其对角线 P_1P_3, P_3P_5 的分点, 且使 $P_1M/P_1P_3 = P_3N/P_3P_5 = r$. 若 P_2, M, N 三点共线, 则 $r = 1/\sqrt{3}$.

证明　由定理 4.4.5 可得 $P_1M/P_1P_3 = (\lambda+1)/\lambda$, 又由推论 4.4.3 条件可知 $\lambda = 1/2\pm\sqrt{3}/2$, 于是 $r = \lambda/(\lambda+1) = (1/2+\sqrt{3}/2)/(3/2+\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3}$.

定理 4.4.7　设 $A, P, R; B, Q, S$ 分别是射线 AX, BY 上的点, 且 $AP/PR = BQ/BS = \lambda$. 若 M, N, T 分别是 AB, PQ, RS 的分点且 $AM/MB = k_1, PN/NQ = k_2, RS/ST = k_3$, 则

$$D_{MNT} = \frac{[\lambda(k_3-k_2)+(k_1-k_2)]D_{ARS}+\lambda k_1(k_3-k_2)D_{BRS}+(k_1-k_2)k_3D_{ASB}}{(1+\lambda)(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)}. \tag{4.4.6}$$

证明 以 A 为坐标原点、AX 为横轴建立坐标系, 设 $A,R;B,S$ 的坐标为 $A(0,0),R(a,0);\ B(b,c),S(d,e)$. 于是求得其余各点的坐标

$$P\left(\frac{\lambda a}{1+\lambda},0\right),\quad Q\left(\frac{b+\lambda d}{1+\lambda},\frac{c+\lambda e}{1+\lambda}\right);M\left(\frac{k_1 b}{1+k_1},\frac{k_1 c}{1+k_1}\right),$$

$$N\left(\frac{\lambda a+k_2 b+k_2\lambda d}{(1+\lambda)(1+k_2)},\frac{k_2 c+k_2\lambda e}{(1+\lambda)(1+k_2)}\right),\quad T\left(\frac{a+k_3 d}{1+k_3},\frac{k_3 c}{1+k_3}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}
&2(1+\lambda)(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)D_{MNT}\\
=&\begin{vmatrix} k_1 b & k_1 c & 1+k_1 \\ \lambda a+k_2 b+k_2\lambda d & k_2 c+k_2\lambda e & (1+\lambda)(1+k_2) \\ a+k_3 d & k_3 c & 1+k_3 \end{vmatrix}\\
=&k_1k_2\lambda be+k_3\lambda ae+k_2k_3be+k_1k_3\lambda ae+k_1ac+k_1k_2\lambda ac+k_1k_3dc+k_1k_3\lambda dc\\
&-k_2ac-k_2\lambda ae-k_1k_2\lambda ae-k_2k_3dc-k_1k_2\lambda dc-k_1k_3\lambda ac-k_1k_3be-k_1k_3\lambda be\\
=&(k_3-k_2)\lambda[ae+k_1(ae-be+cd-ac)]+(k_1-k_2)[ac+k_3(cd-be)]\\
=&(k_3-k_2)\lambda[ae+k_1(ae-be+cd-ac)]+(k_1-k_2)[ac+k_3(cd-be)]\\
=&2(k_3-k_2)\lambda(D_{ARS}+k_1D_{RSB})+2(k_1-k_2)(D_{ARS}+k_3D_{ASB})\\
=&2[\lambda(k_3-k_2)+(k_1-k_2)]D_{ARS}+2\lambda k_1(k_3-k_2)D_{BRS}+2(k_1-k_2)k_3D_{ASB},
\end{aligned}$$

因此式 (4.4.6) 成立.

推论 4.4.4(1989 年国家数学奥林匹克竞赛集训题) 设 $A,P,R;B,Q,S$ 分别是射线 AX,BY 上的点, 且 $AP/BQ=PR/BS=\mu$. 若 M,N,T 分别是 AB,PQ,RS 的分点, 且 $AM/MB=PN/NQ=RS/ST=k$, 则三点 M,N,T 共线.

证明 如图 4.4.6 所示. 由 $AP/BQ=PR/BS=\mu$ 知, 存在 λ 使 $AP/PR=BQ/BS=\lambda$. 于是在式 (4.4.6) 中令 $k_1=k_2=k_3=k$ 得 $D_{MNT}=0$, 故三点 M,N,T 共线.

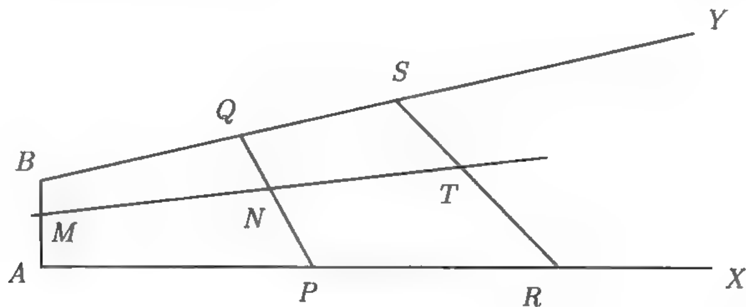


图 4.4.6

4.5　关于三角循环式的两个定理及其应用

本节进一步讨论有向面积公式中的应用. 首先, 给出三角循环式的两个定理; 其次, 根据这两个定理和多边形有向面积公式给出著名的 Lemoine 线定理和 Pascal 定理的证明, 并把 Lemoine 线定理推广到二次曲线内接三角形的情形. 透过这些定理的证明, 我们不仅可以发现这几个三角循环式特有的优美对称性, 而且可以揭示 Lemoine 线定理和 Pascal 定理的深刻背景.

4.5.1　三角循环式定理

定理 4.5.1　设$\pi_i(\theta) = \sin\dfrac{3\theta_i+\theta_{i+2}}{2}\cos\dfrac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2} - \sin\dfrac{3\theta_{i+1}+\theta_{i+2}}{2}\cos\dfrac{\theta_i-\theta_{i+2}}{2} + \sin\dfrac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2} + \sin(\theta_{i+1}-\theta_i)\cos\dfrac{\theta_i-\theta_{i+2}}{2}\cos\dfrac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}, \theta_{i+3}=\theta_i$, 则

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}+2\theta_{i+2}}{2}\cdot\pi_i(\theta)=0, \sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\cdot\pi_i(\theta)=0;$

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(\sin\frac{2\theta_{i+2}+\theta_{i+1}-\theta_i}{2}+\sin\frac{2\theta_{i+2}+\theta_i-\theta_{i+1}}{2}\right)\cdot\pi_i(\theta)=0.$

证明　因为

$$\begin{aligned}
\pi_i(\theta) =& \frac{1}{2}\sin\frac{3\theta_i+2\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{3\theta_i+\theta_{i+1}}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{3\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\\
&-\frac{1}{2}\sin\frac{3\theta_{i+1}+2\theta_{i+2}-\theta_i}{2}+\sin\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\\
&+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\theta_{i+1}-\theta_i-\theta_{i+2}}{2}+\sin\frac{2\theta_{i+1}+\theta_{i+2}-3\theta_i}{2}\right)\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\\
=&\frac{1}{2}\sin\frac{3\theta_i+2\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{3\theta_i+\theta_{i+1}}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{3\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\\
&-\frac{1}{2}\sin\frac{3\theta_{i+1}+2\theta_{i+2}-\theta_i}{2}+\frac{5}{4}\sin\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{2\theta_{i+1}-\theta_i-2\theta_{i+2}}{2}\\
&+\frac{1}{4}\sin\frac{2\theta_{i+2}+\theta_{i+1}-3\theta_i}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{3\theta_{i+1}-3\theta_i}{2},
\end{aligned}$$

所以

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}+2\theta_{i+2}}{2}\cdot\pi_i(\theta)$

$$\begin{aligned}
=&\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{4}\cos(\theta_i-\theta_{i+1})-\frac{1}{4}\cos 2(\theta_i+\theta_{i+2})+\frac{1}{4}\cos(\theta_i-\theta_{i+2})\right.\\
&-\frac{1}{4}\cos(2\theta_i+\theta_{i+1}+\theta_{i+2})-\frac{1}{4}\cos(\theta_{i+1}-\theta_{i+2})+\frac{1}{4}\cos(2\theta_{i+1}+\theta_i+\theta_{i+2})
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4}\cos(\theta_{i+1}-\theta_i)+\frac{1}{4}\cos 2(\theta_{i+1}+\theta_{i+2})+\frac{5}{4}\cos(\theta_{i+1}+\theta_{i+2})$$
$$-\frac{5}{4}\cos(\theta_i+\theta_{i+2})+\frac{1}{8}\cos(\theta_{i+1}-\theta_i-2\theta_{i+2})-\frac{1}{8}\cos 2\theta_{i+1}+\frac{1}{8}\cos 2\theta_i$$
$$\left.-\frac{1}{8}\cos(2\theta_{i+2}+\theta_{i+1}-\theta_i)+\frac{1}{8}\cos(\theta_{i+1}-2\theta_i-\theta_{i+2})-\frac{1}{8}\cos(2\theta_{i+1}+\theta_{i+2}-\theta_i)\right]$$
$$=0.$$

同理可证 $\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\cdot\pi_i(\theta)=0.$

(2) 类似地可以证明.

定理 4.5.2 设$\sigma_i(\theta)=\sin\frac{\theta_{i+3}-\theta_{i+5}}{2}\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}+\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}-\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}\cdot\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+5}-\theta_{i+4}}{2}+\sin\frac{\theta_{i+5}+\theta_{i+4}-\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}+\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_{i+5}+\theta_{i+4}}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}$, $\theta_{i+6}=\theta_i$, 则

(1) $\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+5}}{2}\cos\frac{\theta_{i+3}-\theta_{i+2}}{2}\cdot\sigma_i(\theta)=\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_{i+3}+\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+5}}{2}\cdot\sigma_i(\theta)$;

(2) $\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+5}-\theta_{i+3}-\theta_{i+2}}{2}\cdot\sigma_i(\theta)=0.$

证明 (1)

$$\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+5}}{2}\cos\frac{\theta_{i+3}-\theta_{i+2}}{2}\cdot\sigma_i(\theta)$$
$$=\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+5}}{2}\cos\frac{\theta_{i+3}-\theta_{i+2}}{2}\sin\frac{\theta_{i+3}-\theta_{i+5}}{2}\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+5}}{2}\cos\frac{\theta_{i+3}-\theta_{i+2}}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_{i+5}-\theta_{i+4}}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+5}}{2}\cos\frac{\theta_{i+3}-\theta_{i+2}}{2}\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}-\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}$$
$$\cdot\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+5}-\theta_{i+4}}{2}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+5}}{2}\cos\frac{\theta_{i+3}-\theta_{i+2}}{2}\sin\frac{\theta_{i+5}+\theta_{i+4}-\theta_{i+1}-\theta_i}{2}$$
$$\cdot\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}$$

$$\underline{\underline{\text{以}i+3\text{以}i}}\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_{i+3}+\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+5}}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}\cos\frac{\theta_{i+5}-\theta_{i+4}}{2}$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_{i+3}+\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+5}}{2}\sin\frac{\theta_{i+3}-\theta_{i+5}}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_{i+3}+\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+5}}{2}\sin\frac{\theta_{i+5}+\theta_{i+4}-\theta_{i+1}-\theta_i}{2}$$

$$\cdot\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_{i+3}+\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+5}}{2}\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}-\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}$$

$$\cdot\cos\frac{\theta_{i+5}-\theta_{i+4}}{2}\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_{i+3}+\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+5}}{2}\cdot\sigma_i(\theta).$$

(2) 类似地可以证明.

4.5.2　三角循环定理的应用

定理 4.5.3　设 $P_1P_2P_3$ 是二次曲线内接三角形, 过三角形的顶点 P_i 作二次曲线的切线 $P_iQ_i(i=1,2,3)$. 证明: P_iQ_i 与 P_i 点的对边 $P_{i+1}P_{i+2}$ 所在直线的交点 Q_1,Q_2,Q_3 共线.

证明　如图 4.5.1 所示. 不妨设二次曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{a}{1-e\cos\theta}(e\geqslant 0,a>0),$$

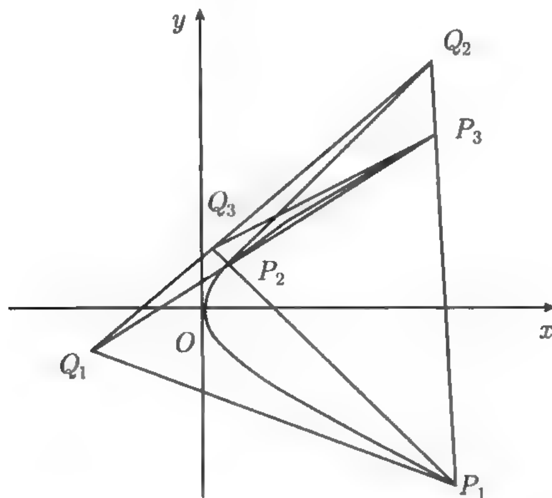


图 4.5.1　二次曲线外切三角形的性质

$P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为

$$P_i\left(\frac{a\cos\theta_i}{1-e\cos\theta_i},\frac{a\sin\theta_i}{1-e\cos\theta_i}\right)(i=1,2,3;\theta_{3+i}=\theta_i).$$

二次曲线的参数方程

$$x=\frac{a\cos\theta}{1-e\cos\theta},\quad y=\frac{a\sin\theta}{1-e\cos\theta},$$

所以

$$y'_x=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{a\sin\theta}{1-e\cos\theta}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{a\cos\theta}{1-e\cos\theta}\right)}=\frac{\dfrac{\cos\theta(1-e\cos\theta)-\sin\theta\cdot e\sin\theta}{(1-e\cos\theta)^2}}{\dfrac{-\sin\theta(1-e\cos\theta)-\cos\theta\cdot e\sin\theta}{(1-e\cos\theta)^2}}=\frac{e-\cos\theta}{\sin\theta}.$$

于是直线 P_iQ_i 的斜率

$$k_{P_iQ_i}=\frac{e-\cos\theta_i}{\sin\theta_i},$$

求得 P_iQ_i 的直线方程

$$(\cos\theta_i-e)x+\sin\theta_i y=a, \tag{4.5.1}$$

将 P_{i+1},P_{i+2} 的坐标代入 $P_{i+1}P_{i+2}$ 的直角坐标方程

$$(y_{i+2}-y_{i+1})x+(x_{i+1}-x_{i+2})y=x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1}$$

并化简得

$$[(\sin\theta_{i+2}-\sin\theta_{i+1})+e\sin(\theta_{i+1}-\theta_{i+2})]x+(\cos\theta_{i+1}-\cos\theta_{i+2})y=a\sin(\theta_{i+2}-\theta_{i+1}),$$

所以

$$\left(\cos\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}-e\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\right)x-\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}y=a\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}. \tag{4.5.2}$$

(4.5.1) 和 (4.5.2) 两式联立, 求得

$$\begin{aligned}\Delta_i=&\begin{vmatrix}\cos\theta_i-e & \sin\theta_i\\ \cos\dfrac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}-e\cos\dfrac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2} & -\sin\dfrac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}\end{vmatrix}\\ =&e\left(\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}+\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\sin\theta_i\right)-\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}+2\theta_i}{2}\\ =&e\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}+\frac{e}{2}\left(\sin\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}+2\theta_i}{2}+\cos\frac{2\theta_i+\theta_{i+1}-\theta_{i+2}}{2}\right)\end{aligned}$$

$$-\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}+2\theta_i}{2},$$

$$\Delta_{iX}=\begin{vmatrix} a & -\sin\theta_i \\ a\cos\dfrac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2} & -\sin\dfrac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}\end{vmatrix}$$

$$=-a\left(\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}+\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\sin\theta_i\right),$$

$$\Delta_{iY}=\begin{vmatrix} \cos\theta_i-e & a \\ \cos\dfrac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}-e\cos\dfrac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2} & a\cos\dfrac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\end{vmatrix}$$

$$=a\left(\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\cos\theta_i-\cos\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}\right).$$

所以 P_iQ_i 与 $P_{i+1}P_{i+2}$ 交点 $Q_i\,(x_i,y_i)\ (i=1,2,3)$ 的坐标

$$x_i=\frac{\Delta_{iX}}{\Delta_i}=-\frac{a}{\Delta_i}\left(\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}+\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\sin\theta_i\right),$$

$$y_i=\frac{\Delta_{iY}}{\Delta_i}=\frac{a}{\Delta_i}\left(\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\cos\theta_i-\cos\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}\right).$$

由三角形有向面积公式得

$$\begin{aligned}
&2D_{Q_1Q_2Q_3}\\
=&\sum_{i=1}^{3}\frac{a^2}{\Delta_i\Delta_{i+1}}\left[\left(\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+2}}{2}+\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+2}}{2}\sin\theta_{i+1}\right)\right.\\
&\cdot\left(\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\cos\theta_i-\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+2}}{2}\right)\\
&-\left(\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}+\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\sin\theta_i\right)\\
&\left.\cdot\left(\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+2}}{2}\cos\theta_{i+1}-\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+2}}{2}\right)\right]\\
=&\sum_{i=1}^{3}\frac{a^2}{\Delta_i\Delta_{i+1}}\left[\left(\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\cos\theta_i\right.\right.\\
&\left.-\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_{i+1}+\theta_{i+2}}{2}\sin\theta_{i+1}\right)\\
&+\left(\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+2}}{2}\sin\theta_i-\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+2}}{2}\cos\theta_{i+1}\right)\\
&+\left(\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+2}}{2}-\cos\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$+\left(\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\sin\theta_{i+1}\cos\theta_i\right.$$
$$\left.\left.-\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+2}}{2}\cos\theta_{i+1}\sin\theta_i\right)\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{3}\frac{a^2}{\Delta_i\Delta_{i+1}}\left(\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\cos\theta_i\right.$$
$$\left.-\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_{i+1}+\theta_{i+2}}{2}\sin\theta_{i+1}\right)$$
$$=\frac{a^2}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}\sum_{i=1}^{3}\Delta_{i+2}\cdot\sigma_i(\theta),$$

其中 $\Delta_{i+2}=e\left(\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+5}}{2}\cos\frac{\theta_{i+3}-\theta_{i+2}}{2}-\sin\frac{\theta_{i+3}+\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+5}}{2}\right)-\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+5}-\theta_{i+3}-\theta_{i+2}}{2}$.

由定理 4.5.1 易知

$$D_{Q_1Q_2Q_3}=\frac{a^2}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}\sum_{i=1}^{3}\Delta_{i+2}\sigma_i(\theta)=0,$$

所以 Q_1,Q_2,Q_3 共线.

定理 4.5.4(Pascal 定理) 设 $P_1P_2\cdots P_6$ 是二次曲线内接简单六点形. 证明它的三对对边 P_1P_2 与 P_4P_5, P_2P_3 与 P_5P_6, P_3P_4 与 P_6P_1 的交点 Q_1,Q_2,Q_3 共线.

证明 如图 4.5.2 所示. 不妨设二次曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{a}{1-e\cos\theta}(e\geqslant 0,a>0),$$

$P_1P_2\cdots P_6$ 顶点的坐标为

$$P_i\left(\frac{a\cos\theta_i}{1-e\cos\theta_i},\frac{a\sin\theta_i}{1-e\cos\theta_i}\right)\ (i=1,2,\cdots,6;\theta_{6+i}=\theta_i).$$

在式 (4.5.2) 中分别将 $i-1$ 和 $i+2$ 代 i, 求得 P_iP_{i+1} 和 $P_{i+3}P_{i+4}$ 的方程

$$\left(\cos\frac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}-e\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\right)x-\sin\frac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}y=a\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2},\tag{4.5.3}$$

$$\left(\cos\frac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}}{2}-e\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}\right)x-\sin\frac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}}{2}y=a\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}.\tag{4.5.4}$$

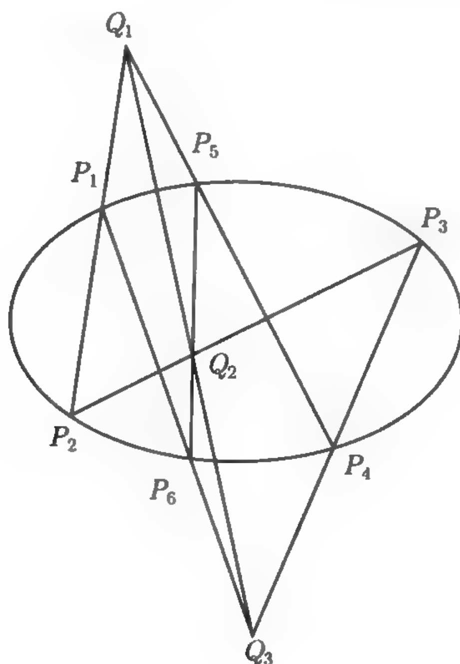


图 4.5.2　Pascal 定理

式 (4.5.3) 与 (4.5.4) 联立, 求得

$$\Delta_i=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}-e\cos\dfrac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2} & -\sin\dfrac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\\ \cos\dfrac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}}{2}-e\cos\dfrac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2} & -\sin\dfrac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}}{2}\end{vmatrix}$$

$$=e\left(\sin\frac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}}{2}\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}-\sin\frac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}\right)$$

$$-\sin\frac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}-\theta_{i+1}-\theta_i}{2},$$

$$\Delta_{iX}=\begin{vmatrix}a\cos\dfrac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2} & -\sin\dfrac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\\ a\cos\dfrac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2} & -\sin\dfrac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}}{2}\end{vmatrix}$$

$$=a\left(\sin\frac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\sin\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}-\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\sin\frac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}}{2}\right),$$

$$\Delta_{iY}=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}-e\cos\dfrac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2} & a\cos\dfrac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\\ \cos\dfrac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}}{2}-e\cos\dfrac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2} & a\cos\dfrac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}\end{vmatrix}$$

$$=a\left(\cos\frac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}-\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}}{2}\right).$$

所以 P_iP_{i+1} 与 $P_{i+3}P_{i+4}$ 交点 $Q_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3)$ 的坐标

$$x_i=\frac{\Delta_{iX}}{\Delta_i}=\frac{a}{\Delta_i}\left(\sin\frac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}-\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\sin\frac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}}{2}\right),$$

$$y_i = \frac{\Delta_{iY}}{\Delta_i} = \frac{a}{\Delta_i}\left(\cos\frac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2} - \cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}}{2}\right).$$

由三角形有向面积公式得

$$\begin{aligned}
&2D_{Q_1Q_2Q_3}\\
=&\sum_{i=1}^{3}\frac{a^2}{\Delta_i\Delta_{i+1}}\left[\left(\sin\frac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2} - \cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\sin\frac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}}{2}\right)\right.\\
&\cdot\left(\cos\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}\cos\frac{\theta_{i+5}-\theta_{i+4}}{2} - \cos\frac{\theta_{i+5}+\theta_{i+4}}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\right)\\
&-(\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}\cos\frac{\theta_{i+5}-\theta_{i+4}}{2} - \cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\sin\frac{\theta_{i+5}+\theta_{i+4}}{2})\\
&\left.\cdot\left(\cos\frac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2} - \cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}+\theta_{i+3}}{2}\right)\right]\\
=&\sum_{i=1}^{3}\frac{a^2}{\Delta_i\Delta_{i+1}}\left(\sin\frac{\theta_{i+3}-\theta_{i+5}}{2}\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\right.\\
&+\sin\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}-\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+5}-\theta_{i+4}}{2}\\
&+\sin\frac{\theta_{i+5}+\theta_{i+4}-\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\cos\frac{\theta_{i+5}-\theta_{i+4}}{2}\\
&\left.+\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_{i+5}+\theta_{i+4}}{2}\cos\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+3}}{2}\right)\\
=&\frac{a^2}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}\sum_{i=1}^{3}\Delta_{i+2}\cdot\sigma_i(\theta),
\end{aligned}$$

其中 $\Delta_{i+2} = e\left(\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+5}}{2}\cos\frac{\theta_{i+3}-\theta_{i+2}}{2} - \sin\frac{\theta_{i+3}+\theta_{i+2}}{2}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+5}}{2}\right) - \sin\frac{\theta_i+\theta_{i+5}-\theta_{i+3}-\theta_{i+2}}{2}$.

由定理 4.5.2 易知

$$D_{Q_1Q_2Q_3} = \frac{a^2}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}\sum_{i=1}^{3}\Delta_{i+2}\sigma_i(\theta) = 0,$$

从而 P_1P_2 与 P_4P_5, P_2P_3 与 P_5P_6, P_3P_4 与 P_6P_1 的交点 Q_1, Q_2, Q_3 共线.

第 5 章　有向距离与有向面积之间的关系及其应用

5.1　有向距离与有向面积之间的关系及其应用

本节主要论述点到直线的有向距离与三角形有向面积之间的关系, 并讨论一些与有向距离、有向面积有关问题.

定理 5.1.1　点 $P_0(x_0,y_0)$ 到直线 P_1P_2 的有向距离为

$$D_{P_0-P_1P_2}=\frac{2D_{P_0P_1P_2}}{d_{P_1P_2}}(\text{或}d_{P_1P_2}D_{P_0-P_1P_2}=2D_{P_0P_1P_2}),\tag{5.1.1}$$

其中 $D_{P_0P_1P_2}$ 表示三角形 $P_0P_1P_2$ 的有向面积.

证明　注意到 $(y_1-y_2)x_0+(x_2-x_1)y_0+(x_1y_2-x_2y_1)=2D_{P_0P_1P_2}$, 由式 (4.1.2) 即得式 (5.1.1).

注 5.1.1　式 (5.1.1) 的几何意义是点 $P_0(x_0,y_0)$ 到直线 P_1P_2 的有向距离等于三角形 $P_0P_1P_2$ 有向面积的两倍与其边长 P_1P_2 之比.

定理 5.1.2　设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是平面 n 边形, P_0 是 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在平面上异于各顶点且与各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$ 不共线的一个定点, 过 P_0 的一条直线 l 与 $P_1P_2\cdots P_n$ 各边 P_iP_{i+1} 的交点为 $Q_i(i=1,2,\cdots,n;P_{n+1}=P_1)$. 若 P_0 与各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$ 构成的三角形的有向面积之比为

$$D_{P_0P_1P_2}:D_{P_0P_2P_3}:\cdots:D_{P_0P_{n-1}P_n}:D_{P_0P_nP_1}=k_1:k_2:\cdots:k_n,$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{D_{P_0Q_i}}=\frac{k_1}{D_{P_0Q_1}}+\frac{k_2}{D_{P_0Q_2}}+\cdots+\frac{k_n}{D_{P_0Q_n}}=0.$$

证明　如图 5.1.1 所示. 以 P_0 为坐标原点, l 为横轴建立直角坐标系, 并设 $P_1P_2\cdots P_n$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$. 直线 $P_iP_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$ 的方程为

$$(y_{i+1}-y_i)x+(x_i-x_{i+1})y=x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i,$$

令 $y=0$, 得 Q_i 在 l 轴上的坐标为

$$X_i=\frac{x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i}{y_{i+1}-y_i}(i=1,2,\cdots,n).$$

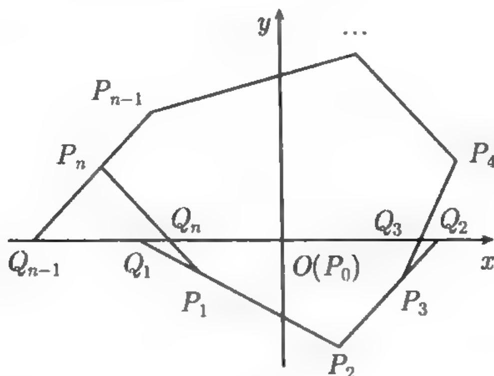


图 5.1.1 直线与 n 边形各边的交点

又由定理 4.1.1 得

$$D_{P_0P_iP_{i+1}}=\frac{1}{2}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n),$$

令 $\frac{D_{P_0P_1P_2}}{k_1}=\frac{D_{P_0P_2P_3}}{k_2}=\cdots=\frac{D_{P_0P_nP_1}}{k_n}=k$, 则 $D_{P_0P_iP_{i+1}}=kk_i(i=1,2,\cdots,n)$, 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{D_{P_0Q_i}}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{X_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i(y_{i+1}-y_i)}{x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i(y_{i+1}-y_i)}{D_{P_0P_iP_{i+1}}}\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i(y_{i+1}-y_i)}{kk_i}=\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1}-y_i)=0.\end{aligned}$$

推论 5.1.1 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是平面凸 n 边形, P_0 是 $P_1P_2\cdots P_n$ 的重心, 过 P_0 的一条直线 l 与 $P_1P_2\cdots P_n$ 各边 P_iP_{i+1} 的交点为 $Q_i(i=1,2,\cdots,n;P_{n+1}=P_1)$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{D_{P_0Q_i}}=\frac{1}{D_{P_0Q_1}}+\frac{1}{D_{P_0Q_2}}+\cdots+\frac{1}{D_{P_0Q_n}}=0.$$

证明 如图 5.1.2 所示. 注意到凸 n 边形的重心 P_0 与其各边构成的三角形的面积相等, 在定理 5.1.2 中令 $k_1=k_2=\cdots=k_n$ 即得.

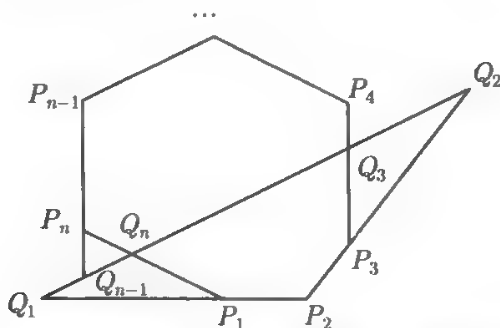


图 5.1.2 过凸 n 边形重心的直线与其各边的交点

推论 5.1.2　设 l 是通过三角形 ABC 的中线交点 M 的直线, 且分别与三角形的边 AB,BC,CA 所在直线相交于 R,S,T 点且 R,S 在 M 的同一侧, 则

$$\frac{1}{d_{MR}}+\frac{1}{d_{MS}}=\frac{1}{d_{MT}}.$$

证明　如图 5.1.3 所示. 以 M 为坐标原点, l 为一坐标轴 ($\overrightarrow{MT}$ 为其正方向) 建立直角坐标系. 在推论 5.1.1 中注意到 $d_{MR}=-X_1=-D_{MR}, d_{MS}=-X_2=D_{MS}, d_{MT}=X_3=D_{MT}$ 即得.

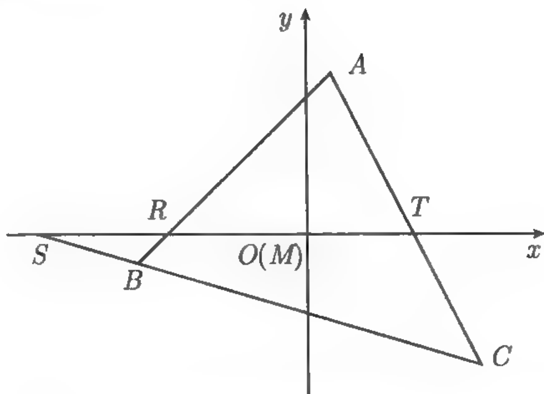


图 5.1.3　过三角形重心的直线与其各边的交点

注 5.1.2　当 R,T 和 S,T 在 M 的同一侧时, 有类似的结论.

定理 5.1.3　设 $P_0P_1\cdots P_n(n\geqslant 3)$ 是平面 $n+1$ 边形, l 是经过顶点 P_0 的直线, 且分别与直线 $P_iP_{i+1}(i=1,2,\cdots,n;\ P_{n+1}=P_1)$ 相交于 Q_i 点, $D_{P_0P_1P_2}:D_{P_0P_2P_3}:\cdots:D_{P_0P_nP_1}=k_1:k_2:\cdots:k_n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{D_{P_0Q_i}}=\frac{k_1}{D_{P_0Q_1}}+\frac{k_2}{D_{P_0Q_2}}+\cdots+\frac{k_n}{D_{P_0Q_n}}=0.$$

证明　如图 5.1.4 所示. 以 P_0 为坐标原点, l 为横轴建立直角坐标系, 并设 $P_0P_1P_2\cdots P_n$ 除 P_0 外的顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$. 直线 $P_iP_{i+1}(i=1,2,\cdots,n;\ P_{n+1}=P_1)$ 的方程为

$$(y_{i+1}-y_i)x+(x_i-x_{i+1})y=x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i,$$

令 $y=0$, 得 Q_i 在 x 轴上的坐标为

$$X_i=\frac{x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i}{y_{i+1}-y_i}(i=1,2,\cdots,n;x_{n+1}=x_1,y_{n+1}=y_1).$$

又由定理 4.1.1 得

$$D_{P_0P_iP_{i+1}}=\frac{1}{2}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n;x_{n+1}=x_1,y_{n+1}=y_1),$$

令 $\dfrac{D_{P_0P_1P_2}}{k_1}=\dfrac{D_{P_0P_2P_3}}{k_2}=\cdots=\dfrac{D_{P_0P_nP_1}}{k_n}=k$, 则 $D_{P_0P_iP_{i+1}}=kk_i(i=1,2,\cdots,n)$, 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{D_{P_0Q_i}}=&\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{X_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i(y_{i+1}-y_i)}{x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i(y_{i+1}-y_i)}{D_{P_0P_iP_{i+1}}}\\=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i(y_{i+1}-y_i)}{kk_i}=\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1}-y_i)=0.\end{aligned}$$

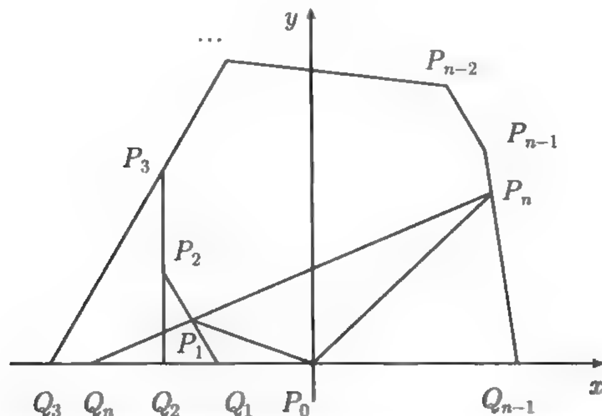


图 5.1.4 过 $n+1$ 边形一顶点的直线与其余各点依次构成的直线的交点

推论 5.1.3 设 $P_0P_1\cdots P_n(n\geqslant 3)$ 是平面凸 $n+1$ 边形, l 是经过顶点 P_0 的直线, 且分别与直线 $P_1P_2,P_2P_3,\cdots,P_nP_1$ 相交于 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 点, $S_{P_0P_1P_2}=S_{P_0P_2P_3}=\cdots=S_{P_0P_nP_1}$, 则

$$\frac{1}{D_{P_0Q_1}}+\frac{1}{D_{P_0Q_2}}+\cdots+\frac{1}{D_{P_0Q_{n-1}}}=\frac{1}{D_{P_0Q_n}}.$$

证明 不妨设 $P_0\to P_1\to\cdots\to P_n\to P_0$ 是顺时针绕向的, 则

$$D_{P_0P_1P_2}:D_{P_0P_2P_3}:\cdots:D_{P_0P_{n-1}P_n}:D_{P_0P_nP_1}=1:1:\cdots:1:-1$$

在定理 5.1.3 中令 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-1},k_n=-1$ 即得.

推论 5.1.4 设 l 是经过平行四边形 $P_0P_1P_2P_3$ 的顶点 P_0 的直线, 且分别与直线 P_1P_2,P_2P_3,P_1P_3 相交于 R,S,T 点.

(1) 若 R,S,T 位于 P_0 的同侧, 则

$$\frac{1}{d_{P_0R}}+\frac{1}{d_{P_0S}}=\frac{1}{d_{P_0T}}.$$

(2) 若 S,T 与 R 或 R,T 与 S 分居 P_0 的两侧, 则

$$\frac{1}{d_{P_0S}}=\frac{1}{d_{P_0T}}+\frac{1}{d_{P_0R}}\text{ 或 }\frac{1}{d_{P_0R}}=\frac{1}{d_{P_0S}}+\frac{1}{d_{P_0T}}.$$

证明 (1) 如图 5.1.5 所示. 不妨设 $\overrightarrow{P_0R}$ 与 l 的正方向相同, 令 $D_{P_0R}=d_{P_0R}, D_{P_0S}=d_{P_0S}, D_{P_0T}=d_{P_0T}$, 则由推论 5.1.3 中即得.

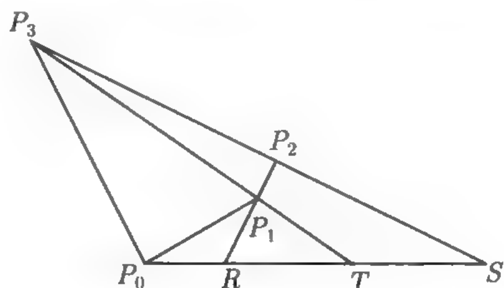


图 5.1.5 R,S,T 位于 P_0 的同侧

(2) 类似地可以证明 (图 5.1.6).

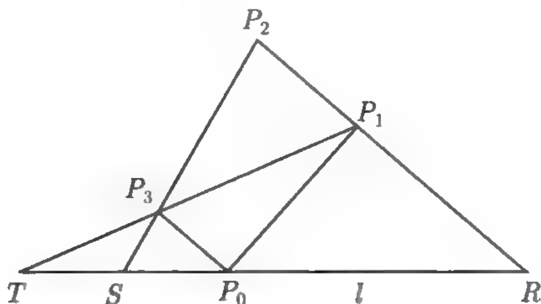


图 5.1.6 S,T 与 R 或 R,T 与 S 分居 P_0 的两侧

注 5.1.3 (i) 不可能出现 S,R 与 T 分居 P_0 的两侧的情形; (ii) 对其他顶点有类似的结论; (iii) 文献 [3] 中只给出了情形 (1) 的等式, 且未说明等式成立的情形.

引理 5.1.1 证明三角恒等式:

(1)$\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{2k}{n}\pi=\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{2k+1}{n}\pi=0(n\geqslant 2)$;

(2)$\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{4k}{2n+1}\pi=\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{8k}{2n+1}\pi=-\dfrac{1}{2}(n\geqslant 1)$.

证明 仅证 (1) 式的前半部分, 其余类似地可以证明.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k}{n}\pi&=\sum_{k=1}^{n}2\cos\frac{2k}{n}\pi\sin\frac{\pi}{n}\Big/2\sin\frac{\pi}{n}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{n}\pi-\sin\frac{2k-1}{n}\pi\right)\Big/2\sin\frac{\pi}{n}\\
&=\left[\left(\sin\frac{3\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{n}-\sin\frac{3\pi}{n}\right)+\cdots\right.\\
&\quad\left.+\left(\sin\frac{2n+1}{n}\pi-\sin\frac{2n}{n}\pi\right)\right]\Big/2\sin\frac{\pi}{n}
\end{aligned}$$

$$=\left(\sin\frac{2n+1}{n}\pi-\sin\frac{\pi}{n}\right)\Big/2\sin\frac{\pi}{n}=0.$$

引理 5.1.2 证明三角恒等式:

(1)$\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{4k+2}{n}\pi=0(n\geqslant 3)$; (2)$\sum\limits_{k=1}^{2n+1}\cos\frac{8k+4}{2n+1}\pi=0(n\geqslant 1)$.

证明 (1) 当 $n=2m$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{4k+2}{n}\pi&=\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2k+1}{m}\pi+\sum_{k=m+1}^{2m}\cos\frac{2k+1}{m}\pi\\&=\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2k+1}{m}\pi+\sum_{k=1}^{m}\cos\left(2+\frac{2k+1}{m}\right)\pi=2\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2k+1}{m}\pi=0;\end{aligned}$$

当 $n=2m+1$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{4k+2}{n}\pi&=\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{4k+2}{2m+1}\pi+\sum_{k=m+1}^{2m+1}\cos\frac{4k+2}{2m+1}\pi\\&=\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{4k+2}{2m+1}\pi+\sum_{k=1}^{m+1}\cos\left(2+\frac{4k}{2m+1}\right)\pi\\&=\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{4k+2}{2m+1}\pi+\sum_{k=1}^{m+1}\cos\frac{4k}{2m+1}\pi\\&=1+\sum_{k=1}^{m-1}\cos\left(2-\frac{4k+2}{2m+1}\right)\pi+\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{4k}{2m+1}\pi+\cos\left(2+\frac{2}{2m+1}\right)\pi\\&=1+\sum_{k=1}^{m-1}\cos\frac{4(m-k)}{2m+1}\pi+\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{4k}{2m+1}\pi+\cos\frac{2}{2m+1}\pi\\&=1+\sum_{k=1}^{m-1}\cos\frac{4k}{2m+1}\pi+\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{4k}{2m+1}\pi+\cos\left(2-\frac{2}{2m+1}\right)\pi\\&=1+2\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{4k}{2m+1}\pi=0.\end{aligned}$$

所以, 对任意自然数 $n\geqslant 3$, 有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{4k+2}{n}\pi=0$.

(2) 证明与 (1) 式中 $n=2m+1$ 的情形类似.

定理 5.1.4 设 l 是经过正 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 中心 O 的任意一条直线, l 分别与直线 $P_iP_{i+1}(i=1,2,\cdots,n;\ P_{n+1}=P_1)$ 相交于 Q_i 点, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{D_{OQ_i}}=\frac{1}{D_{OQ_1}}+\frac{1}{D_{OQ_2}}+\cdots+\frac{1}{D_{OQ_n}}=0(\text{为定值}),\tag{5.1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{D_{OQ_i}^2}=\frac{1}{D_{OQ_1}^2}+\frac{1}{D_{OQ_2}^2}+\cdots+\frac{1}{D_{OQ_n}^2}=\frac{n}{2h^2}(\text{为定值}),\tag{5.1.3}$$

其中 h 是正多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的边心距.

证明　注意到 $D_{OP_1P_2}=D_{OP_2P_3}=\cdots=D_{OP_nP_1}$, 由定理 5.1.2 即得式 (5.1.2), 下面证明式 (5.1.3). 以 l 为 x 轴、O 为坐标原点建立直角坐标系, 不妨设 $P_1P_2\cdots P_n$ 顶点的坐标为 $P_i\left(R\cos\frac{2i}{n}\pi, R\sin\frac{2i}{n}\pi\right)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 令 $D_{OP_1P_2}=D_{OP_2P_3}=\cdots=D_{OP_nP_1}=S$, 则由定理 5.1.2 的证明可得 Q_i 点的横坐标

$$X_i=\frac{2S}{R\left(\sin\frac{2i+2}{n}\pi-\sin\frac{2i}{n}\pi\right)}=\frac{S}{R\sin\frac{1}{n}\pi\cos\frac{2i+1}{n}\pi}(i=1,2,\cdots,n),$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{D_{OQ_i}^2}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i^2}=\frac{R^2}{S^2}\sin^2\frac{1}{n}\pi\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{2i+1}{n}\pi\\&=\frac{R^2}{2S^2}\sin^2\frac{1}{n}\pi\sum_{i=1}^{n}\left(1+\cos\frac{4i+2}{n}\pi\right)\\&=\frac{nR^2}{2S^2}\sin^2\frac{1}{n}\pi+\frac{R^2}{2S^2}\sin^2\frac{1}{n}\pi\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{4i+2}{n}\pi=\frac{nR^2}{2S^2}\sin^2\frac{1}{n}\pi,\end{aligned}$$

注意到 $S=Rh\sin\frac{\pi}{n}$ 即得式 (5.1.3).

定理 5.1.5　设 l 是经过正 $2n+1$ 边形 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 中心 O 的任意一条直线, l 分别与直线 $P_iP_{i+1}(i=1,2,\cdots,2n+1;\ P_{2n+2}=P_1)$ 相交于 Q_i 点, 则

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{D_{OQ_i}^4}=\frac{1}{D_{OQ_1}^4}+\frac{1}{D_{OQ_2}^4}+\cdots+\frac{1}{D_{OQ_{2n+1}}^4}=\frac{3(2n+1)}{8h^4}(\text{为定值}),\tag{5.1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{D_{OQ_i}^8}=\frac{1}{D_{OQ_1}^8}+\frac{1}{D_{OQ_2}^8}+\cdots+\frac{1}{D_{OQ_{2n+1}}^8}=\frac{7(2n+1)}{16h^8}(\text{为定值}),\tag{5.1.5}$$

其中 h 是正 $2n+1$ 边形 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 的边心距.

证明　以 l 为 x 轴、O 为坐标原点建立直角坐标系, 不妨设 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 顶点的坐标为

$$P_k\left(R\cos\frac{2i}{2n+1}\pi, R\sin\frac{2i}{2n+1}\pi\right)(k=1,2,\cdots,2n+1),$$

令 $D_{OP_1P_2}=D_{OP_2P_3}=\cdots=D_{OP_{2n+1}P_1}=S$, 则由定理 5.1.2 的证明可得 Q_i 点的横坐标

$$X_i=\frac{2S}{R\left(\sin\frac{2i+2}{2n+1}\pi-\sin\frac{2i}{2n+1}\pi\right)}=\frac{S}{R\sin\frac{1}{2n+1}\pi\cos\frac{2i+1}{2n+1}\pi}(i=1,2,\cdots,2n+1),$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{D_{OQ_i}^4}&=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{X_i^4}=\frac{R^4}{S^4}\sin^4\frac{1}{2n+1}\pi\sum_{i=1}^{2n+1}\cos^4\frac{2i+1}{2n+1}\pi\\&=\frac{R^4}{4S^4}\sin^4\frac{1}{2n+1}\pi\sum_{i=1}^{2n+1}\left(1+2\cos\frac{4i+2}{2n+1}\pi+\cos^2\frac{4i+2}{2n+1}\pi\right)\\&=\frac{R^4}{4S^4}\sin^4\frac{1}{2n+1}\pi\left[\frac{3(2n+1)}{2}+2\sum_{i=1}^{2n+1}\cos\frac{4i+2}{2n+1}\pi+\sum_{i=1}^{2n+1}\cos\frac{8i+4}{2n+1}\pi\right]\\&=\frac{3(2n+1)R^4}{8S^4}\sin^4\frac{1}{2n+1}\pi,\end{aligned}$$

注意到 $S=Rh\sin\frac{\pi}{2n+1}$ 即得式 (5.1.4).

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{D_{OQ_i}^8}&=\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{X_i^8}=\frac{R^8}{S^8}\sin^8\frac{1}{2n+1}\pi\sum_{i=1}^{2n+1}\cos^8\frac{2i+1}{2n+1}\pi\\&=\frac{R^8}{16S^8}\sin^8\frac{1}{2n+1}\pi\sum_{i=1}^{2n+1}\left(1+2\cos\frac{4i+2}{2n+1}\pi+\cos^2\frac{4i+2}{2n+1}\pi\right)^2\\&=\frac{R^4}{16S^4}\sin^8\frac{1}{2n+1}\pi\sum_{i=1}^{2n+1}\left(\frac{3}{2}+2\cos\frac{4i+2}{2n+1}\pi+\cos\frac{8i+4}{2n+1}\pi\right)^2\\&=\frac{R^4}{16S^4}\sin^8\frac{1}{2n+1}\pi\sum_{i=1}^{2n+1}\left(\frac{9}{4}+4\cos^2\frac{4i+2}{2n+1}\pi+\cos^2\frac{8i+4}{2n+1}\pi\right.\\&\quad\left.+6\cos\frac{4i+2}{2n+1}\pi+3\cos\frac{8i+4}{2n+1}\pi+4\cos\frac{4i+2}{2n+1}\pi\cos\frac{8i+4}{2n+1}\pi\right)\\&=\frac{7(2n+1)R^8}{16S^8}\sin^8\frac{1}{2n+1}\pi,\end{aligned}$$

注意到 $S=Rh\sin\frac{\pi}{2n+1}$ 即得式 (5.1.5).

更一般地, 我们猜测

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{D_{OQ_i}^{2k}}=\frac{1}{D_{OQ_1}^{2k}}+\frac{1}{D_{OQ_2}^{2k}}+\cdots+\frac{1}{D_{OQ_{2n+1}}^{2k}}$$

$$=\frac{(2^k-1)(2n+1)}{2^{k+1}h^{2^k}}(k=2,3,\cdots)(\text{为定值}),$$

其中 h 是正多边形 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 的边心距.

推论 5.1.5　设 l 是经过正 $2n+1$ 边形 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 中心 O 的任意一条直线, l 分别与直线 $P_iP_{i+1}(i=1,2,\cdots,2n+1;\ P_{2n+2}=P_1)$ 相交于 Q_i 点, 则

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{D_{OQ_i}^2}-\frac{4}{3}h^2\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{D_{OQ_i}^4}=0(\text{为定值}), \tag{5.1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{D_{OQ_i}^4}-\frac{6}{7}h^4\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{D_{OQ_i}^8}=0(\text{为定值}), \tag{5.1.7}$$

其中 h 是正多边形 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 的边心距.

证明　由定理 5.1.4 可得

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{D_{OQ_i}^2}=\frac{1}{D_{OQ_1}^2}+\frac{1}{D_{OQ_2}^2}+\cdots+\frac{1}{D_{OQ_n}^2}=\frac{2n+1}{2h^2}, \tag{5.1.8}$$

式 (5.1.8)$-\frac{4}{3}h^2\times$ 式 (5.1.4) 即得式 (5.1.6); 式 (5.1.4)$-\frac{6}{7}h^4\times$ 式 (5.1.5) 即得式 (5.1.7).

更一般地, 我们猜测

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{D_{OQ_i}^{2^k}}-\frac{2(2^k-1)}{2^{k+1}-1}h^{2^k}\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{D_{OQ_i}^{2^{k+1}}}=0\ (k=2,3,\cdots)(\text{为定值}).$$

其中 h 是正多边形 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 的边心距.

注 5.1.4　式 (5.1.3)、式 (5.1.4) 及式 (5.1.6) 见于文献 [12], 但一些证明有误.

5.2　有向距离与有向面积关系命题的等价性

本节主要论述有向距离和有向面积命题的等价性. 设 F 是多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 中的一个关于点到直线有向距离的命题, 那么根据定理 5.1.1 可以将它转化成相应的关于三角形有向面积的命题 F', 反之亦然. 因此得到如下关于这两种命题的定理.

定理 5.2.1　在多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 中, 点到直线有向距离的命题 F 与相应的三角形有向面积的命题 F' 是等价的, 即 F 真的充要条件是 F' 真.

定理 5.2.2　过三角形 $P_1P_2P_3$ 的各个顶点 P_i 向任一直线 l 作垂线, 垂足为 $Q_i(i=1,2,3)$, 则

$$d_{P_3P_1}D_{Q_2-P_3P_1}+d_{P_2P_3}D_{Q_1-P_2P_3}+d_{P_1P_2}D_{Q_3-P_1P_2}=2D_{P_1P_2P_3}(\text{为定值}), \tag{5.2.1}$$

即

$$D_{Q_1P_2P_3}+D_{Q_2P_3P_1}+D_{Q_3P_1P_2}=D_{P_1P_2P_3}(\text{为定值}). \tag{5.2.2}$$

证明 只需证明式 (5.2.1) 或式 (5.2.2) 成立即可. 如图 5.2.1 所示, 以 l 为 x 轴建立直角坐标系, 设三角形顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)$, 则垂足的坐标为 $Q_i(x_i,0)(i=1,2,3)$.

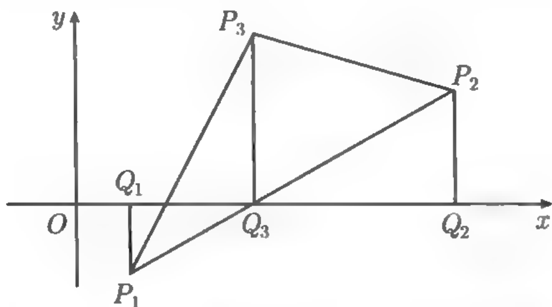


图 5.2.1 三角形各顶点到一直线的垂线

方法 1 直线 $P_{i+1}P_{i+2}$ 的方程为

$$(y_{i+1}-y_{i+2})x+(x_{i+2}-x_{i+1})y+(x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1})=0,$$

于是

$$d_{P_{i+1}P_{i+2}}D_{Q_i-P_{i+1}P_{i+2}}=x_i(y_{i+1}-y_{i+2})+(x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1})$$

所以

$$\begin{aligned}&d_{P_3P_1}D_{Q_2-P_3P_1}+d_{P_2P_3}D_{Q_1-P_2P_3}+d_{P_1P_2}D_{Q_3-P_1P_2}\\=&\sum_{i=1}^{3}[(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)]=4D_{P_1P_2P_3}.\end{aligned}$$

方法 2 根据三角形有向面积公式, 得

$$\begin{aligned}&2\sum_{i=1}^{3}D_{Q_iP_{i+1}P_{i+2}}\\=&\sum_{i=1}^{3}[(x_iy_{i+1}-x_{i+1}\cdot 0)+(x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1})+(x_{i+2}\cdot 0-x_iy_{i+2})]\\=&\sum_{i=1}^{3}x_iy_{i+1}+\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)-\sum_{i=1}^{3}x_{i+1}y_i\\=&2\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)=4D_{P_1P_2P_3},\end{aligned}$$

从而式 (5.2.2) 成立.

推论 5.2.1 过等边三角形 $P_1P_2P_3$ 的各个顶点 P_i 向任一直线作垂线, 垂足为 $Q_i(i=1,2,3)$, 则

$$D_{Q_1-P_2P_3}+D_{Q_2-P_3P_1}+D_{Q_3-P_1P_2}=\pm 2h,$$

其中 $P_1P_2P_3$ 为正向三角形时取 “+” 号, 反向三角形时取 “−” 号.

证明　在式 (5.2.1) 中令 $d_{P_3P_1}=d_{P_2P_3}=d_{P_1P_2}=a, D_{P_1P_2P_3}=\pm\frac{1}{2}ah$ 即得.

定理 5.2.3　设 $P_1P_2P_3P_4$ 是两对角线互相垂直的凸四边形, Q_i 是边 P_iP_{i+1} 的中点, 则

$$\begin{aligned}&d_{P_1P_2}D_{Q_3-P_1P_2}+d_{P_3P_4}D_{Q_1-P_3P_4}\\=&d_{P_2P_3}D_{Q_4-P_2P_3}+d_{P_4P_1}D_{Q_2-P_4P_1}=2D_{P_1P_2P_3P_4},\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

即

$$D_{Q_3P_1P_2}+D_{Q_1P_3P_4}=D_{Q_4P_2P_3}+D_{Q_2P_4P_1}=D_{P_1P_2P_3P_4}.\tag{5.2.4}$$

证明　如图 5.2.2 所示. 不妨设 $P_1P_2P_3P_4$ 顶点的坐标为 $P_1(a,0),P_2(0,b)$, $P_3(-c,0),P_4(0,-d)$ $(a,b,c,d>0)$, 于是各边的中点依次为

$$Q_1\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right),\quad Q_2\left(-\frac{c}{2},\frac{b}{2}\right),\quad Q_3\left(-\frac{c}{2},-\frac{d}{2}\right),\quad Q_4\left(\frac{a}{2},-\frac{d}{2}\right).$$

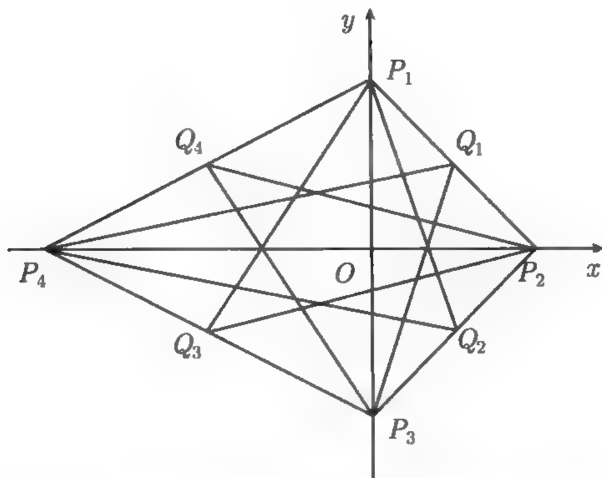


图 5.2.2　对角线互相垂直的四边形及各边的中点

方法 1　P_1P_2 的直线方程为

$$\begin{vmatrix}x&y&1\\a&0&1\\0&b&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -bx-ay+ab=0,$$

故

$$d_{P_1P_2}D_{Q_3-P_1P_2}=(-b)\times\left(-\frac{c}{2}\right)-a\times\left(-\frac{d}{2}\right)+bc=\frac{1}{2}(2ab+bc+da),$$

类似地可以求得

$$d_{P_2P_3}D_{Q_4-P_2P_3}=\frac{1}{2}(ab+cd+2bc),$$
$$d_{P_3P_4}D_{Q_1-P_3P_4}=\frac{1}{2}(2cd+bc+da),$$
$$d_{P_4P_1}D_{Q_4-P_4P_1}=\frac{1}{2}(2ad+dc+ab).$$

所以

$$\begin{aligned}&d_{P_1P_2}D_{Q_3-P_1P_2}+d_{P_3P_4}D_{Q_1-P_3P_4}=d_{P_2P_3}D_{Q_4-P_2P_3}+d_{P_4P_1}D_{Q_2-P_4P_1}\\=&ab+bc+cd+cd=(a+c)(b+d)=2S_{P_1P_2P_3P_4}=2D_{P_1P_2P_3P_4},\end{aligned}$$

所以式 (5.2.3) 成立.

方法 2 根据三角形有向面积公式得

$$D_{Q_3P_1P_2}=\frac{1}{2}\left[\left(0+\frac{1}{2}ad\right)+(ab-0)+\left(0+\frac{1}{2}bc\right)\right]=\frac{1}{4}(2ab+ad+bc),$$

$$D_{Q_1P_3P_4}=\frac{1}{2}\left[\left(0+\frac{1}{2}bc\right)+(cd-0)+\left(0+\frac{1}{2}ad\right)\right]=\frac{1}{4}(bc+ad+2cd),$$

所以

$$D_{Q_3P_1P_2}+D_{Q_1P_3P_4}=\frac{1}{2}(ab+ad+bc+cd),$$

同理

$$D_{Q_4P_2P_3}+D_{Q_2P_4P_1}=\frac{1}{2}(ab+ad+bc+cd).$$

又由多边形面积公式得

$$D_{P_1P_2P_3P_4}=\frac{1}{2}[(ab-0)+(0+bc)+(ad-0)+(0+ad)]=\frac{1}{2}(ab+bc+ad+cd),$$

所以式 (5.2.4) 成立.

注 5.2.1 定理 5.2.3 的几何意义是, 两对角线互相垂直的四边形的两对边中点与其对边构成的两个三角形的有向面积的和等于四边形的有向面积的两倍.

定理 5.2.4[13] 设 P 为三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{3}d_{PP_i}\geqslant\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{d_{P_{i+1}P_{i+2}}}{d_{P_{i+2}P_i}}+\frac{d_{P_{i+2}P_i}}{d_{P_{i+1}P_{i+2}}}\right)D_{P-P_{i+1}P_{i+2}},\tag{5.2.5}$$

当且仅当 P 为三角形 $P_1P_2P_3$ 外心时等号成立.

证明 如图 5.2.3 所示. 不妨设 $P_1P_2P_3$ 为正向三角形, 于是由定理 5.2.3 得

$$2S_{P_1P_2P_3}=2D_{P_1P_2P_3}=d_{P_1P_2}D_{P-P_1P_2}+d_{P_2P_3}D_{P-P_2P_3}+d_{P_3P_1}D_{P-P_3P_1},$$

注意到

$$d_{PP_1}+D_{P-P_2P_3}\geqslant d_{P_1-P_2P_3},$$

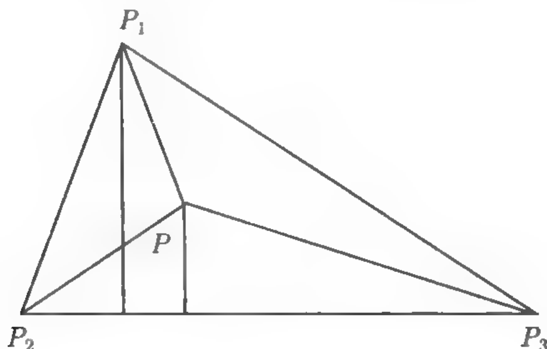


图 5.2.3　点到三角形各边的有向距离

其中当且仅当 P 在 P_1 到 P_2P_3 上的高上时等号成立. 于是

$$\begin{aligned}d_{P_2P_3}(d_{PP_1}+D_{P-P_2P_3})\geqslant& d_{P_2P_3}d_{P_1-P_2P_3}\\=&d_{P_1P_2}D_{P-P_1P_2}+d_{P_2P_3}D_{P-P_2P_3}+d_{P_3P_1}D_{P-P_3P_1},\end{aligned}$$

即

$$d_{P_2P_3}d_{PP_1}\geqslant d_{P_3P_1}D_{P-P_3P_1}+d_{P_1P_2}D_{P-P_1P_2}\tag{5.2.6}$$

将式 (5.2.6) 应用到三角形 $P_1P_2P_3$ 关于 $\angle P_1$ 平分线对称的三角形 $P_1P_2'P_3'$(图 5.2.4), 得

$$d_{P_2P_3}d_{PP_1}\geqslant d_{P_1P_2}D_{P-P_3P_1}+d_{P_3P_1}D_{P-P_1P_2},$$

即

$$d_{PP_1}\geqslant\frac{d_{P_1P_2}}{d_{P_2P_3}}D_{P-P_3P_1}+\frac{d_{P_3P_1}}{d_{P_2P_3}}D_{P-P_1P_2},\tag{5.2.7}$$

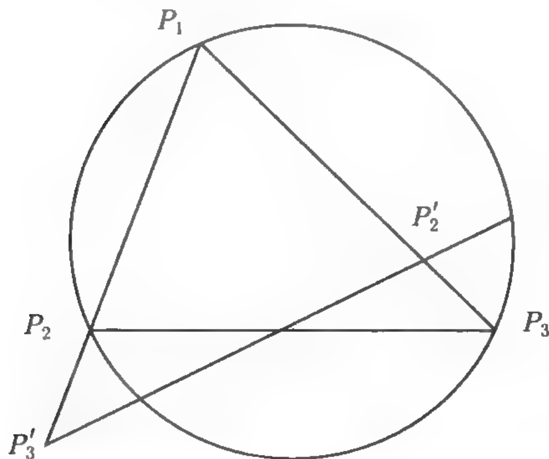


图 5.2.4　三角形关于角平分线对称的三角形

等号成立当且仅当 P 在 P_1 到 $P_2'P_3'$ 上的高, 即通过 P_1 和三角形 $P_1P_2P_3$ 外接圆心的直线上时成立.

同理可得

$$d_{PP_2} \geqslant \frac{d_{P_2P_3}}{d_{P_3P_1}} D_{P-P_1P_2} + \frac{d_{P_1P_2}}{d_{P_3P_1}} D_{P-P_2P_3}, \tag{5.2.8}$$

$$d_{PP_3} \geqslant \frac{d_{P_3P_1}}{d_{P_1P_2}} D_{P-P_2P_3} + \frac{d_{P_2P_3}}{d_{P_1P_2}} D_{P-P_3P_1}, \tag{5.2.9}$$

式 (5.2.7)+(5.2.8)+(5.2.9) 即得式 (5.2.6), 当且仅当 P 为三角形 $P_1P_2P_3$ 外心时等号成立.

推论 5.2.2(Erdos-Mordell 不等式) 设 P 为三角形 $P_1P_2P_3$ 内任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{3} d_{PP_i} \geqslant 2\sum_{i=1}^{3} d_{P-P_{i+1}P_{i+2}},$$

其中当且仅当 P 为正三角形 $P_1P_2P_3$ 外心时等号成立.

证明 因为 P 为三角形 $P_1P_2P_3$ 内任意一点, 所以 $D_{P-P_2P_3} > 0, D_{P-P_3P_1} > 0, D_{P-P_1P_2} > 0$. 于是 $D_{P-P_2P_3} = d_{P-P_2P_3}, D_{P-P_3P_1} = d_{P-P_3P_1}, D_{P-P_1P_2} = d_{P-P_1P_2}$.

又因为

$$\frac{d_{P_{i+1}P_{i+2}}}{d_{P_{i+2}P_i}} + \frac{d_{P_{i+2}P_i}}{d_{P_{i+1}P_{i+2}}} \geqslant 2(i=1,2,3),$$

其中当且仅当 $P_1P_2P_3$ 为正三角形外心时各等号均成立, 所以推论 5.2.1 结论成立.

第 6 章　分点多边形有向面积公式及应用

6.1　分点多边形有向面积公式及应用

众所周知, Menelaus 定理是平面几何中著名的定理, 在几何证题中具有广泛的应用. 本节首先给出多边形的完全分比点多边形和和多边形的分点三角形等的概念; 其次给出三角形的完全分点三角形有向面积公式, 并据此推出三角形中分点三角形的定值定理和几道数学竞赛题等的结论, 以及著名的 Menelaus 定理及其推论; 再次给出四边形的完全等比分点四边形有向面积公式, 并据此推出四边形中分点三角形的定值定理, 从而给出几道数学竞赛题等结论的证明; 最后给出三角形中有向面积的一个定值定理及其推论.

6.1.1　分点多边形的基本概念

定义 6.1.1　设 Q_i 为 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 各边 P_iP_{i+1} $(i=1,2,\cdots,n)$ 的分点, 且 $P_iQ_i/Q_iP_{i+1}=\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$. 若依次以 Q_i 为顶点构成一个多边形, 则称 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 为 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 完全分点多边形, 简称为完全分比点多边形.

特别地, 当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$ 时, $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 称为 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的完全 λ- 等分点多边形, 简称为完全等分点多边形; 而当 $\lambda=1/2$ 时, $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 称为 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的完全中点多边形.

显然, 当 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 中有连续三点共线时, 完全分点多边形 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 为边数小于 n 的多边形. 特别, 为方便起见, 当 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 共线时, 我们把 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 看成是完全分点多边形的特殊情形.

若存在 $1\leqslant i<j\leqslant n$, 线段 Q_iQ_{i+1}, Q_jQ_{j+1} 相交, 则 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 不存在完全分比点多边形. 但三角形完全分点三角形总是存在的 (含三分点共线的情形).

定义 6.1.2　设 Q_i 是 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 各边 P_iP_{i+1} $(i=1,2,\cdots,n)$ 的分点, 则称以其中任意两点 $Q_i,Q_j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 之间的连线为一边的三角形为多边形的分点三角形.

显然, 三角形的完全分点三角形是三角形的分点三角形的特殊情形.

定义 6.1.3　四个共线点 P_1,P_2,P_3,P_4 的交比 (P_1P_2,P_3P_4) 定义为两个简比 $(P_1P_2P_3)=P_1P_3/P_2P_3$ 与 $(P_1P_2P_4)=P_1P_4/P_2P_4$ 的比, 即

$$(P_1P_2, P_3P_4) = \frac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)} = \frac{P_1P_3 \cdot P_2P_4}{P_2P_3 \cdot P_1P_4}.$$

6.1.2 三角形的分点三角形有向面积公式及应用

定理 6.1.1 设 $Q_1Q_2Q_3$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 分点三角形, 则完全分点三角形的有向面积

$$D_{Q_1Q_2Q_3} = \frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)} D_{P_1P_2P_3} \tag{6.1.1}$$

其中 $P_{3+j} = P_j, Q_{3+j} = Q_j$, 其余类同.

证明 如图 6.1.1 所示. 设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点的坐标为 $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, P 点的坐标为 $P(x, y)$. 由题设得分点 Q_i 的坐标

$$Q_i\left(\frac{x_i+\lambda_i x_{i+1}}{1+\lambda_i}, \frac{y_i+\lambda_i y_{i+1}}{1+\lambda_i}\right) (i = 1,\ 2,\ 3),$$

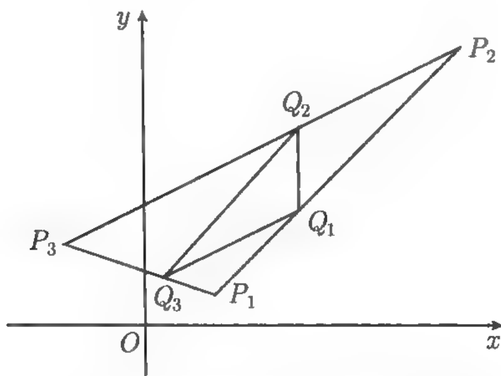


图 6.1.1 三角形的定比分点三角形

根据三角形有向面积公式, 得

$$\begin{aligned}
D_{Q_1Q_2Q_3} =& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{x_i+\lambda_i x_{i+1}}{1+\lambda_i} \cdot \frac{y_{i+1}+\lambda_{i+1}y_{i+2}}{1+\lambda_{i+1}} - \frac{x_{i+1}+\lambda_{i+1}x_{i+2}}{1+\lambda_{i+1}} \cdot \frac{y_i+\lambda_i y_{i+1}}{1+\lambda_i}\right)\\
=& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{1+\lambda_{i+2}}{(1+\lambda_i)(1+\lambda_{i+1})(1+\lambda_{i+2})}[(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)\\
&+ \lambda_{i+1}(x_iy_{i+2} - x_{i+2}y_i) + \lambda_i\lambda_{i+1}(x_{i+1}y_{i+2} - x_{i+2}y_{i+1})]\\
=& \frac{1}{2(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\sum_{i=1}^{3}[(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i) + \lambda_{i+2}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)\\
&+ \lambda_{i+1}(x_iy_{i+2} - x_{i+2}y_i)] + \lambda_{i+1}\lambda_{i+2}(x_iy_{i+2} - x_{i+2}y_i)\\
&+ \lambda_i\lambda_{i+1}(x_{i+1}y_{i+2} - x_{i+2}y_{i+1}) + \lambda_i\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}(x_{i+1}y_{i+2} - x_{i+2}y_{i+1})]\\
=& \frac{1}{2(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\sum_{i=1}^{3}[(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\lambda_{i+1}(x_{i+2}y_i-x_iy_{i+2})+\lambda_{i+1}(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)]\\
&+\lambda_i\lambda_{i+1}(x_{i+2}y_{i+1}-x_{i+1}y_{i+2})+\lambda_i\lambda_{i+1}(x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1})\\
&+\lambda_1\lambda_2\lambda_3(x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1})]\\
=&\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{2(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\\
=&\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}D_{P_1P_2P_3}.
\end{aligned}
$$

推论 6.1.1(第 34 届美国数学竞赛题)　(1) 设 $P_1P_2P_3$ 是任意三角形, Q_1,Q_2,Q_3 是 P_1P_2,P_2P_3,P_3P_1 边上任意的点, 证明

$$S_{Q_1Q_2Q_3}\geqslant\frac{1}{4}S_{P_1P_2P_3}. \tag{6.1.2}$$

(2) 设三角形 $P_1P_2P_3$ 是任意三角形, Q_1,Q_2,Q_3 是 P_1P_2,P_2P_3,P_3P_1 边上任意的点, 证明: 三个三角形 $P_1Q_1Q_3,P_2Q_2Q_1,P_3Q_3Q_2$ 中, 至少有一个的面积小于等于三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的面积.

证明　(1) 当 Q_1,Q_2,Q_3 在边 P_1P_2,P_2P_3,P_3P_1 上时 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$, 于是式 (6.1.1) 知

$$S_{Q_1Q_2Q_3}=\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}S_{P_1P_2P_3}. \tag{6.1.3}$$

令 $f(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\dfrac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)},\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$. 则由

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial\lambda_1}=\dfrac{\lambda_2\lambda_3-1}{(1+\lambda_1)^2(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}=0,\\
\dfrac{\partial f}{\partial\lambda_2}=\dfrac{\lambda_3\lambda_1-1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)^2(1+\lambda_3)}=0,\\
\dfrac{\partial f}{\partial\lambda_3}=\dfrac{\lambda_1\lambda_2-1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)^2}=0
\end{cases}
$$

求得函数唯一的驻点 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, 故由问题的实际意义知, 当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 时, 函数的最小值为 $f(1,1,1)=1/4$, 故由式 (6.1.3) 知式 (6.1.2) 成立.

注 6.1.1　第 34 届美国数学竞赛题是在距离 $d_{P_1Q_1}<d_{Q_1P_2},d_{P_2Q_2}<d_{Q_2P_3}$, $d_{P_3Q_3}<d_{Q_3P_1}$ 的情形下证明式 (6.1.2) 的.

(2) 用反证法. 如图 6.1.1 所示, 假设三个三角形 $P_1Q_1Q_3,P_2Q_2Q_1,P_3Q_3Q_2$ 的面积均大于三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的面积, 于是

$$S_{Q_1Q_2Q_3}+S_{P_1Q_1Q_3}+S_{P_2Q_2Q_1}+S_{P_3Q_3Q_2}>S_{P_1P_2P_3},$$

这与 $S_{Q_1Q_2Q_3}+S_{P_1Q_1Q_3}+S_{P_2Q_2Q_1}+S_{P_3Q_3Q_2}=S_{P_1P_2P_3}$ 矛盾. 从而三个三角形 $P_1Q_1Q_3, P_2Q_2Q_1, P_3Q_3Q_2$ 中, 至少有一个的面积小于等于三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的面积.

推论 6.1.2(1945 年莫斯科数学奥林匹克竞赛题) 将三角形 $P_1P_2P_3$ 的三个顶点 P_1, P_2, P_3 与对边 P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 上的点 Q_2, Q_3, Q_1 连接起来, 证明: P_1Q_2, P_2Q_3, P_3Q_1 的中点不位于同一直线上.

证明 如图 6.1.2 所示. 设 P_1Q_2, P_2Q_3, P_3Q_1 的中点分别为 R_1, R_2, R_3, 于是它们的坐标为

$$R_i\left(\frac{(1+\lambda_{i+1})x_i+x_{i+1}+\lambda_{i+1}x_{i+2}}{2(1+\lambda_{i+1})}, \frac{(1+\lambda_{i+1})y_i+y_{i+1}+\lambda_{i+1}y_{i+2}}{2(1+\lambda_{i+1})}\right)(i=1,2,3).$$

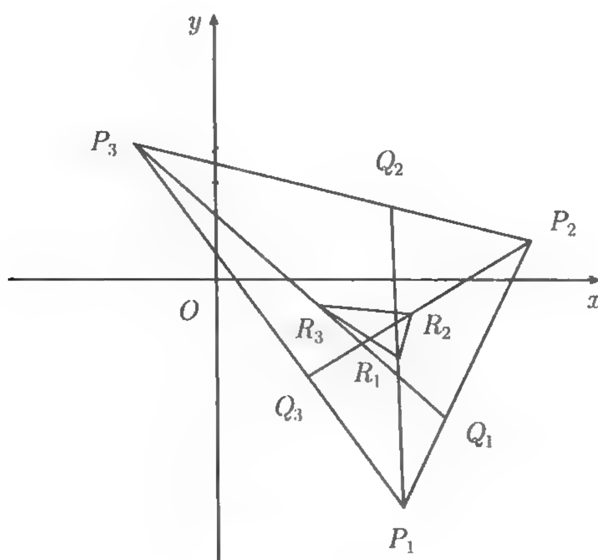


图 6.1.2

于是

$$\begin{aligned}
&8(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)D_{R_1R_2R_3}\\
=&\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_i)\{[(1+\lambda_{i+1})x_i+x_{i+1}+\lambda_{i+1}x_{i+2}][(1+\lambda_{i+2})y_{i+1}+y_{i+2}+\lambda_{i+2}y_i]\\
&-[(1+\lambda_{i+2})x_{i+1}+x_{i+2}+\lambda_{i+2}x_i][(1+\lambda_{i+1})y_i+y_{i+1}+\lambda_{i+1}y_{i+2}]\}\\
=&\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_i)[(1+\lambda_{i+1})(1+\lambda_{i+2})(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+(1+\lambda_{i+1})(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)\\
&+(x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1})+\lambda_{i+2}(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})\\
&+\lambda_{i+1}(1+\lambda_{i+2})(x_{i+2}y_{i+1}-x_{i+1}y_{i+2})+\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}(x_{i+2}y_i-x_iy_{i+2})]\\
=&\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_i)(1+\lambda_{i+1})(1+\lambda_{i+2})(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_i)(1+\lambda_{i+1})(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)+\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_i)(x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1})\\
&+\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_i)\lambda_{i+2}(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})\\
&+\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_i)\lambda_{i+1}(1+\lambda_{i+2})(x_{i+2}y_{i+1}-x_{i+1}y_{i+2})\\
&+\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_i)\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}(x_{i+2}y_i-x_iy_{i+2})\\
=&\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_i)(1+\lambda_{i+1})(1+\lambda_{i+2})(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\\
&+\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_{i+1})(1+\lambda_{i+2})(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})+\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_{i+2})(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\\
&+\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_i)\lambda_{i+2}(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})\\
&+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(1+\lambda_{i+1})(1+\lambda_{i+2})(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})\\
&+\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_{i+1})\lambda_i\lambda_{i+2}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\\
=&\sum_{i=1}^{3}(1+\lambda_i\lambda_{i+1}\lambda_{i+2})(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\\
=&(1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)=2(1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)D_{P_1P_2P_3},
\end{aligned}
$$

依题设$1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$, 所以 $D_{R_1R_2R_3}=\dfrac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{4(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}D_{P_1P_2P_3}\neq 0$, 于是 P_1Q_2, P_2Q_3, P_3Q_1 的中点 R_1, R_2, R_3 不位于同一直线上.

定理 6.1.2　设 $k_1k_2k_3$ 是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的任意一个排列, $Q_1Q_2Q_3$ 和 $R_1R_2R_3$ 分别三角形 $P_1P_2P_3$ 的 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 和 $(1/k_1,1/k_2,1/k_3)$ 完全分点三角形, 则 $S_{Q_1Q_2Q_3}=S_{R_1R_2R_3}$.

证明　因为 $k_1k_2k_3$ 是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的一个排列, 所以

$$
k_1k_2k_3=\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3},\quad (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)=\frac{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3},
$$

根据式 (6.1.1) 得

$$
\begin{aligned}
D_{R_1R_2R_3} &= \frac{1+k_1k_2k_3}{(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)}D_{P_1P_2P_3} \\
&= \frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}D_{P_1P_2P_3} = D_{Q_1Q_2Q_3}.
\end{aligned}
$$

推论 6.1.3 设 Q_1,Q_2,Q_3 和 R_1,R_2,R_3 分别都是三角形 $P_1P_2P_3$ 三边 P_1P_2, P_2P_3,P_3P_1 所在直线上的点, 且 R_1,R_2,R_3 分别跟 Q_1,Q_2,Q_3 关于 P_1P_2,P_2P_3,P_3P_1 的中点对称或 $R_1Q_2//P_3P_1, R_2Q_3//P_1P_2, R_3Q_1//P_2P_3$, 则 $S_{Q_1Q_2Q_3}=S_{R_1R_2R_3}$.

证明 如图 6.1.3 和图 6.1.4 所示. 在定理 6.1.2 中分别取 $k_1=\lambda_1, k_2=\lambda_2, k_3=\lambda_3$ 和 $k_1=\lambda_2, k_2=\lambda_3, k_3=\lambda_1$ 即得.

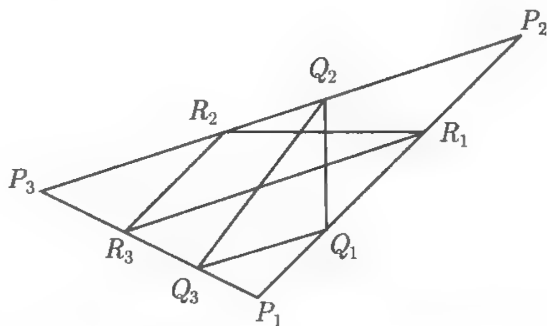


图 6.1.3 三角形各边中点对称的分点及其三角形

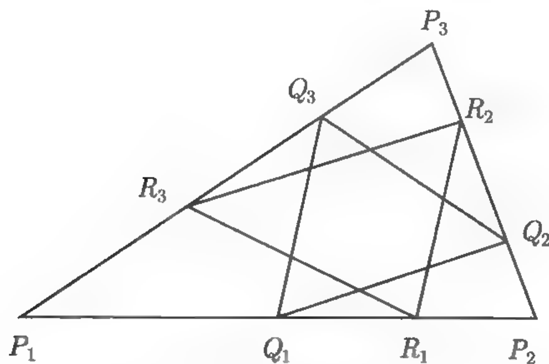


图 6.1.4 两边分点的连线平行于第三边及分点三角形

定理 6.1.3(Menelaus 定理) 在三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边 P_iP_{i+1} 所在直线上依次取点 Q_i $(i=1,\ 2,\ 3)$, 则 Q_1, Q_2, Q_3 共线的充分必要条件是

$$
\frac{P_1Q_1}{Q_1P_2}\cdot\frac{P_2Q_2}{Q_2P_3}\cdot\frac{P_3Q_3}{Q_3P_1}=-1. \tag{6.1.4}
$$

证明 如图 6.1.5 所示. 由定理 6.1.1 可知

$$
Q_1,\ Q_2,\ Q_3\text{共线} \Leftrightarrow D_{Q_1Q_2Q_3}=0 \Leftrightarrow 1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0 \Leftrightarrow \frac{P_1Q_1}{Q_1P_2}\cdot\frac{P_2Q_2}{Q_2P_3}\cdot\frac{P_3Q_3}{Q_3P_1}=-1.
$$

推论 6.1.4 设 Q_1,Q_2,Q_3 和 R_1,R_2,R_3 分别都是三角形 $P_1P_2P_3$ 三边 P_1P_2, P_2P_3,P_3P_1 所在直线上的点, 且 R_1,R_2,R_3 分别跟 Q_1,Q_2,Q_3 关于 P_1P_2,P_2P_3,P_3P_1

的中点对称或 $R_1Q_2//P_3P_1, R_2Q_3//P_1P_2, R_3Q_1//P_2P_3$, 则 Q_1, Q_2, Q_3 三点共线的充要条件是 R_1, R_2, R_3 三点共线.

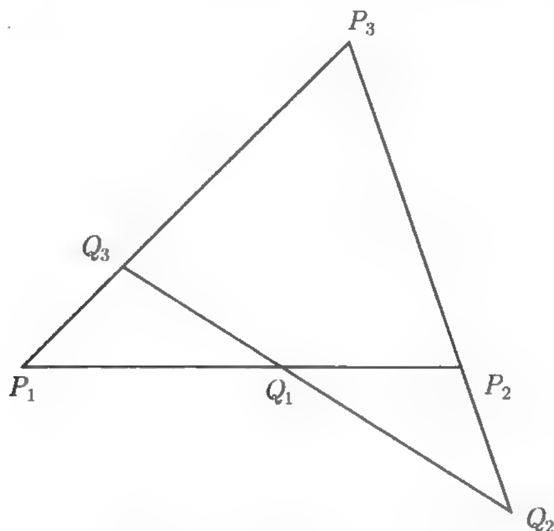


图 6.1.5　Menelaus 定理

证明　在推论 6.1.2 中注意到 Q_1, Q_2, Q_3 三点共线 $\Leftrightarrow D_{Q_1Q_2Q_3}=0 \Leftrightarrow D_{R_1R_2R_3}=0 \Leftrightarrow R_1, R_2, R_3$ 三点共线, 即得.

推论 6.1.5　在 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的各边 P_iP_{i+1} 所在直线上依次取点 Q_i $(i=1, 2, \cdots, n)$, 则 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 共线的充分必要条件是

$$\frac{P_1Q_1}{Q_1P_2}\cdot\frac{P_2Q_2}{Q_2P_3}\cdot\cdots\cdot\frac{P_nQ_n}{Q_nP_1}=(-1)^n. \tag{6.1.5}$$

证明　用数学归纳法. 当 $n=3$ 时, 由式 (6.1.4) 结论成立. 假设 $n\leqslant k$ 时结论成立, 则当 $n=k+1$ 时, 根据引理 4.2.1, 不妨设 $P_1P_2\cdots P_{k+1}$ $(k\geqslant 3)$ 可以用其内部的对角线 P_1P_3 将它分成三角形 $P_1P_2P_3$ 和一个边数不小于 $k-2$ 且不大于 k 的多边形 $P_1P_3\cdots P_{k+1}$ 的和. 在 P_1P_3 所在直线上取一点 Q_3', 则

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3'\text{共线}\Leftrightarrow\frac{P_1Q_1}{Q_1P_2}\cdot\frac{P_2Q_2}{Q_2P_3}\cdot\frac{P_3Q_3'}{Q_3'P_1}=-1.$$

由归纳假设, 不管 $P_1P_3\cdots P_{k+1}$ 是 $k-2$ 边形, $k-1$ 边形, 还是 k 边形, 都有

$$Q_3', Q_3, \cdots, Q_{k+1}\text{共线}\Leftrightarrow\frac{P_1Q_3'}{Q_3'P_3}\cdot\frac{P_3Q_4}{Q_4P_4}\cdot\cdots\cdot\frac{P_{k+1}Q_{k+1}}{Q_{k+1}P_1}=(-1)^k,$$

从而

$$Q_1, Q_2, \cdots, Q_{k+1}\text{共线}\Leftrightarrow\frac{P_1Q_1}{Q_1P_2}\cdot\frac{P_2Q_2}{Q_2P_3}\cdot\cdots\cdot\frac{P_{k+1}Q_{k+1}}{Q_{k+1}P_1}=(-1)^{k+1},$$

即 $n=k+1$ 时结论也成立. 根据数学归纳法原理, 对任意的自然数 n, 式 (6.1.5) 成立.

推论 6.1.6　设 P 为三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, $Q_1Q_2Q_3$ 为 $P_1P_2P_3$ 的 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 完全分点三角形, 则分点三角形的有向面积

$$\sum_{i=1}^{3} D_{PQ_iQ_{i+1}} = \frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)} D_{P_1P_2P_3}.$$

证明 由定理 4.3.1 及定理 6.1.1 即得.

推论 6.1.7 在三角形 $P_1P_2P_3$ 三边 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 所在直线上依次分别取两点 Q_1 和 Q'_1, Q_2 和 Q'_2, Q_3 和 Q'_3, 使交比分别为 $(P_1P_2, Q'_1Q_1) = k_1, (P_2P_3, Q'_2Q_2) = k_2, (P_3P_1, Q'_3Q_3) = k_3$, 且 $k_1k_2k_3 = 1$. 证明: Q'_1, Q'_2, Q'_3 共线的充分条件是 Q_1, Q_2, Q_3 共线.

证明 设 $\dfrac{P_iQ_i}{Q_iP_{i+1}} = \lambda_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$, 于是根据交比的定义 6.1.2, 得

$$\frac{P_iQ'_i}{P_{i+1}Q'_i} = -k_i\lambda_i \ (i = 1,\ 2,\ 3),$$

即

$$\frac{P_iQ'_i}{Q'_iP_{i+1}} = k_i\lambda_i \ (i = 1,\ 2,\ 3).$$

由定理 6.1.1, 得

$$\begin{aligned} D_{Q_1Q_2Q_3} &= \frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)} D_{P_1P_2P_3}, \\ D_{Q'_1Q'_2Q'_3} &= \frac{1+\lambda_1k_1\cdot\lambda_2k_2\cdot\lambda_3k_3}{(1+k_1\lambda_1)(1+k_2\lambda_2)(1+k_3\lambda_3)} D_{P_1P_2P_3} \\ &= \frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+k_1\lambda_1)(1+k_2\lambda_2)(1+k_3\lambda_3)} D_{P_1P_2P_3}. \end{aligned}$$

于是

$$D_{Q'_1Q'_2Q'_3} = \frac{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}{(1+k_1\lambda_1)(1+k_2\lambda_2)(1+k_3\lambda_3)} D_{Q_1Q_2Q_3},$$

所以 Q'_1, Q'_2, Q'_3 共线 $\Leftrightarrow D_{Q'_1Q'_2Q'_3} = 0 \Leftrightarrow D_{Q_1Q_2Q_3} = 0 \Leftrightarrow Q_1, Q_2, Q_3$ 共线.

6.1.3 四边形的分点四边形有向面积公式及应用

定理 6.1.4 设 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 为四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的完全 λ 等分点四边形, 则完全 λ 等分点四边形的有向面积

$$D_{Q_1Q_2Q_3Q_4} = \frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} D_{P_1P_2P_3P_4}.$$

证明 如图 6.1.6 所示. 设四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的顶点的坐标为 $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. 由题设得分点 Q_i 的坐标

$$Q_i\left(\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}, \frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}\right) \ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

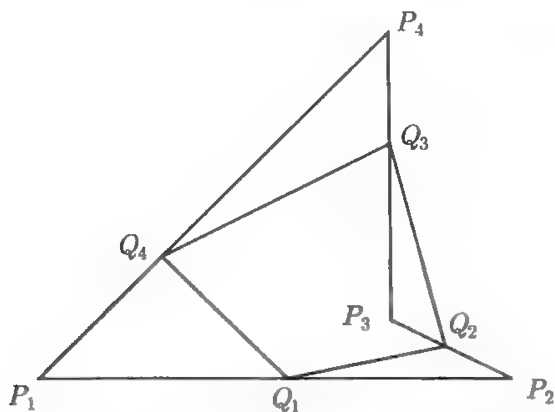


图 6.1.6　四边形的等比分点四边形

根据多边形有向面积公式, 得

$$
\begin{aligned}
&D_{Q_1Q_2Q_3Q_4}\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}\cdot\frac{y_{i+1}+\lambda y_{i+2}}{1+\lambda}-\frac{x_{i+1}+\lambda x_{i+2}}{1+\lambda}\cdot\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}\right)\\
=&\frac{1}{2(1+\lambda)^2}\sum_{i=1}^{4}\left[(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+\frac{\lambda}{2(1+\lambda)^2}\sum_{i=1}^{4}(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)\right.\\
&\left.+\frac{\lambda^2}{2(1+\lambda)^2}(x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1})\right]\\
=&\frac{1+\lambda^2}{2(1+\lambda)^2}\sum_{i=1}^{4}[(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)]=\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}D_{P_1P_2P_3P_4}.
\end{aligned}
$$

推论 6.1.8　设 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 和 $R_1R_2R_3R_4$ 分别是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的完全 λ 分点四边形和完全 $1/\lambda$ 分点四边形, 则 $S_{Q_1Q_2Q_3Q_4}=S_{R_1R_2R_3R_4}$.

证明　如图 6.1.7 所示. 由定理 6.1.4 得

$$
S_{R_1R_2R_3R_4}=\frac{1+(1/\lambda)^2}{(1+1/\lambda)^2}S_{P_1P_2P_3P_4}=\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}S_{P_1P_2P_3P_4}=S_{Q_1Q_2Q_3Q_4}.
$$

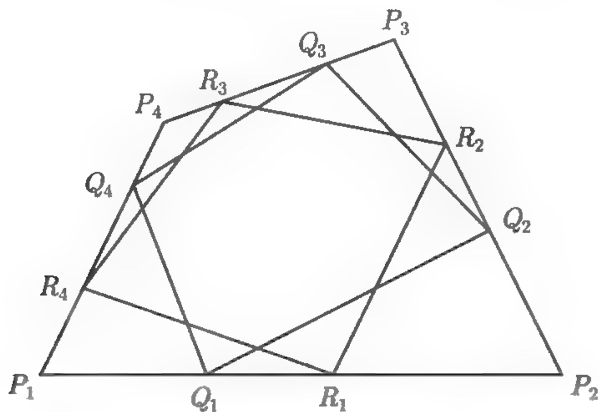


图 6.1.7　四边形的两个对称的等比分点四边形

推论 6.1.9 设 P 为四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 所在平面上任意一点, $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 为四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的完全 λ 等分点四边形, 则

$$\sum_{i=1}^{4} D_{PQ_iQ_{i+1}} = \frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2} D_{P_1P_2P_3P_4}.$$

证明 由定理 4.3.1 及定理 6.1.3 即得.

定理 6.1.5 设 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 为四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的完全 λ 等分点四边形, 则

$$D_{P_1P_2P_3P_4} = D_{Q_1P_3P_4} + D_{Q_3P_1P_2} = D_{Q_2P_4P_1} + D_{Q_4P_2P_4}. \tag{6.1.6}$$

证明 如图 6.1.7 所示. 设四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的顶点的坐标为 $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. 由题设得分点 Q_i 的坐标

$$Q_i\left(\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}, \frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}\right) \ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

于是

$$\begin{aligned}
& 2(1+\lambda)(D_{Q_1P_3P_4} + D_{Q_3P_1P_2}) \\
=&[(x_1+\lambda x_2)y_3 - x_3(y_1+\lambda y_2)] + (1+\lambda)(x_3y_4 - x_4y_3) \\
& + [x_4(y_1+\lambda y_2) - (x_1+\lambda x_2)y_4] + [(x_3+\lambda x_4)y_1 - x_1(y_3+\lambda y_4)] \\
& + (1+\lambda)(x_1y_2 - x_2y_1) + [x_2(y_3+\lambda y_4) - (x_3+\lambda x_4)y_2] \\
=&(1+\lambda)[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + (x_4y_1 - x_1y_4)] \\
=&(1+\lambda)D_{P_1P_2P_3P_4},
\end{aligned}$$

所以 $D_{P_1P_2P_3P_4} = D_{Q_1P_3P_4} + D_{Q_3P_1P_2}$.

同理 $D_{P_1P_2P_3P_4} = D_{Q_2P_4P_1} + D_{Q_4P_2P_4}$, 因此式 (6.1.6) 成立.

推论 6.1.10 设 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 为凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的完全 λ 等分点四边形, 则

$$S_{P_1P_2P_3P_4} = S_{Q_1P_3P_4} + S_{Q_3P_1P_2} = S_{Q_2P_4P_1} + S_{Q_4P_2P_4}. \tag{6.1.7}$$

证明 当 $P_1P_2P_3P_4$ 为凸四边形时, 在式 (6.1.6) 中注意到四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 和三角形 $Q_1P_3P_4, Q_3P_1P_2; Q_2P_4P_1, Q_4P_2P_3$ 都是同向的, 即得式 (6.1.7).

注 6.1.2 当 $\lambda > 0$, 即 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 为凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的完全 λ 等分点四边形时, 由推论 6.1.9 即得1961 年基辅数学奥林匹克题的结论; 特别, 当 $\lambda = 1$, 即 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 为凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的完全中点四边形时, 即得 1989 年第 30 届国际数学奥林匹克候选题的结论.

定理 6.1.6 设 Q_i 是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的边 P_iP_{i+1} 所在直线上一点, 且 $P_iQ_i/Q_iP_{i+1} = \lambda_i$ $(P_{i+4} = P_i; i = 1, 2, 3, 4)$, 则

$$D_{P_iP_{i+1}Q_{i+2}} = \frac{D_{P_iP_{i+1}P_{i+2}} + \lambda_{i+2}D_{P_iP_{i+1}P_{i+3}}}{1+\lambda_{i+2}}, \quad i=1,2,3,4. \tag{6.1.8}$$

证明 如图 6.1.8 所示. 设四边形顶点的坐标为 $P_i(x_i, y_i)$, 则各边所在直线分点的坐标为

$$Q_i\left(\frac{x_i+\lambda_i x_{i+1}}{1+\lambda_i}, \frac{y_i+\lambda_i y_{i+1}}{1+\lambda_i}\right)(i=1,2,3,4).$$

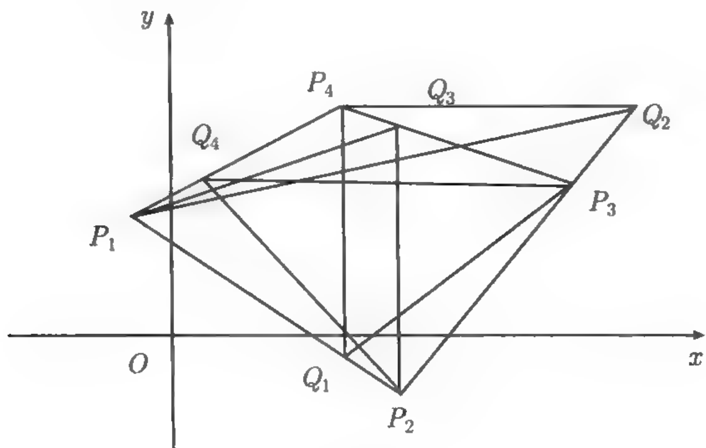


图 6.1.8

于是

$$\begin{aligned}
&(1+\lambda_{i+2})D_{P_iP_{i+1}Q_{i+2}}\\
=&\frac{1}{2}[(1+\lambda_{i+2})(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+x_{i+1}(y_{i+2}+\lambda_{i+2}y_{i+3})\\
&-(x_{i+2}+\lambda_{i+2}x_{i+3})y_{i+1}]+\frac{1}{2}[(x_{i+2}+\lambda_{i+2}x_{i+3})y_i-x_i(y_{i+2}+\lambda_{i+2}y_{i+3})]\\
=&\frac{1}{2}[(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+(x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1})+(x_{i+2}y_i-x_iy_{i+2})]\\
&+\frac{1}{2}\lambda_{i+2}[(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+(x_{i+1}y_{i+3}-x_{i+3}y_{i+1})+(x_{i+3}y_i-x_iy_{i+3})]\\
=&D_{P_iP_{i+1}P_{i+2}}+\lambda_{i+2}D_{P_iP_{i+1}P_{i+3}},
\end{aligned}$$

因此式 (6.1.8) 成立.

特别地, 当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ 时, 有

$$D_{P_iP_{i+1}Q_{i+2}} = \frac{D_{P_iP_{i+1}P_{i+2}} + D_{P_iP_{i+1}P_{i+3}}}{2}, \quad i=1,2,3,4.$$

当 $P_1P_2P_3P_4$ 为凸四边形且 Q_i 边 P_iP_{i+1} 上时, 注意到三角形 $P_iP_{i+1}Q_{i+2}$, $P_iP_{i+1}P_{i+2}, P_iP_{i+1}P_{i+3}$ 为同向三角形, 有

$$S_{P_iP_{i+1}Q_{i+2}} = \frac{S_{P_iP_{i+1}P_{i+2}} + \lambda_{i+2}S_{P_iP_{i+1}P_{i+3}}}{1+\lambda_{i+2}}, \quad i=1,2,3,4.$$

6.1.4 三角形中有向面积的定值定理及应用

定理 6.1.7 设 P 为三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, $Q_1Q_2Q_3$ 为 $P_1P_2P_3$ 的完全中点三角形, R_1, R_2, R_3 依次是 Q_1P_2, Q_1Q_2, Q_2P_3 的中点, 则

$$D_{PQ_3R_1} + D_{PQ_1R_3} - D_{PP_1R_2} = 0(\text{为定值}). \tag{6.1.9}$$

证明 如图 6.1.9 所示. 设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i, y_i)(i = 1, 2, 3)$, 任意点的坐标为 $P(x, y)$. 于是完全中点三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 顶点及 Q_1P_2, Q_1Q_2, Q_2P_3 中点的坐标依次为

$$Q_i\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)(i = 1, 2, 3),$$

$$R_1\left(\frac{x_1 + 3x_2}{4}, \frac{y_1 + 3y_2}{4}\right), \quad R_2\left(\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4}, \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{4}\right),$$

$$R_3\left(\frac{x_2 + 3x_3}{4}, \frac{y_2 + 3y_3}{4}\right).$$

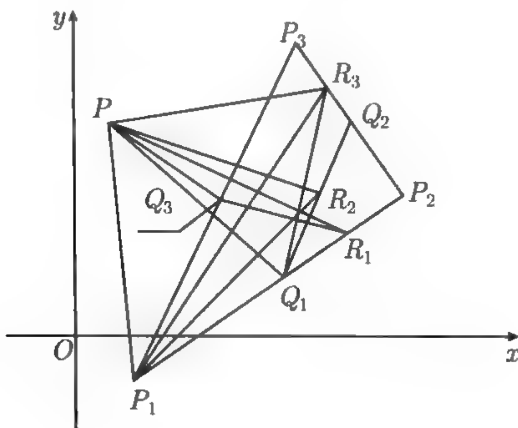


图 6.1.9

于是

$$\begin{aligned}8D_{PP_1R_2} =& 4(xy_1 - x_1y) + x_1(y_1 + 2y_2 + y_3) - (x_1 + 2x_2 + x_3)y_1 \\ &+ (x_1 + 2x_2 + x_3)y - x(y_1 + 2y_2 + y_3) \\ =&(3y_1 - 2y_2 - y_3)x + (-3x_1 + 2x_2 + x_3)y \\ &+ 2(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_1y_3 - x_3y_1),\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

类似地, 可以求得

$$\begin{aligned}16D_{PQ_1R_3} =& (4y_1 + 2y_2 - 6y_3)x + (-4x_1 - 2x_2 + 6x_3)y \\ &+ (x_1y_2 - x_2y_1) + 3(x_1y_3 - x_3y_1) + 3(x_2y_3 - x_3y_2),\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

$$16D_{PQ_3R_1}=(2y_1-6y_2+4y_3)x+(-2x_1+6x_2-4x_3)y+3(x_1y_2-x_2y_1)+(x_3y_1-x_1y_3)+3(x_3y_2-x_2y_3). \tag{6.1.12}$$

式 (6.1.11)+(6.1.12)−2 式 (6.1.10), 并化简即得式 (6.1.8).

推论 6.1.11　设 $Q_1Q_2Q_3$ 为 $P_1P_2P_3$ 的完全中点三角形, R_1,R_2,R_3 依次是 Q_1P_2,Q_1Q_2,Q_2P_3 的中点, 则 Q_3R_1,Q_1R_3,P_1R_2 所在直线相交于一点.

证明　如图 6.1.10 所示. 不妨设 Q_3R_1,Q_1R_3 的交点为 G, 将 G 代入式 (6.1.9) 得 $D_{GP_1R_2}=0$, 故 G 在 P_1R_2 所在直线上. 从而 Q_3R_1,Q_1R_3,P_1R_2 所在直线相交于一点.

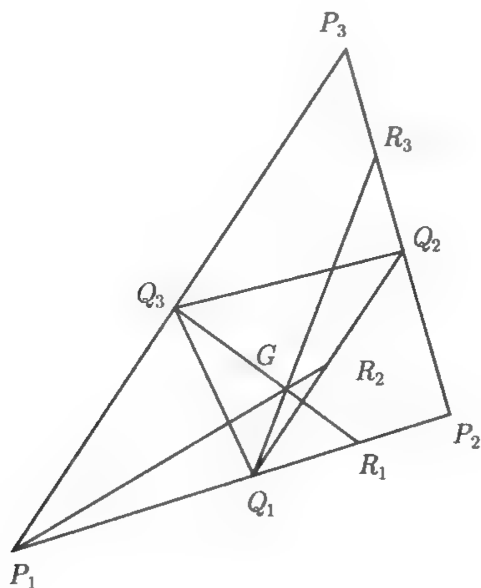


图 6.1.10

注 6.1.3　当 $P_1P_2P_3$ 为正三角形时, 即为第 30 届国际数学奥林匹克候选题的第一问.

6.2　四边形中有向面积的定值定理及其应用

四边形是平面几何中十分有趣的图形, 关于四边形的重要结论很多, 如著名的 Gauss 定理, Gergonne 定理和梯形的施泰纳定理等. 其实, 用有向度量的观点来看, 这些定理都具有深刻的背景.

本节主要讨论四边形中有向面积的定值定理及其应用. 首先给出四边形中的边三角形和对角线三角形有向面积的两个定值定理及其推论; 其次给出完全四边形中有向面积的三个定值定理及其若干推论, 包括著名的牛顿线定理 (Gauss 定理) 等结论; 再次给出四边形中的中点三角形和对角线中点三角形有向面积的定值定理, 从而推出著名的 Gergonne 定理等结论; 最后给出四边形中分点三角形和对角线三

角形有向面积的定值定理及其若干推论, 包括梯形中著名的施泰纳定理等结论.

我们发现, 以上定值定理不仅十分有趣, 而且涵盖面十分广泛. 在本节中, 我们约定, 如无特殊声明, 所指的四边形不必是凸的一般的四边形.

6.2.1 四边形中边三角形和对角线分点三角形有向面积的定值定理及其应用

定义 6.2.1 以多边形两条对角线上两个分点之间的连线为一边的三角形, 称为该多边形的对角线分点三角形.

特别地, 以多边形两条对角线中点之间的连线为一边的三角形, 称为该多边形的对角线中点三角形.

定理 6.2.1 设 P 是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 所在平面上任意一点, M_i, N_i 分别是对角线 $P_iP_{i+2}, P_{i+1}P_{i+3}$ 的分点且 $P_iM_i/M_iP_{i+2} = P_{i+1}N_i/N_iP_{i+3} = \lambda_i (i = 1, 2)$, 则

$$D_{PP_1P_2} + \lambda_1 D_{PP_3P_4} - (1+\lambda_1) D_{PM_1N_1} = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} D_{P_1P_2P_3P_4}(\text{为定值}), \qquad (6.2.1)$$

$$D_{PP_2P_3} - \lambda_2 D_{PP_1P_4} - (1+\lambda_2) D_{PM_2N_2} = \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} D_{P_1P_2P_3P_4}(\text{为定值}). \qquad (6.2.2)$$

证明 如图 6.2.1 所示. 设平面上任意点的坐标为 $P(x, y)$, 四边形顶点的坐标为 $P_i(x_i, y_i)(i = 1, 2, 3, 4)$. 则对角线 P_1P_3, P_2P_4 分点的坐标分别为

$$M_1\left(\frac{x_1+\lambda_1 x_3}{1+\lambda_1}, \frac{y_1+\lambda_1 y_3}{1+\lambda_1}\right), \quad N_1\left(\frac{x_2+\lambda_1 x_4}{1+\lambda_1}, \frac{y_2+\lambda_1 y_4}{1+\lambda_1}\right).$$

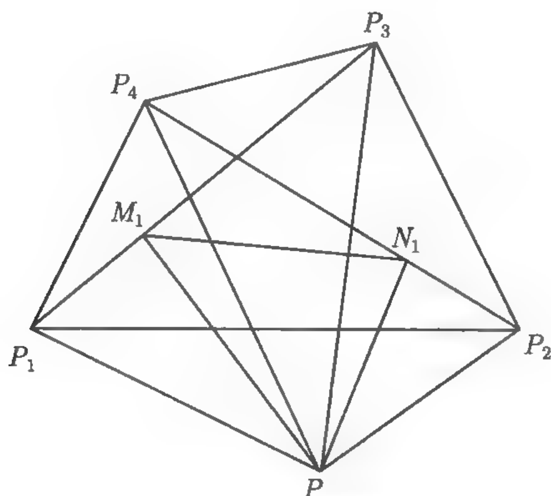


图 6.2.1 四边形对角线的定比分点

根据多边形有向面积公式, 得

$$D_{PP_1P_2} = \frac{1}{2}[(xy_1 - x_1y) + (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y - xy_2)], \qquad (6.2.3)$$

$$D_{PP_3P_4} = \frac{1}{2}[(xy_3 - x_3y) + (x_3y_4 - x_4y_3) + (x_4y - xy_4)], \qquad (6.2.4)$$

$$
\begin{aligned}
D_{PM_1N_1} =& \frac{1}{2(1+\lambda_1)}[x(y_1+\lambda_1 y_3)-(x_1+\lambda_1 x_3)y+(x_2+\lambda_1 x_4)y-x(y_2+\lambda_1 y_4)]\\
&+\frac{1}{2(1+\lambda_1)^2}[(x_1+\lambda_1 x_3)(y_2+\lambda_1 y_4)-(x_2+\lambda_1 x_4)(y_1+\lambda_1 y_3)]\\
=&\frac{1}{2(1+\lambda_1)}[(xy_1-x_1y)+(x_2y-xy_2)+\lambda_1(xy_3-x_3y)+\lambda_1(x_4y-xy_4)]\\
&+\frac{1}{2(1+\lambda_1)^2}[(x_1y_2-x_2y_1)+\lambda_1(x_1y_4-x_4y_1)\\
&+\lambda_1(x_3y_2-x_2y_3)+\lambda_1^2(x_3y_4-x_4y_3)]. \qquad (6.2.5)
\end{aligned}
$$

由式 (6.2.3)、式 (6.2.4) 和式 (6.2.5), 得

$$
\begin{aligned}
&D_{PP_1P_2}+\lambda_1 D_{PP_3P_4}-(1+\lambda_1)D_{PM_1N_1}\\
=&\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)+\frac{\lambda_1}{2}(x_3y_4-x_4y_3)-\frac{1}{2(1+\lambda_1)}[(x_1y_2-x_2y_1)\\
&+\lambda_1(x_1y_4-x_4y_1)+\lambda_1(x_3y_2-x_2y_3)+\lambda_1^2(x_3y_4-x_4y_3)]\\
=&\frac{\lambda_1}{2(1+\lambda_1)}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)]\\
=&\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}D_{P_1P_2P_3P_4},
\end{aligned}
$$

从而式 (6.2.1) 成立.

同理可证式 (6.2.2) 成立.

定理 6.2.2　设 P 是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 所在平面上任意一点, M,N 分别是对角线 P_1P_3, P_2P_4 的中点, 则

$$D_{PP_1P_2}+D_{PP_3P_4}-2D_{PMN}=\frac{1}{2}D_{P_1P_2P_3P_4}(\text{为定值}), \qquad (6.2.6)$$

$$D_{PP_2P_3}-D_{PP_1P_4}+2D_{PMN}=\frac{1}{2}D_{P_1P_2P_3P_4}(\text{为定值}). \qquad (6.2.7)$$

证明　如图 6.2.2. 在式 (6.2.1) 和式 (6.2.2) 中令 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 并注意到 $M_1=N_2=M, N_1=M_2=N$, 即得式 (6.2.6) 和式 (6.2.7).

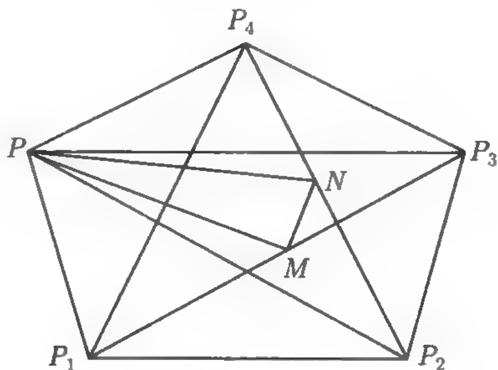


图 6.2.2　四边形对角线的中点

推论 6.2.1 设 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 依次为四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 各边 $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$ 所在直线上任意一点, M, N 分别是对角线 P_1P_3, P_2P_4 的中点, 则

$$D_{Q_1P_3P_4} - 2D_{Q_1MN} = D_{Q_3P_1P_2} - 2D_{Q_3MN} = \frac{1}{2}D_{P_1P_2P_3P_4}(\text{为定值}), \tag{6.2.8}$$

$$D_{Q_2P_4P_1} + 2D_{Q_2MN} = D_{Q_4P_2P_3} + 2D_{Q_4MN} = \frac{1}{2}D_{P_1P_2P_3P_4}(\text{为定值}). \tag{6.2.9}$$

证明 将 $D_{Q_1P_1P_2} = D_{Q_2P_2P_3} = D_{Q_3P_3P_4} = D_{Q_4P_4P_1} = 0$ 分别代入式 (6.2.6) 和式 (6.2.7) 即得式 (6.2.8) 和式 (6.2.9).

推论 6.2.2 设 M, N 分别是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 对角线 P_1P_3, P_2P_4 的中点, 则

$$D_{P_1P_3P_4} - D_{P_1P_2P_3} = 4D_{P_1MN}, \tag{6.2.10}$$

$$D_{P_1P_2P_4} - D_{P_2P_3P_4} = -4D_{P_2MN}. \tag{6.2.11}$$

证明 在定理 6.2.2 中取任意点为 P_1, 得

$$D_{P_1P_3P_4} - 2D_{P_1MN} = \frac{1}{2}D_{P_1P_2P_3P_4}, \tag{6.2.12}$$

$$D_{P_1P_2P_3} + 2D_{P_1MN} = \frac{1}{2}D_{P_1P_2P_3P_4}. \tag{6.2.13}$$

式 (6.2.12)$-$ 式 (6.2.13) 即得式 (6.2.10).

同理可证式 (6.2.11).

特别地, 当 $P_1P_2P_3P_4$ 为凸四边形时, 由于三角形 $P_1P_3P_4, P_1P_2P_3, P_1P_2P_4, P_2P_3P_4$ 与四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 都是同向的, 故有

$$|S_{P_1P_3P_4} - S_{P_1P_2P_3}| = 4S_{P_1MN}, \quad |S_{P_1P_2P_4} - S_{P_2P_3P_4}| = 4S_{P_2MN}.$$

6.2.2 完全四边形中有向面积的定值定理及其应用

定义 6.2.2 平面四边形及其两组对边延长线交点所构成的六点形, 称为完全四边形.

定理 6.2.3 设 $P_1P_2P_3P_4$ 是完全四边形, P_1P_2 和 P_3P_4、P_2P_3 和 P_4P_1 延长线的交点分别为 U, V, M_i, N_i 分别是对角线 $P_iP_{i+2}, P_{i+1}P_{i+3}$ 的分点且 $P_iM_i/M_iP_{i+2} = P_{i+1}N_i/N_iP_{i+3} = \lambda_i (i = 1, 2)$, 则

$$D_{UM_1N_1} = -\frac{\lambda_1}{(1+\lambda_1)^2}D_{P_1P_2P_3P_4}, \quad D_{VM_1N_1} = -\frac{\lambda_2}{(1+\lambda_2)^2}D_{P_1P_2P_3P_4},$$

$$S_{UM_1N_1} = \frac{|\lambda_1|}{(1+\lambda_1)^2}S_{P_1P_2P_3P_4}, \quad S_{VM_1N_1} = \frac{|\lambda_2|}{(1+\lambda_2)^2}S_{P_1P_2P_3P_4}.$$

证明 如图 6.2.3 所示. 将 $D_{UP_1P_2} = D_{UP_3P_4} = 0$ 和 $D_{VP_2P_3} = D_{VP_4P_1} = 0$ 分别代入式 (6.2.6) 和式 (6.2.7) 得

$$D_{UM_1N_1} = -\frac{\lambda_1}{(1+\lambda_1)^2} D_{P_1P_2P_3P_4}, \quad D_{VM_1N_1} = -\frac{\lambda_2}{(1+\lambda_2)^2} D_{P_1P_2P_3P_4},$$

因此

$$S_{UM_1N_1} = \frac{|\lambda_1|}{(1+\lambda_1)^2} S_{P_1P_2P_3P_4}, \quad S_{VM_1N_1} = \frac{|\lambda_2|}{(1+\lambda_2)^2} S_{P_1P_2P_3P_4}.$$

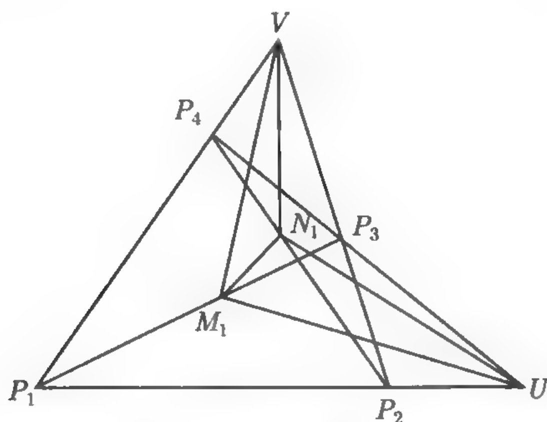


图 6.2.3　四边形两组对边的交点

推论 6.2.3　设 M, N 分别是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 对角线 P_1P_3, P_2P_4 的中点, U, V 分别是两组对边 P_1P_2 和 P_3P_4, P_2P_3 和 P_4P_1 所在直线的交点, 则

$$D_{UMN} = -D_{VMN} = -\frac{1}{4} S_{P_1P_2P_3P_4}; \quad S_{UMN} = S_{VMN} = \frac{1}{4} S_{P_1P_2P_3P_4}.$$

证明　在定理 6.2.3 中令 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 即得.

推论 6.2.4　设 M, N 分别是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 对角线 P_1P_3, P_2P_4 的中点, U, V 分别是两组对边 P_1P_2 和 P_3P_4、P_2P_3 和 P_4P_1 所在直线的交点, 则

$$d_{U-MN} = d_{V-MN}.$$

证明　由推论 6.2.3 易得.

推论 6.2.5　设 M, N 分别是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 对角线 P_1P_3, P_2P_4 的中点, P 是 MN 所在直线上任意一点, 则

$$D_{PP_1P_2} + D_{PP_3P_4} = D_{PP_2P_3} + D_{PP_4P_1} = \frac{1}{2} D_{P_1P_2P_3P_4}(\text{为定值}), \tag{6.2.14}$$

证明　将 $D_{PMN} = 0$ 代入 (6.2.6) 和 (6.2.7) 即得.

特别地, 当 $P_1P_2P_3P_4$ 为凸四边形且 P 是直线 MN 在四边形内的线段上的任意一点时, 三角形 $PP_1P_2, PP_3P_4, PP_2P_3, PP_4P_1$ 与四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 都是同向的, 故有

$$S_{PP_1P_2} + S_{PP_3P_4} = S_{PP_2P_3} + S_{PP_4P_1} = \frac{1}{2} S_{P_1P_2P_3P_4}(\text{为定值}).$$

即凸四边形两对角线中点所在直线在四边形内的线段上的任意一点与各顶点的连线把四边形分成四个三角形, 其中两个相对的三角形的面积的和等于另两个相对的三角形的面积的和.

推论 6.2.6 四边形两对角线的中点所在直线与四边形任意一边所在直线的交点与这边的对边所成的三角形的面积等于原四边形的面积的一半.

证明 如图 6.2.4 所示. 不妨设 MN 所在直线与 P_1P_2 所在直线相交于 O 点, 由式 (6.2.6) 得

$$D_{OP_3P_4}=\frac{1}{2}D_{P_1P_2P_3P_4},$$

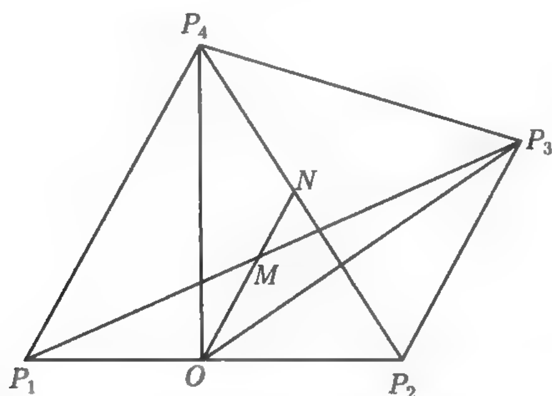


图 6.2.4 四边形对边中点所在直线与边的交点

从而

$$S_{OP_3P_4}=\frac{1}{2}S_{P_1P_2P_3P_4}.$$

推论 6.2.7 平面上任意一点到四边形一组相等对边所在直线的有向距离的和为定值.

证明 在四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 中, 不妨设 $d_{P_1P_2}=d_{P_3P_4}=a$, 平面上任意一点为 P, 由 (6.2.6) 和 (6.2.7) 两式得

$$\frac{1}{2}a\cdot D_{P-P_1P_2}+\frac{1}{2}a\cdot D_{P-P_3P_4}=\frac{1}{2}a\cdot D_{P-P_2P_3}+\frac{1}{2}a\cdot D_{P-P_4P_1}=\frac{1}{2}D_{P_1P_2P_3P_4},$$

所以

$$D_{P-P_1P_2}+D_{P-P_3P_4}=D_{P-P_2P_3}+D_{P-P_4P_1}=D_{P_1P_2P_3P_4}/a(\text{为定值}).$$

定理 6.2.4 设 $P_1P_2P_3P_4$ 是完全四边形, P_1P_2 和 P_3P_4、P_2P_3 和 P_4P_1 延长线的交点分别为 V_1,V_2. 若 M,N,V 分别为对角线 P_1P_3,P_2P_4,V_1V_2 的分点且 $P_1M/MP_3=P_2N/NP_4=\lambda$, $V_1V/VV_2=\mu$, 则

$$D_{MNV}=\frac{\lambda(\mu-1)}{(\mu+1)(1+\lambda)^2}D_{P_1P_2P_3P_4}. \tag{6.2.15}$$

证明　如图 6.2.5 所示. 设对角线分点的坐标分别为 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 对边交点的坐标分别为 $V_1(x_3, y_3), V_2(x_4, y_4)$. 于是 V_1V_2 的分点的坐标为

$$V\left(\frac{x_3+\mu x_4}{1+\mu}, \frac{y_3+\mu y_4}{1+\mu}\right).$$

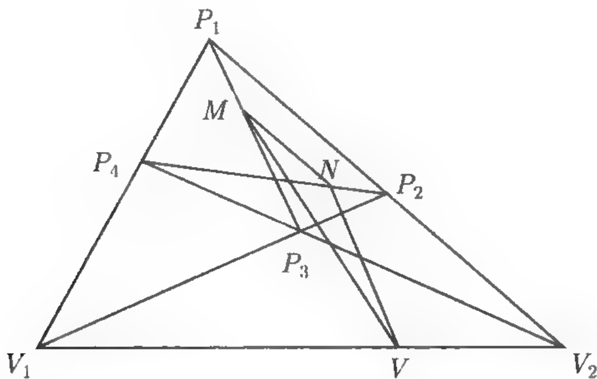


图 6.2.5　完全四边形对角线的定比分点

由多边形有向面积公式及定理 6.2.3 得

$$\begin{aligned}
D_{VMN} =&\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_3+\mu x_4}{1+\mu}\cdot y_1 - x_1\cdot\frac{y_3+\mu y_4}{1+\mu}\right)+(x_1y_2-x_2y_1)\right.\\
&\left.+\left(x_2\cdot\frac{y_3+\mu y_4}{1+\mu}-\frac{x_3+\mu x_4}{1+\mu}\cdot y_2\right)\right]\\
=&\frac{1}{2(1+\mu)}[(x_3y_1-x_1y_3)+(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)]\\
&+\frac{\mu}{2(1+\mu)}[(x_4y_1-x_1y_4)+(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_4-x_4y_2)]\\
=&\frac{1}{1+\mu}D_{V_1MN}+\frac{\mu}{1+\mu}D_{V_2MN}\\
=&-\frac{1}{1+\mu}\cdot\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}D_{P_1P_2P_3P_4}+\frac{\mu}{1+\mu}\cdot\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}D_{P_1P_2P_3P_4}\\
=&\frac{\lambda(\mu-1)}{(1+\mu)(1+\lambda)^2}D_{P_1P_2P_3P_4}.
\end{aligned}$$

定理 6.2.5　设 $P_1P_2P_3P_4$ 是完全四边形, P_1P_2 和 P_3P_4、P_2P_3 和 P_4P_1 的交点分别为 V_1, V_2, M, N 分别是对角线 P_1P_3, P_2P_4 的中点, V 是 V_1V_2 的分点且 $V_1V/VV_2=\mu$, 则

$$D_{VMN}=\frac{\mu-1}{4(1+\mu)}D_{P_1P_2P_3P_4}.$$

证明　如图 6.2.6 所示. 在式 (6.2.15) 中令 $\lambda=1$ 即得.

推论 6.2.8　在定理 6.2.5 中, 三角形 VMN 与四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 等积的充分必要条件是 $\lambda=-3/5$或$-5/3$.

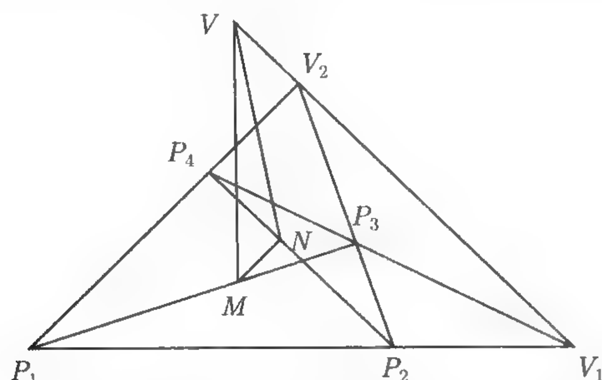


图 6.2.6 完全四边形对角线中点所构成的三角形

证明 $S_{VMN}=S_{P_1P_2P_3P_4}\Leftrightarrow \dfrac{\mu-1}{4(1+\mu)}=\pm1\Leftrightarrow \mu=-3/5$或$-5/3$.

推论 6.2.9(Gauss 定理) 对边不平行的任意四边形两对角线的两个中点与端点为两组对边交点的线段的中点共线.

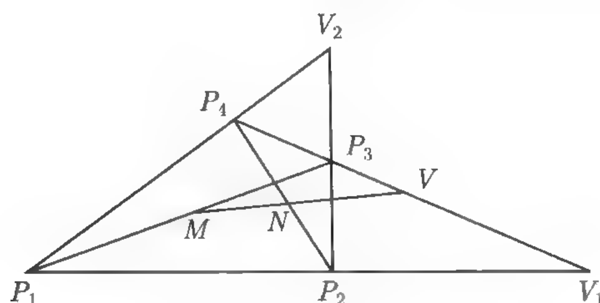


图 6.2.7 完全四边形的牛顿线

证明 如图 6.2.7 所示. 在定理 6.2.6 中令 $\mu=1$ 即得 $D_{VMN}=0$, 从而 Gauss 定理成立.

6.2.3 四边形中中点三角形和对角线中点三角形有向面积的定值定理及其应用

定理 6.2.6 设 Q_i 是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3,4)$ 的中点, M,N 分别是对角线 P_1P_3,P_2P_4 的中点, P,Q,R 分别是 MN,Q_1Q_3,Q_2Q_4 所在直线上的点, 且 $MP/PN=\lambda$, $Q_1Q/QQ_3=\mu$, $Q_2R/RQ_4=v$, 则

$$D_{PQ_1Q_3}+D_{PQ_2Q_4}=\frac{1-\lambda}{4(1+\lambda)}(D_{P_1P_2P_3}-D_{P_1P_3P_4}),\tag{6.2.16}$$

$$D_{QQ_2Q_4}+D_{QMN}=\frac{1-\mu}{4(1+\mu)}(D_{P_1P_2P_3}-D_{P_1P_2P_4}),\tag{6.2.17}$$

$$D_{RQ_1Q_3}+D_{RMN}=\frac{\nu-1}{4(1+\nu)}(D_{P_1P_2P_4}-D_{P_1P_3P_4}).\tag{6.2.18}$$

证明 如图 6.2.8 所示. 设 $P_1P_2P_3P_4$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4)$, 于是各边中点的坐标为

$$Q_i\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2},\frac{y_i+y_{i+1}}{2}\right)(i=1,2,3,4),$$

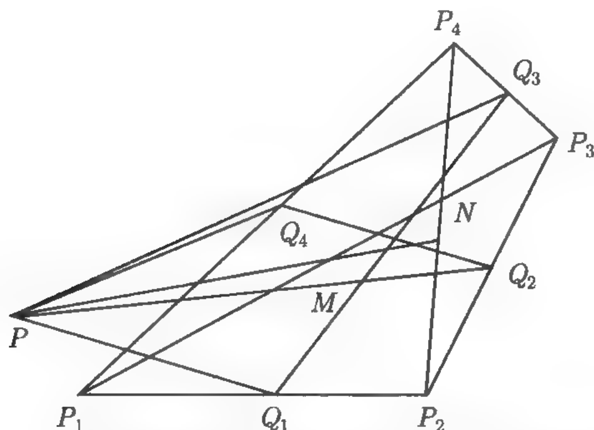


图 6.2.8　四边形对角线中点连线和对边中点连线的定比分点

对角线中点 M,N 所在直线上定比分点的坐标为

$$P\left(\frac{(x_1+x_3)+\lambda(x_2+x_4)}{2(1+\lambda)},\frac{(y_1+y_3)+\lambda(y_2+y_4)}{2(1+\lambda)}\right).$$

根据三角形有向面积公式得

$$\begin{aligned}
&D_{PQ_1Q_3}\\
=&\frac{1}{8(1+\lambda)}\{[(x_1+x_3)+\lambda(x_2+x_4)](y_1+y_2)-(x_1+x_2)[(y_1+y_3)+\lambda(y_2+y_4)]\}\\
+&\frac{1}{8}[(x_1+x_2)(y_3+y_4)-(x_3+x_4)(y_1+y_2)]\\
&+\frac{1}{8(1+\lambda)}\{(x_3+x_4)[(y_1+y_3)+\lambda(y_2+y_4)]-[(x_1+x_3)+\lambda(x_2+x_4)](y_3+y_4)\}\\
=&\frac{1-\lambda}{8(1+\lambda)}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_4y_3-x_3y_4)]+\frac{1+\lambda}{8(1+\lambda)}[(x_3y_2-x_2y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)]\\
&+\frac{1}{4(1+\lambda)}[(x_3y_1-x_1y_3)+\lambda(x_4y_2-x_2y_4)]\\
&+\frac{1}{8}[(x_1y_3-x_3y_1)+(x_1y_4-x_4y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_2y_4-x_4y_2)]\\
=&\frac{1-\lambda}{8(1+\lambda)}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_4y_3-x_3y_4)]+\frac{1}{4(1+\lambda)}[(x_3y_1-x_1y_3)\\
&+\lambda(x_4y_2-x_2y_4)]+\frac{1}{8}[(x_1y_3-x_3y_1)+(x_2y_4-x_4y_2)],
\end{aligned}\tag{6.2.19}$$

类似地

$$D_{PQ_2Q_4}=\frac{1-\lambda}{8(1+\lambda)}[(x_2y_3-x_3y_2)+(x_1y_4-x_4y_1)]$$

$$+\frac{1}{4(1+\lambda)}[(x_4y_2-x_2y_4)+\lambda(x_1y_3-x_3y_1)]$$
$$+\frac{1}{8}[(x_2y_4-x_4y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)]. \tag{6.2.20}$$

式 (6.2.19)+(6.2.20) 并化简得

$$\begin{aligned}D_{PQ_1Q_3}+D_{PQ_2Q_4}=&\frac{1-\lambda}{8(1+\lambda)}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)\\&+(x_4y_3-x_3y_4)+(x_1y_4-x_4y_1)+2(x_3y_1-x_1y_3)]\\=&\frac{1-\lambda}{8(1+\lambda)}\{[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)]\\&-[(x_1y_3-x_3y_1)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)]\}\\=&\frac{1-\lambda}{4(1+\lambda)}(D_{P_1P_2P_3}-D_{P_1P_3P_4}).\end{aligned}$$

所以式 (6.2.16) 成立.

同理可证式 (6.2.17) 和式 (6.2.18) 成立.

定理 6.2.7(Gergonne 定理) 设 Q_i 是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3,4)$ 的中点, M,N 分别是对角线 P_1P_3,P_2P_4 的中点, 则 MN,Q_1Q_3,Q_2Q_4 相交于一点, 且都被该点所平分.

证明 如图 6.2.9 所示. 在式 (6.2.19) 和式 (6.2.20) 中分别令到 $\lambda=1$, 得

$$D_{PQ_1Q_3}=D_{PQ_2Q_4}=0,$$

所以 P 是 MN,Q_1Q_3,Q_2Q_4 的中点.

同理, 当 $\mu=1,\nu=1$ 时,Q,R 分别是 MN,Q_1Q_3,Q_2Q_4 的中点. 因此 MN,Q_1Q_3,Q_2Q_4 的中点重合, 定理 6.2.7 结论成立.

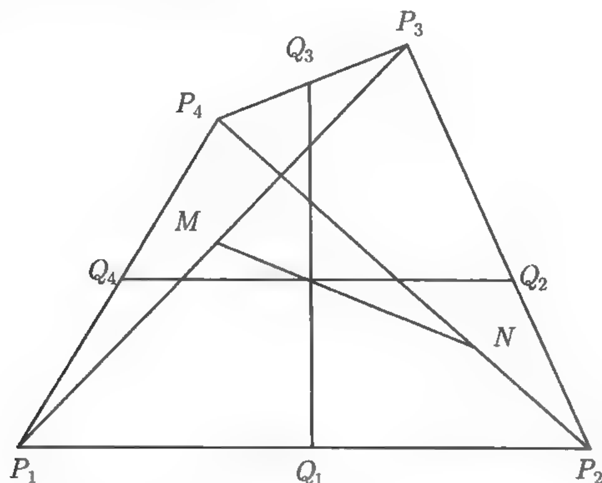


图 6.2.9 四边形的 Gergonne 定理

注 6.2.1 定理 6.2.1 为 1940 年基辅数学奥林匹克题.

6.2.4　四边形中分点三角形和对角线三角形有向面积的定值定理及其应用

定义 6.2.3　以多边形对角线为一边的三角形, 称为该多边形的对角线三角形.

定理 6.2.8　设 P 是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 所在平面上任意一点, Q_i 是边 P_iP_{i+1} 的分点且 $P_iQ_i/Q_iP_{i+1}=\lambda(i=1,2,3,4)$, 则

$$\begin{aligned}&D_{PP_1P_3}+\lambda D_{PP_2P_4}-(1+\lambda)D_{PQ_1Q_3}\\=&\frac{\lambda}{1+\lambda}(D_{P_1P_2P_4}-D_{P_1P_2P_3})=\frac{\lambda}{1+\lambda}(D_{P_1P_3P_4}-D_{P_2P_3P_4}),\end{aligned}\tag{6.2.21}$$

$$\begin{aligned}&D_{PP_2P_4}-\lambda D_{PP_1P_3}-(1+\lambda)D_{PQ_2Q_4}\\=&\frac{\lambda}{1+\lambda}(D_{P_1P_2P_3}-D_{P_2P_3P_4})=\frac{\lambda}{1+\lambda}(D_{P_1P_2P_4}-D_{P_1P_3P_4}).\end{aligned}\tag{6.2.22}$$

证明　如图 6.2.10 所示. 设四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 顶点和任意点的坐标分别为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4)$, $P(x,y)$, 则各边分点的坐标为

$$Q_i\left(\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{\lambda},\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{\lambda}\right)(i=1,2,3,4).$$

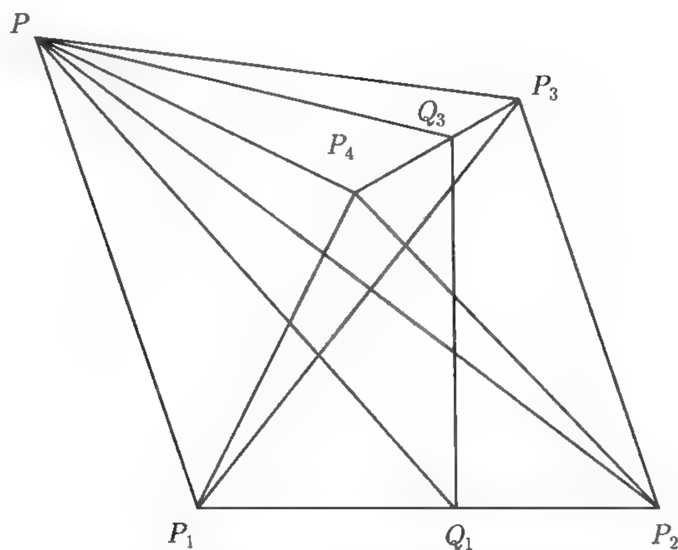


图 6.2.10　四边形各边的等比分点

根据三角形有向面积公式, 得

$$D_{PP_1P_3}=\frac{1}{2}[(xy_1-x_1y)+(x_1y_3-x_3y_1)+(x_3y-xy_3)],\tag{6.2.23}$$

$$D_{PP_2P_4}=\frac{1}{2}[(xy_2-x_2y)+(x_2y_4-x_4y_2)+(x_4y-xy_4)],\tag{6.2.24}$$

$$\begin{aligned}D_{PQ_1Q_3}=&\frac{1}{2(1+\lambda)}[x(y_1+\lambda y_2)-(x_1+\lambda x_2)y+(x_3+\lambda x_4)y-x(y_3+\lambda y_4)]\\&+\frac{1}{2(1+\lambda)^2}[(x_1+\lambda x_2)(y_3+\lambda y_4)-(x_3+\lambda x_4)(y_1+\lambda y_2)]\\=&\frac{1}{2(1+\lambda)}[(xy_1-x_1y)+(x_3y-xy_3)+\lambda(xy_2-x_2y)+\lambda(x_4y-xy_4)]\\&+\frac{1}{2(1+\lambda)^2}[(x_1y_3-x_3y_1)+\lambda(x_2y_3-x_3y_2)\\&+\lambda(x_1y_4-x_4y_1)+\lambda^2(x_2y_4-x_4y_2)].\end{aligned}\tag{6.2.25}$$

由式 (6.2.23)~(6.2.25) 得

$$\begin{aligned}&D_{PP_1P_3}+\lambda D_{PP_2P_4}-(1+\lambda)D_{PQ_1Q_3}\\=&\frac{1}{2}(x_1y_3-x_3y_1)+\frac{\lambda}{2}(x_2y_4-x_4y_2)-\frac{1}{2(1+\lambda)}[(x_1y_3-x_3y_1)\\&+\lambda(x_2y_3-x_3y_2)+\lambda(x_1y_4-x_4y_1)+\lambda^2(x_2y_4-x_4y_2)]\\=&\frac{\lambda}{2(1+\lambda)}[(x_1y_3-x_3y_1)+(x_2y_4-x_4y_2)+(x_3y_2-x_2y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)]\\=&\frac{\lambda}{1+\lambda}(D_{P_1P_2P_4}-D_{P_1P_2P_3})=\frac{\lambda}{1+\lambda}(D_{P_1P_3P_4}-D_{P_2P_3P_4}),\end{aligned}$$

因此, 式 (6.2.21) 成立.

类似地, 可以证明式 (6.2.22) 成立.

推论 6.2.10 设 P 是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 所在平面上任意一点, Q_i 是各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3,4;P_{4+1}=P_1)$ 的中点, 则

$$D_{PP_1P_3}+D_{PP_2P_4}-2D_{PQ_1Q_3}=\frac{1}{2}(D_{P_1P_2P_4}-D_{P_1P_2P_3})=\frac{1}{2}(D_{P_1P_3P_4}-D_{P_2P_3P_4}),\tag{6.2.26}$$

$$D_{PP_2P_4}-D_{PP_1P_3}-2D_{PQ_2Q_4}=\frac{1}{2}(D_{P_1P_2P_3}-D_{P_2P_3P_4})=\frac{1}{2}(D_{P_1P_2P_4}-D_{P_1P_3P_4}).\tag{6.2.27}$$

证明 令 $\lambda=1$, 由式 (6.2.21) 和 (6.2.22) 即得式 (6.2.18) 和 (6.2.19).

推论 6.2.11 设 $P_1P_2P_3P_4$ 是四边形, Q_1,Q_3 分别是两对边 P_1P_2,P_3P_4 的中点, E,F 分别是对角线 P_1P_3,P_2P_4 和对边 P_2P_3,P_4P_1 的交点, 则

$$S_{EQ_1Q_3}=S_{FQ_1Q_3}=\frac{1}{4}|S_{P_1P_2P_4}-S_{P_1P_2P_3}|=\frac{1}{4}|S_{P_1P_3P_4}-S_{P_2P_3P_4}|(\text{为定值}),\tag{6.2.28}$$

$$S_{EQ_2Q_4}=S_{FQ_2Q_4}=\frac{1}{4}|S_{P_1P_2P_3}-S_{P_2P_3P_4}|=\frac{1}{4}|S_{P_1P_2P_4}-S_{P_1P_3P_4}|(\text{为定值}).\tag{6.2.29}$$

证明 将 E,F 分别代入式 (6.2.26), 得

$$D_{EQ_1Q_3}=D_{FQ_1Q_3}=-\frac{1}{4}(D_{P_1P_2P_4}-D_{P_1P_2P_3})=-\frac{1}{4}(D_{P_1P_3P_4}-D_{P_2P_3P_4}),$$

注意到三角形 $P_1P_2P_3$ 和 $P_1P_2P_4$, $P_1P_2P_4$ 和 $P_2P_3P_4$ 均是同向三角形, 上两式两边取绝对值即得式 (6.2.28).

类似地, 可以证明式 (6.2.29) 成立.

定理 6.2.9 设 P 是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 所在平面上任意一点, Q_i 是各边 P_iP_{i+1} $(i=1,2,3,4)$ 的中点, 则

$$D_{PP_1P_2}+D_{PP_3P_4}-2D_{PQ_2Q_4}=\frac{1}{2}(D_{P_2P_3P_4}-D_{P_1P_2P_3})(\text{为定值}), \tag{6.2.30}$$

$$D_{PP_1P_4}+D_{PP_2P_3}-2D_{PQ_1Q_3}=\frac{1}{2}(D_{P_1P_2P_3}-D_{P_1P_2P_4})(\text{为定值}), \tag{6.2.31}$$

证明 如图 6.2.11 所示. 不妨设平面上任意点的坐标为 $P(x,y)$, 四边形 $P_1P_2P_3$ P_4 顶点的坐标为

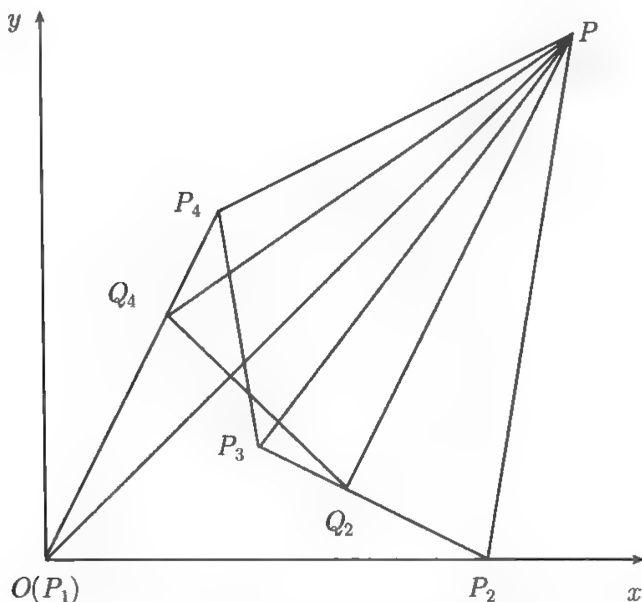


图 6.2.11 四边形及其各边的中点

$P_1(0,0), P_2(a,0), P_3(b,c), P_4(d,e)$, 于是边 $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$ 中点的坐标分别为 $Q_1\left(\frac{a}{2},0\right), Q_2\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right), Q_3\left(\frac{b+d}{2},\frac{c+e}{2}\right), Q_4\left(\frac{d}{2},\frac{e}{2}\right)$.

根据三角形有向面积公式, 得

$$D_{PP_1P_2}=-\frac{1}{2}ay, \tag{6.2.32}$$

$$D_{PP_3P_4}=\frac{1}{2}[(c-e)x+(d-b)y+(be-dc)], \tag{6.2.33}$$

$$2D_{PQ_2Q_4}=\frac{d-a-b}{2}y-\frac{c-e}{2}x+\frac{1}{4}[(a+b)e-dc]. \tag{6.2.34}$$

式 (6.2.32)+(6.2.33)−(6.2.34) 得

$$D_{PP_1P_2}+D_{PP_3P_4}-2D_{PQ_2Q_4}=\frac{1}{4}[(b-a)e-dc],$$

注意到 $D_{P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}ac, D_{P_2P_3P_4}=\frac{1}{2}[(a-d)c+(b-a)e]$ 即得式 (6.2.30).

同理可证式 (6.2.31) 成立.

定理 6.2.10 设 $P_1P_2P_3P_4$ 是梯形且 $P_1P_2//P_3P_4, Q_1, Q_3$ 分别是两对边 P_1P_2, P_3P_4 的中点, P 是梯形 $P_1P_2P_3P_4$ 所在平面上任意一点, 则

$$D_{PP_1P_3}+D_{PP_2P_4}-2D_{PQ_1Q_3}=0(\text{为定值}), \tag{6.2.35}$$

$$D_{PP_1P_4}-D_{PP_2P_3}+2D_{PQ_1Q_3}=0(\text{为定值}). \tag{6.2.36}$$

证明 在式 (6.2.26) 和 (6.2.31) 中令 $D_{P_1P_2P_3}=D_{P_1P_2P_4}$ 即得式 (6.2.35) 和 (6.2.36).

推论 6.2.12 设 $P_1P_2P_3P_4$ 是梯形且 $P_1P_2//P_3P_4, Q_1, Q_3$ 分别是两对边 P_1P_2, P_3P_4 的中点.

(1) 若 P 是直线 Q_1Q_3 上任意一点, 则 $S_{PP_1P_3}=S_{PP_2P_4}, S_{PP_1P_4}=S_{PP_2P_3}$;

(2) 若 P 是直线 $P_1P_3(P_2P_4)$ 上任意一点, 则 $S_{PP_2P_4}=2S_{PQ_1Q_3}(S_{PP_1P_3}=2S_{PQ_1Q_3})$;

(3) 若 P 是直线 $P_1P_4(P_2P_3)$ 上任意一点, 则 $S_{PP_2P_3}=2S_{PQ_1Q_3}(S_{PP_1P_4}=2S_{PQ_1Q_3})$.

证明 (1) 将 $D_{PQ_1Q_3}=0$ 代入式 (6.2.35) 和 (6.2.36) 得

$$D_{PP_1P_3}=-D_{PP_2P_4},\quad D_{PP_1P_4}=-D_{PP_2P_3},$$

等式两边取绝对值即得 $S_{PP_1P_3}=S_{PP_2P_4}, S_{PP_1P_4}=S_{PP_2P_3}$.

类似地, 可以证明 (2) 和 (3) 中两式成立.

推论 6.2.13(梯形的施泰纳定理) 梯形的两对角线的交点与两腰延长线的交点的连线必平分梯形的上、下底.

证明 如图 6.2.12 所示. 设梯形 $P_1P_2P_3P_4$ 两对角线 P_1P_3, P_2P_4 和两腰 P_1P_4, P_2P_3 的交点分别为 E, F. 在式 (6.2.35) 和 (6.2.36) 中取任意点 P 分别为 E 和 F, 得

$$D_{EQ_1Q_3}=0,\quad D_{FQ_1Q_3}=0,$$

于是 E, Q_1, Q_3 和 F, Q_1, Q_3 均三点共线, 从而 E, F, Q_1, Q_3 四点共线.

注 6.2.2 推论 6.2.13 为 1954 年基辅数学奥林匹克题.

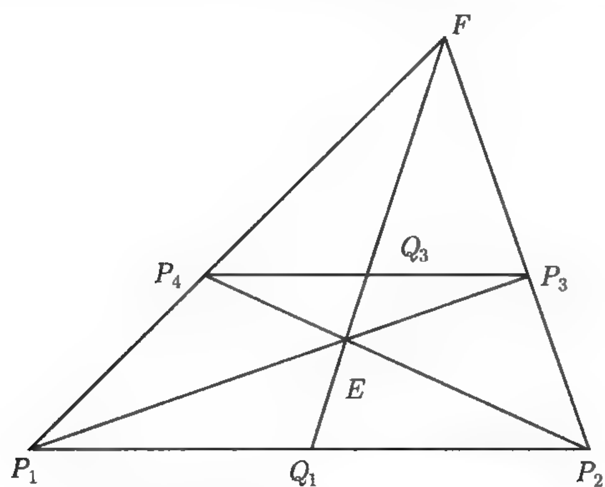


图 6.2.12　梯形的施泰纳定理

第 7 章　外、内多边形有向面积的定值定理及其应用

7.1　三角形的外、内三角形有向面积的定值定理及其应用

以三角形的三边为边分别向三角形的外侧 (内侧) 作正三角形, 这三个正三角形的中心所构成的三角形称为三角形的外 (内) 拿破仑三角形. 在几何学中, 关于三角形、拿破仑三角形的一些结论是著名的, 但这些结论之间的联系却少为人知. 为此, 本节首先给出三角形的 (λ,μ) 外、内三角形的概念; 再给出外、内三角形有向面积公式及其若干推论, 包括著名的“外、内拿破仑三角形面积之差等于三角形面积”等结论; 最后给出外、内三角形中有向面积的几个定值定理及其应用, 从而推出一些与拿破仑三角形有关的等积定理、三线共点定理等结论, 揭示这些公式、定理与三角形、拿破仑三角形的一些已知结果之间的联系.

7.1.1　三角形的 (λ,μ) 外、内三角形的概念

定义 7.1.1　三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 P_iP_{i+1} $(i=1,2,3;\ P_{3+j}=P_j$, 以下类同) 所在直线把平面分成两部分, 三角形所在的部分称为直线 P_iP_{i+1} 的内侧, 另一部分称为直线 P_iP_{i+1} 的外侧.

定义 7.1.2　在三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 P_iP_{i+1} 所在直线的外 (内) 侧各取一点 $M_i(N_i)$, 作 $M_iQ_i\perp P_iP_{i+1}$ $(N_iQ_i\perp P_iP_{i+1})$, 垂足为 Q_i. 如果 $P_iQ_i/Q_iP_{i+1}=\lambda$, $|M_iQ_i|=\mu\,|P_iP_{i+1}|\,(|N_iQ_i|=\mu|P_iP_{i+1}|)$ $(i=1,2,3;\mu\geqslant 0)$, 则称以 $M_1,M_2,M_3(N_1,N_2,N_3)$ 为顶点的三角形 $M_1M_2M_3$ $(N_1N_2N_3)$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 (λ,μ) 外 (内) 三角形 (图 7.1.1 和图 7.1.2).

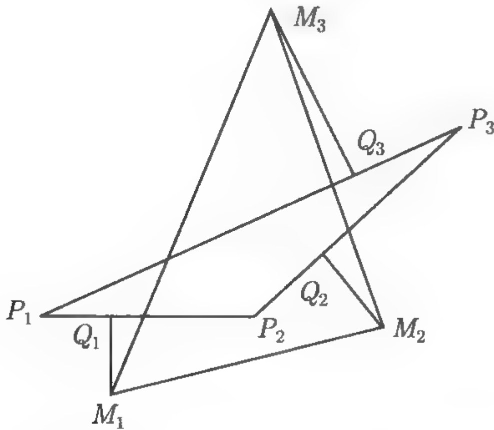


图 7.1.1　三角形的 (λ,μ) 外三角形

特别地, 三角形的 $(1,\sqrt{3}/6)$ 外 (内) 三角形, 即三角形的外 (内) 拿破仑三角形; 三角形的 (1,0) 外 (内) 三角形即三角形的中位三角形. 为方便起见, 当 N_1,N_2,N_3 中有两点或全部重合时, 由 N_1,N_2,N_3 所构成的线段或点看成是 (λ,μ) 内三角形的特殊情形.

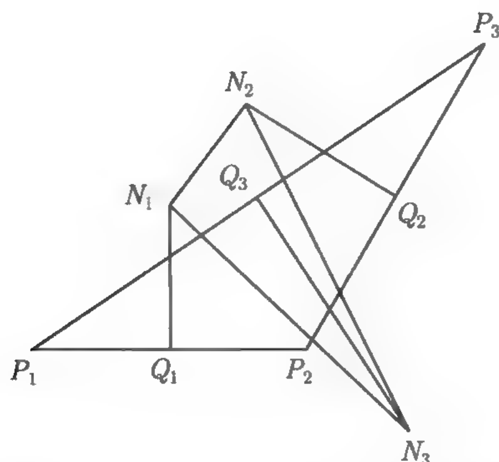


图 7.1.2 三角形的 (λ,μ) 内三角形

7.1.2 三角形的 (λ,μ) 外、内三角形有向面积公式及其应用

定理 7.1.1 设三角形 $M_1M_2M_3$ $(N_1N_2N_3)$ 分别为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 (λ,μ) 外 (内) 三角形, 则

$$D_{M_1M_2M_3}=\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3}\pm\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{3}d^2_{P_iP_{i+1}}, \tag{7.1.1}$$

$$D_{N_1N_2N_3}=\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3}\mp\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{3}d^2_{P_iP_{i+1}}, \tag{7.1.2}$$

其中当 $P_1P_2P_3$ 为正向三角形时, 式 (7.1.1) 取 “+” 号, 式 (7.1.2) 取 “−” 号; 为反向三角形时式 (7.1.1) 取 “−” 号, 式 (7.1.2) 取 “+” 号.

证明 如图 7.1.3 所示. 设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点坐标为 $P_i(x_i,y_i)$, 作 $M_iQ_i\perp P_iP_{i+1}$, 垂足为 Q_i. 于是垂足的坐标为

$$Q_i\left(\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda},\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}\right)\ (i=1,2,3),$$

M_iQ_i 的直线方程为

$$(x_{i+1}-x_i)x+(y_{i+1}-y_i)y=\frac{(x_i+\lambda x_{i+1})(x_{i+1}-x_i)+(y_i+\lambda y_{i+1})(y_{i+1}-y_i)}{1+\lambda}. \tag{7.1.3}$$

设 M_i 的坐标为 $M_i(X_i,Y_i)$, 向量 $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ 与 x 轴正向的夹角为 $\alpha_i(i=1,2,3)$. 若三角形 $P_1P_2P_3$ 为正向三角形, 则

$$Y_i=\begin{cases}\dfrac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-|M_iQ_i|\cos\alpha_i, & 0\leqslant\alpha_i\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-|M_iQ_i|\cos(\pi-\alpha_i), & \dfrac{\pi}{2}<\alpha_i\leqslant\pi\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu|P_iP_{i+1}|\cos\alpha_i, & 0\leqslant\alpha_i\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu|P_iP_{i+1}|\cos(\pi-\alpha_i), & \dfrac{\pi}{2}<\alpha_i\leqslant\pi\end{cases}$$
$$=\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu(x_{i+1}-x_i)\ (i=1,2,3),$$

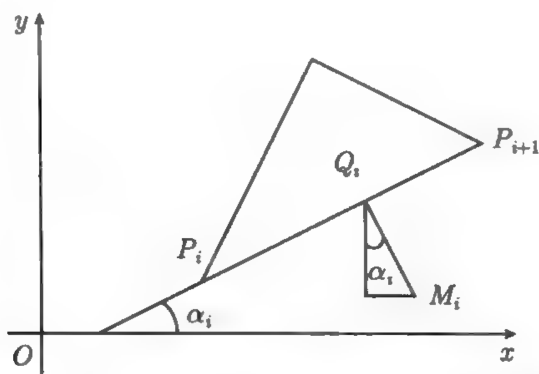


图 7.1.3 三角形的边与 x 轴正向的夹角

将 Y_i 代入方程 (7.1.3) 得

$$X_i=\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+1}-y_i)\ (i=1,2,3).$$

同理可得 $N_i(X_i',Y_i')$ 的坐标

$$X_i'=\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}-\mu(y_{i+1}-y_i),\quad Y_i'=\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(x_{i+1}-x_i)\ (i=1,2,3).$$

于是

$$\begin{aligned}&D_{M_1M_2M_3}\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left\{\left[\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+1}-y_i)\right]\times\left[\frac{y_{i+1}+\lambda y_{i+2}}{1+\lambda}-\mu(x_{i+2}-x_{i+1})\right]\right.\\
&\left.-\left[\frac{x_{i+1}+\lambda x_{i+2}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+2}-y_{i+1})\right]\times\left[\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu(x_{i+1}-x_i)\right]\right\}\\
=&\frac{1}{2(1+\lambda)^2}\sum_{i=1}^{3}[(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+\lambda(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)+\lambda^2(x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1})]\\
&-\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_ix_{i+2}-x_{i+1}^2+y_iy_{i+2}-y_{i+1}^2)-\frac{\mu^2}{2}\sum_{i=1}^{3}[(x_{i+2}y_{i+1}-x_{i+1}y_{i+2})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})+(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)]\\
=&\frac{1-\lambda+\lambda^2}{2(1+\lambda)^2}\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)-\frac{3\mu^2}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})\\
&-\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{3}[(x_ix_{i+2}-x_{i+1}^2)+(y_iy_{i+2}-y_{i+1}^2)]\\
=&\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3}-\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{3}[(x_ix_{i+1}-x_{i+2}^2)+(y_iy_{i+1}-y_{i+2}^2)]\\
=&\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3}\\
&+\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{3}[(x_i^2+x_{i+1}^2-2x_ix_{i+1})+(y_i^2+y_{i+1}^2-2y_iy_{i+1})]\\
=&\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3}+\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{3}d_{P_iP_{i+1}}^2.
\end{aligned}
$$

若三角形 $P_1P_2P_3$ 为反向三角形, 则三角形 $P_3P_2P_1$ 是正向的, 且三角形 $P_3P_2P_1$ 对应的 (λ,μ) 外三角形为三角形 $M_3M_2M_1$. 于是由上述证明得

$$D_{M_3M_2M_1}=\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]D_{P_3P_2P_1}+\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{3}d_{P_iP_{i+1}}^2,$$

等式两边乘以 -1, 得

$$D_{M_1M_2M_3}=\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3}-\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{3}d_{P_iP_{i+1}}^2.$$

因此式 (7.1.1) 成立.

同理可证式 (7.1.2) 成立.

定理 7.1.2　设三角形 $M_1M_2M_3$ $(N_1N_2N_3)$ 分别为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 (λ,μ) 外 (内) 三角形, 则

$$D_{M_1M_2M_3}+D_{N_1N_2N_3}=2\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3}. \tag{7.1.4}$$

证明　式 (7.1.1)+(7.1.2) 即得式 (7.1.4).

推论 7.1.1　设三角形 $M_1M_2M_3$ $(N_1N_2N_3)$ 分别为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 (λ,μ) 外 (内) 三角形, 且 $\mu^2=\dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\,(\lambda\geqslant 0)$, 则这两个外、内三角形的有向面积的和为定值, 即

$$D_{M_1M_2M_3}+D_{N_1N_2N_3}=2D_{P_1P_2P_3}.$$

证明 将 $\mu^2=\dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\,(\lambda\geqslant 0)$ 代入式 (7.1.4) 即得.

推论 7.1.2 三角形的外拿破仑三角形与内拿破仑三角形的面积之差等于三角形的面积.

证明 如图 7.1.4 所示. 在式 (7.1.4) 中取 $\lambda=1,\mu=\sqrt{3}/6$ 得

$$D_{M_1M_2M_3}+D_{N_1N_2N_3}=D_{P_1P_2P_3}.$$

因为外 (内) 拿破仑三角形 $M_1M_2M_3$ ($N_1N_2N_3$) 与三角形 $P_1P_2P_3$ 是同向 (反向) 的, 故有

$$S_{M_1M_2M_3}-S_{N_1N_2N_3}=S_{P_1P_2P_3}.$$

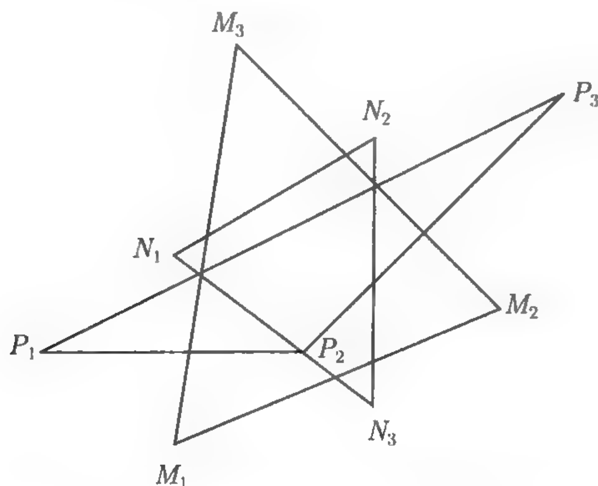


图 7.1.4 三角形的内、外拿破仑三角形

推论 7.1.3 以三角形的三边为边分别向三角形的外 (内) 侧作正方形, 则这三个正方形的中心所构成的外 (内) 三角形的面积的差等于三角形的面积的 2 倍.

证明 在式 (7.1.4) 中取 $\lambda=1,\mu=1/2$, 则三角形 $M_1M_2M_3$ ($N_1N_2N_3$) 即是以三角形的三边分别向三角形外 (内) 侧所作正方形的中心所构成的外 (内) 三角形. 由式 (7.1.4) 得

$$D_{M_1M_2M_3}+D_{N_1N_2N_3}=2D_{P_1P_2P_3},$$

由于三角形 $M_1M_2M_3$ ($N_1N_2N_3$) 与三角形 $P_1P_2P_3$ 是同向 (反向) 的, 故有

$$S_{M_1M_2M_3}-S_{N_1N_2N_3}=2S_{P_1P_2P_3}.$$

7.1.3 三角形的 (λ,μ)外、内三角形中有向面积的定值定理及其应用

定理 7.1.3 设 P 是三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, 设三角形 $M_1M_2M_3$ ($N_1N_2N_3$) 分别为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 (λ,μ) 外 (内) 三角形, 则对固定的 $\lambda(\mu\geqslant 0$ 任意), 有

$$\sum_{i=1}^{3} D_{PP_iM_{i+1}} = \sum_{i=1}^{3} D_{PP_iN_{i+1}} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} D_{P_1P_2P_3}(\text{为定值}), \tag{7.1.5}$$

证明　如图 7.1.5 所示. 仅证三角形 $P_1P_2P_3$ 为正向三角形的情形. 设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点坐标为 $P_i(x_i, y_i)(i = 1, 2, 3)$, 任意点的坐标为 $P(x, y)$. 由定理 7.1.1 证明得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} D_{PP_iM_{i+1}} =& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left\{(xy_i - x_iy) + x_i\left[\frac{y_{i+1}+\lambda y_{i+2}}{1+\lambda} - \mu(x_{i+2}-x_{i+1})\right]\right.\\ &-\left[\frac{x_{i+1}+\lambda x_{i+2}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+2}-y_{i+1})\right]y_i+\left[\frac{x_i+\lambda x_{i+2}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+2}-y_{i+1})\right]y\\ &\left.-x\left[\frac{y_{i+1}+\lambda y_{i+2}}{1+\lambda} - \mu(x_{i+2}-x_{i+1})\right]\right\}\\ =&\frac{1}{2(1+\lambda)}\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+\frac{\lambda}{2(1+\lambda)}\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)\\ =&\frac{1-\lambda}{1+\lambda}D_{P_1P_2P_3}.\end{aligned}$$

同理

$$\sum_{i=1}^{3} D_{PP_iN_{i+1}} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} D_{P_1P_2P_3}.$$

故对固定的 $\lambda(\mu \geqslant 0$ 任意), 定理 7.1.3 结论成立.

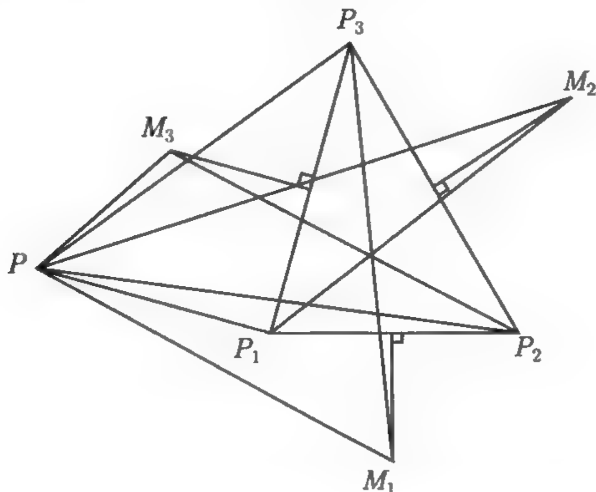


图 7.1.5　三角形和其外三角形顶点的性质

推论 7.1.4　设三角形 $M_1M_2M_3$ $(N_1N_2N_3)$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 (λ, μ) 外 (内) 三角形, P 是 $P_jM_{j+1}(P_jN_{j+1})$　$(j = 1, 2, 3)$ 所在直线上的任意一点, 则对固定的 $\lambda(\mu \geqslant 0$ 任意), 有

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{3} D_{PP_iM_{i+1}} = \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{3} D_{PP_iN_{i+1}} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} D_{P_1P_2P_3}(\text{为定值}).$$

证明 在式 (7.1.5) 中令 $D_{PP_jM_{j+1}} = D_{PP_jN_{j+1}} = 0$ 即得.

推论 7.1.5 设三角形 $M_1M_2M_3$ $(N_1N_2N_3)$ 分别为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 (λ,μ) 外 (内) 三角形, F_i, G_i 分别为 P_iM_{i+1} 和 $P_{i+1}M_{i+2}, P_iN_{i+1}$ 和 $P_{i+1}N_{i+2}(i=1,2,3)$ 所在直线上的交点, 则

$$S_{F_iP_{i+1}M_i} = S_{G_iP_{i+1}N_i} = \left|\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right| S_{P_1P_2P_3}(i=1,2,3).$$

证明 在式 (7.1.5) 中分别取 P 为 $F_i(G_i)$, 等式两边取绝对值即得.

推论 7.1.6 设 P 是三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上的任意一点, 三角形 $M_1M_2M_3$ $(N_1N_2N_3)$ 分别为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 $(1,\mu)$ 外 (内) 三角形, 则在三角形 $PP_1M_2, PP_2M_3, PP_3M_1$ $(PP_1N_2,\ PP_2N_3,\ PP_3N_1)$ 中, 其中一个三角形的面积等于其余两个三角形的面积之和.

证明 在式 (7.1.5) 中取 $\lambda=1$ 得

$$\sum_{i=1}^{3} D_{PP_iM_{i+1}} = \sum_{i=1}^{3} D_{PP_iN_{i+1}} = 0,$$

因此推论 7.1.6 结论成立.

推论 7.1.7(第 26 届莫斯科数学奥林匹克题的推广) 设 P 是三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上的任意一点, 则在三角形 $P_1P_2P_3$ 的三个中线三角形 $PP_1M_2, PP_2M_3, PP_3M_1$ 中, 其中一个三角形的面积等于其余两个三角形的面积之和.

证明 在推论 7.1.6 中取三角形 $M_1M_2M_3$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 $(1,0)$ 外三角形即得.

推论 7.1.8 设三角形 $M_1M_2M_3$ $(N_1N_2N_3)$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 $(1,\mu)$ 外 (内) 三角形, P 是 $P_jM_{j+1}(P_jN_{j+1})(j=1,2,3)$ 所在直线上的任意一点, 则 P 与其余两线段 $P_iM_{i+1}(P_iN_{i+1})(i=1,\ 2,\ 3;\ i\neq j)$ 所组成的两个三角形的面积相等.

证明 不妨设 P 是 P_1M_2 所在直线上任意一点, 由推论 7.1.6 得 $D_{PP_2M_3} + D_{PP_3M_1} = 0$. 因此三角形 PP_2M_3 和三角形 PP_3M_1 的面积相等.

推论 7.1.9 设 P 是三角形 $P_1P_2P_3$ 某中线所在直线上的任意一点, 则 P 与其他两条中线所组成的两个三角形的面积相等.

证明 在推论 7.1.8 中取三角形 $M_1M_2M_3$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 $(1,0)$ 外三角形即得.

推论 7.1.10　设三角形 $M_1M_2M_3$ ($N_1N_2N_3$) 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 $(1,\mu)$ 外(内) 三角形, 则 P_1M_2, P_2M_3, P_3M_1(P_1N_2, P_2N_3, P_3N_1) 所在的三条直线相交于一点.

证明　如图 7.1.6 和图 7.1.7 所示. 在推论 7.1.6 中取 P 为 P_1M_2, P_2M_3(P_1N_2, P_2N_3) 所在直线的交点, 则 $D_{PP_3M_1}=0$($D_{PP_3N_1}=0$), 从而 P 在 P_3M_1(P_3N_1) 所在直线上, 故 P_1M_2, P_2M_3, P_3M_1(P_1N_2, P_2N_3, P_3N_1) 所在的三条直线相交于一点.

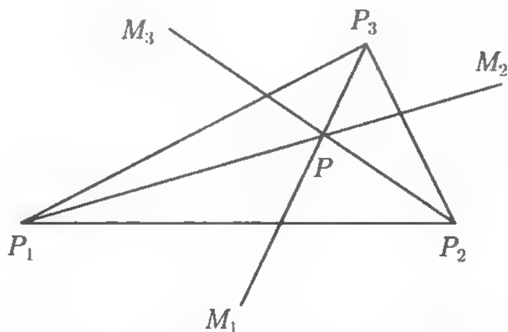


图 7.1.6　P_1M_2, P_2M_3, P_3M_1 相交于一点

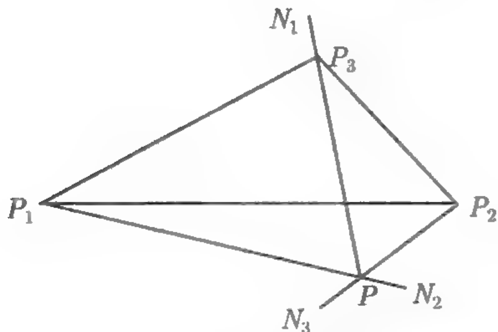


图 7.1.7　P_1N_2, P_2N_3, P_3N_1 相交于一点

推论 7.1.11(三角形中线定理)　三角形的三条中线相交于一点.

证明　在推论 7.1.10 中取三角形 $M_1M_2M_3$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 $(1,0)$ 外三角形即得.

推论 7.1.12　设三角形 $M_1M_2M_3$ ($N_1N_2N_3$) 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的外 (内) 拿破仑三角形, 则 P_1M_2, P_2M_3, P_3M_1(P_1N_2, P_2N_3, P_3N_1) 所在的三条直线相交于一点.

证明　在推论 7.1.10 取 $\mu=\sqrt{3}/6$ 即得.

7.2　多边形的内、外多边形中有向面积的定值定理及其应用

在 7.1 节中, 论述了三角形的外、内三角形中有向面积有关的问题, 本节主要研

究凸多边形中类似的问题, 把三角形的外、内三角形的概念推广到凸多边形的情形.

首先给出凸多边形的 (λ,μ) 外、内多边形的概念; 其次给出凸多边形的 (λ,μ) 外、内多边形有向面积的一些性质, 从而推出著名的 Cesaro 定理; 最后给出多边形外、内多边形有向面积的几个定值定理及其应用, 从而推出一些与多边形外、内多边有关的等积定理、三线共点定理等结论, 揭示这些结论与一些经典的几何问题之间的联系和一些数学竞赛题的背景.

7.2.1 凸多边形的 (λ,μ) 外、内多边形的概念

定义 7.2.1 凸多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 各边 P_iP_{i+1} $(i=1,2,\cdots,n;\ P_{n+j}=P_j$, 以下类同) 所在直线把平面分成两部分, 凸多边形所在的部分称为直线 P_iP_{i+1} 的内侧, 另一部分称为直线 P_iP_{i+1} 的外侧.

定义 7.2.2 在凸多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 各边 P_iP_{i+1} 所在直线的外 (内) 侧各取一点 $M_i(N_i)$, 作 $M_iQ_i\perp P_iP_{i+1}$ $(N_iQ_i\perp P_iP_{i+1})$, 垂足为 Q_i. 如果 $P_iQ_i/Q_iP_{i+1}=\lambda$, $|M_iQ_i|=\mu|P_iP_{i+1}|$ $(|N_iQ_i|=\mu|P_iP_{i+1}|)$ $(i=1,2,\cdots,n;\mu\geqslant 0)$. 则称以 M_1, $M_2,\cdots,M_n$ 为顶点的多边形 $M_1M_2\cdots M_n$ 为多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的 (λ,μ) 外多边形; 若 $N_1,N_2,\cdots,N_n$ 依次构成多边形, 则称 $N_1N_2\cdots N_n$ 为多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的 (λ,μ) 内多边形.

特别, 当 N_1, $N_2,\cdots,N_n$ 中有连续三点或三点以上共线时, 由 N_1, $N_2,\cdots,N_n$ 所构成的多边形或线段或点看成是 (λ,μ) 内多边形 (多角形) 的特殊情形.

7.2.2 多边形的 (λ,μ) 外、内多边形有向面积的性质

定理 7.2.1 设 $M_1M_2\cdots M_n$ $(N_1N_2\cdots N_n)$ 为多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的 (λ,μ) 外多边形 (内多边形), 则

$$D_{M_1M_2\cdots M_n}-D_{N_1N_2\cdots N_n}=\pm\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{n}d^2_{P_iP_{i+2}},\tag{7.2.1}$$

其中当 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正向多边形时, 式 (7.2.1) 取 “+” 号; 为反向三角形时取 “−” 号.

证明 不妨设 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正向多边形, $P_1P_2\cdots P_n$ 和 $M_1M_2\cdots M_n(N_1N_2\cdots N_n)$ 顶点的坐标分别为 $P_i(x_i,y_i)$ 和 $M_i(X_i,Y_i),N_i(X_i',Y_i')(i=1,2,\cdots,n)$. 于是 Q_i 的坐标为

$$Q_i\left(\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda},\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}\right)\ (i=1,2,\cdots,n).$$

由定理 7.2.1 类似的方法可得

$$X_i=\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+1}-y_i),\quad Y_i=\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu(x_{i+1}-x_i))(i=1,2,\cdots,n),$$

$$X_i' = \frac{x_i + \lambda x_{i+1}}{1+\lambda} - \mu(y_{i+1} - y_i), \quad Y_i' = \frac{y_i + \lambda y_{i+1}}{1+\lambda} + \mu(x_{i+1} - x_i)(i = 1, 2, \cdots, n).$$

于是

$$\begin{aligned}
&D_{M_1M_2\cdots M_n}\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+1}-y_i)\right]\times\left[\frac{y_{i+1}+\lambda y_{i+2}}{1+\lambda}-\mu(x_{i+2}-x_{i+1})\right]\right.\\
&\left.-\left[\frac{x_{i+1}+\lambda x_{i+2}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+2}-y_{i+1})\right]\times\left[\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu(x_{i+1}-x_i)\right]\right\}\\
=&\frac{1}{2(1+\lambda)^2}\sum_{i=1}^{n}[(1+\lambda^2)(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+\lambda(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)]\\
&-\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_ix_{i+2}-x_{i+1}^2+y_iy_{i+2}-y_{i+1}^2)-\frac{\mu^2}{2}\sum_{i=1}^{n}[(x_{i+2}y_{i+1}-x_{i+1}y_{i+2})\\
&+(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})+(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)]. \qquad (7.2.2)
\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}
D_{N_1N_2\cdots N_n}=&\frac{1}{2(1+\lambda)^2}\sum_{i=1}^{n}[(1+\lambda^2)(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+\lambda(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)]\\
&+\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_ix_{i+2}-x_{i+1}^2+y_iy_{i+2}-y_{i+1}^2)\\
&-\frac{\mu^2}{2}\sum_{i=1}^{n}[(x_{i+2}y_{i+1}-x_{i+1}y_{i+2})\\
&+(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})+(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)], \qquad (7.2.3)
\end{aligned}$$

式 (7.2.2)− 式 (7.2.3) 得

$$\begin{aligned}
D_{M_1M_2\cdots M_n}-D_{N_1N_2\cdots N_n}=&-\mu\sum_{i=1}^{n}(x_ix_{i+2}-x_{i+1}^2+y_iy_{i+2}-y_{i+1}^2)\\
=&\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{n}[(x_i^2-2x_ix_{i+2}+x_{i+2}^2)+(y_i^2-2y_iy_{i+2}+y_{i+2}^2)]\\
=&\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{n}d_{P_iP_{i+2}}^2,
\end{aligned}$$

从而式 (7.2.1) 成立.

定理 7.2.2　设 $M_1M_2M_3M_4$ $(N_1N_2N_3N_4)$ 为四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的 (λ,μ) 外四边形 (内四边形), 则

$$D_{M_1M_2M_3M_4}=\left[\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3P_4}\pm\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{2}d_{P_iP_{i+2}}^2, \qquad (7.2.4)$$

$$D_{N_1N_2N_3N_4}=\left[\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3P_4}\mp\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{2}d^2_{P_iP_{i+2}},\tag{7.2.5}$$

其中当 $P_1P_2P_3P_4$ 为正向四边形时, 式 (7.2.4) 取 "+" 号, 式 (7.2.5) 取 "—" 号; 为反向四边形时式 (7.2.4) 取 "—" 号, 式 (7.2.5) 取 "+" 号.

证明 如图 7.2.1 所示. 若 $P_1P_2P_3P_4$ 为正向四边形, 在定理 7.2.1 的证明中令 $n=4$, 并注意到

$$\sum_{i=1}^{4}(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)=0, D_{P_1P_2P_3P_4}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i),$$

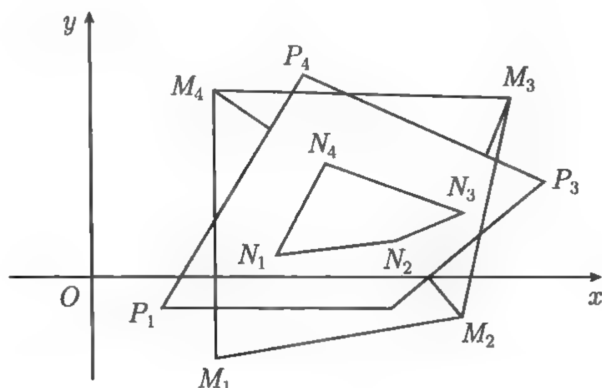


图 7.2.1 四边形的 (λ,μ) 外 (内) 四边形

由式 (7.2.2) 和式 (7.2.3) 分别得

$$\begin{aligned}D_{M_1M_2M_3M_4}&=\left[\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3P_4}-\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{4}(x_ix_{i+2}-x^2_{i+1}+y_iy_{i+2}-y^2_{i+1})\\&=\left[\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3P_4}+\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{2}d^2_{P_iP_{i+2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{N_1N_2N_3N_4}&=\left[\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3P_4}+\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{4}(x_ix_{i+2}-x^2_{i+1}+y_iy_{i+2}-y^2_{i+1})\\&=\left[\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3P_4}-\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{2}d^2_{P_iP_{i+2}}.\end{aligned}$$

类似地, 可以证明 $P_1P_2P_3P_4$ 为反向四边形的情形.

从而式 (7.2.4) 和式 (7.2.5) 成立.

注 7.2.1 在定理 7.2.2 中令 $\mu=0$, 即得定理 6.1.4.

推论 7.2.1 设 $M_1M_2M_3M_4$ $(N_1N_2N_3N_4)$ 为四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的 (λ,μ) 外四边形 (内四边形), 则

$$D_{M_1M_2M_3M_4}+D_{N_1N_2N_3N_4}=2\left[\frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+\mu^2\right]D_{P_1P_2P_3P_4}. \tag{7.2.6}$$

证明 式 (7.2.4)+(7.2.5) 即得式 (7.2.6).

定理 7.2.3 设 $M_1M_2\cdots M_n$ $(N_1N_2\cdots N_n)$ 为多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的 (λ,μ) 外多边形 (内多角形), 则多边形 $M_1M_2\cdots M_n$(多角形 $N_1N_2\cdots M_n$) 的重心和多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的重心重合.

证明 不妨设 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正向多边形, $P_1P_2\cdots P_n, M_1M_2\cdots M_n$ 和 $N_1N_2\cdots N_n$ 顶点的坐标分别为 $P(x_i,y_i), M_i(X_i,Y_i)$ 和 $N_i(X_i',Y_i')(i=1,2,\cdots,n)$, 重心分别为 $G(x_0,y_0)$, $G'(x_0',y_0')$ 和 $G''({x'}'_0,{y'}'_0)$, 则

$$x_0'=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n),\quad y_0'=\frac{1}{n}(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n);$$

$$x''_0=\frac{1}{n}(X_1'+X_2'+\cdots+X_n'),\quad y''_0=\frac{1}{n}(Y_1'+Y_2'+\cdots+Y_n').$$

由定理 7.2.1 的证明可得

$$X_i=\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+1}-y_i)\quad Y_i=\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu(x_{i+1}-x_i)),(i=1,2,\cdots,n);$$

$$X_i'=\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}-\mu(y_{i+1}-y_i)\quad Y_i'=\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(x_{i+1}-x_i)),(i=1,2,\cdots,n).$$

于是

$$\begin{aligned}x_0'=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+1}-y_i)\right]\\=&\frac{1}{n(1+\lambda)}\sum_{i=1}^{n}(x_i+\lambda x_{i+1})+\frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1}-y_i)\\=&\frac{1}{n(1+\lambda)}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\lambda\sum_{i=1}^{n}x_{i+1}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=x_0.\end{aligned}$$

同理

$$y_0'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}y_i=y_0,\quad x''_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}x_i=x_0,\quad y''_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}y_i=y_0.$$

所以多边形 $M_1M_2\cdots M_n$(多角形 $N_1N_2\cdots N_n$) 和多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的重心重合.

推论 7.2.2(Cesaro 定理) 以三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边分别向外作三个相似的三角形 $P_1P_2M_1, P_2P_3M_2, P_3P_1M_3$, 则三角形 $P_1P_2P_3$ 和三角形 $M_1M_2M_3$ 的重心重合.

证明 如图 7.2.2 所示. 在定理 7.2.3 中, 令 $n=3$, 由其中外三角形 $M_1M_2M_3$ 的结论即得.

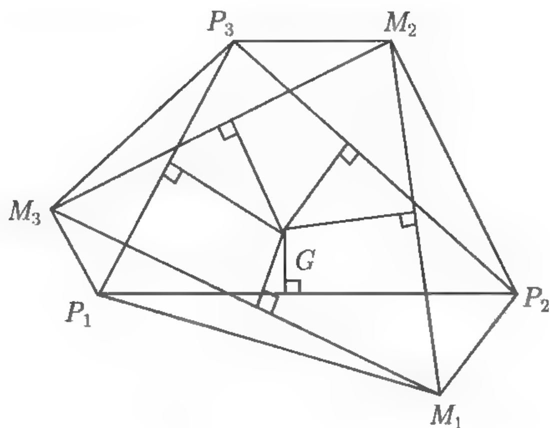


图 7.2.2 Cesaro 定理

7.2.3 多边形的外、内多边形有向面积的几个定值定理及其应用

定理 7.2.4 以三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边向外作正方形 $P_iQ_iR_{i+1}P_{i+1}, P_{i+2}N_i\perp P_iP_{i+1}$ 于 N_i, P 是 $P_{i+2}N_i$ 所在直线上任意一点 $(i=1,2,3)$, 则

(1) 直线 $P_{i+2}N_i$ 经过 $R_{i+2}Q_{i+2}$ 的中点;

(2) 线段 $Q_{i+1}R_{i+1}$ 的中点到 P_iP_{i+1} 的距离等于 P_iP_{i+1} 长度的一半;

(3) $D_{PP_iQ_{i+1}}=D_{PP_{i+1}R_i}$(或 $S_{PP_iQ_{i+1}}=S_{PP_{i+1}R_i}$)$(i=1,2,3)$; (7.2.7)

(4) $D_{Q_1Q_2Q_3}=D_{R_1R_2R_3}$(或 $S_{Q_1Q_2Q_3}=S_{R_1R_2R_3}$); (7.2.8)

(5) $D_{P_1R_1Q_1}=D_{P_2R_2Q_2}=D_{P_3R_3Q_3}$(或 $S_{P_1R_1Q_1}=S_{P_2R_2Q_2}=S_{P_3R_3Q_3}$). (7.2.9)

证明 如图 7.2.3 所示. 对固定的 i, 以 P_iP_{i+1} 所在直线为 x 轴建立坐标系. 不妨设三角形顶点的坐标为 $P_i(0,0), P_{i+1}(a,0), P_{i+2}(b,c)$. 则由定理 7.1.1 证明可以求得各长方形其余顶点的坐标分别为 $Q_i(0,-a), R_{i+1}(a,-a)$; $Q_{i+1}(a+c,a-b), R_{i+2}(b+c,a-b+c)$; $Q_{i+2}(b-c,b+c), R_i(-c,b)$, 垂足的坐标为 $N_i(b,0), P_{i+2}N_i$ 所在直线上任意点的坐标为 $P(b,y)$. 于是

(1) 线段 $R_{i+2}Q_{i+2}$ 中点的横坐标为 b, 从而直线 $P_{i+2}N_i$ 经过 $R_{i+2}Q_{i+2}$ 的中点;

(2) 线段 $Q_{i+1}R_{i+1}$ 的中点的纵坐标为 $-b/2$, 从而线段 $Q_{i+1}R_{i+1}$ 的中点到 P_iP_{i+1} 的距离等于 P_iP_{i+1} 长度的一半;

(3) 因为 $2D_{PP_iQ_{i+1}}=(a+c)y-(a-b)b, 2D_{PP_{i+1}R_i}=-ay+ab-cy-b^2$, 两式相减即得式 (7.2.7);

(4) 因为

$$\begin{aligned}2D_{Q_1Q_2Q_3} =& a(a+c)+(a+c)(b+c)-(a-b)(b-c)-a(b-c)\\=& a^2+b^2+c^2-ab+4ac,\\2D_{R_1R_2R_3} =& ac-ab+a(a-b+c)+a(b+c)+(b+c)b+(a-b+c)c\\=& a^2+b^2+c^2-ab+4ac,\end{aligned}$$

所以式 (7.2.8) 成立.

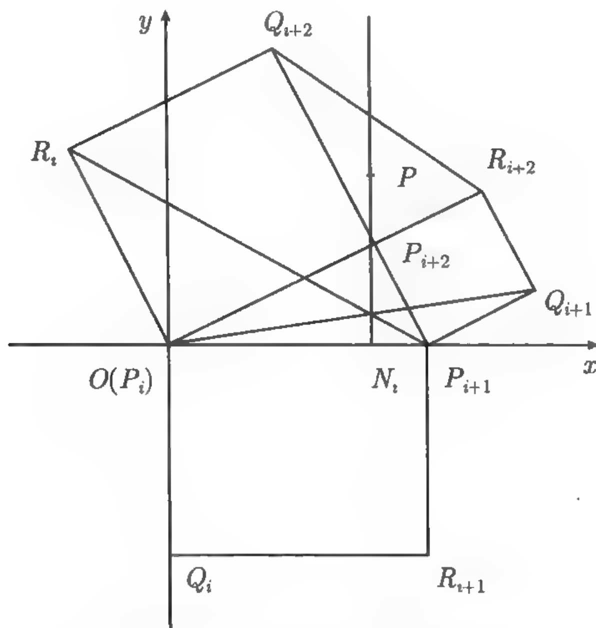


图 7.2.3　三角形的外正四边形

(5) 因为

$$\begin{aligned}D_{P_1R_1Q_1} =& \frac{1}{2}ac,\\D_{P_2R_2Q_2} =& \frac{1}{2}[-a^2+a(a-b)+a(a+c-a(a-b)]=\frac{1}{2}ac,\\D_{P_3R_3Q_3} =& \frac{1}{2}[b(a-b+c)-(b+c)c+(b+c)^2\\&-(b-c)(a-b+c)+(b-c)c-b(b+c)]=\frac{1}{2}ac,\end{aligned}$$

所以式 (7.2.9) 成立.

注 7.2.2　本题第 (1) 部分结论为 1964 年基辅数学奥林匹克竞赛题; 第 (2) 部分结论为 1996 年山东省数学奥林匹克竞赛题.

推论 7.2.3　以三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边向外作正方形 $P_iQ_iR_{i+1}P_{i+1}$ $(i=1,2,3)$, 则

$$S_{P_{i+2}P_iQ_{i+1}}=S_{P_{i+2}P_{i+1}R_i}(i=1,2,3).$$

证明 如图 7.2.4 所示. 在式 (7.2.7) 中取 P 为 P_{i+2} 即得.

推论 7.2.4 以三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边向外作正方形 $P_iQ_iR_{i+1}P_{i+1}, P_{i+2}N_i\perp P_iP_{i+1}$ 于 N_i, 则 $P_iQ_{i+1}, P_{i+1}R_i$ 和 $P_{i+2}N_i$ 所在直线相交于一点 $G_i(i=1,2,3)$.

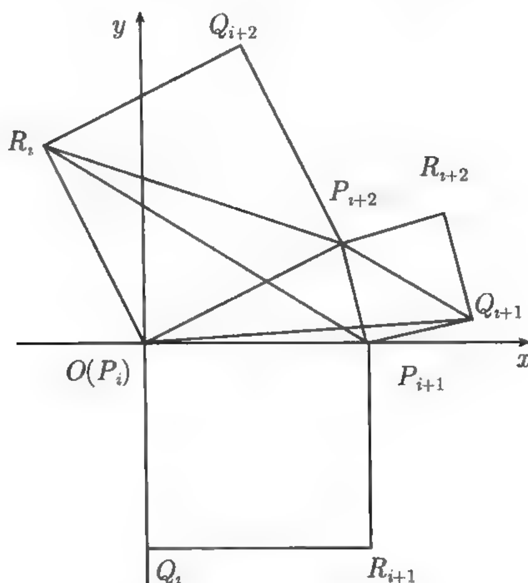


图 7.2.4 三角形面积相等

证明 如图 7.2.5 所示. 在式 (7.2.7) 中取 P 为 P_iQ_{i+1} 与 $P_{i+2}N_i$ 所在直线交点 G_i, 即得 $D_{G_iP_{i+1}R_i}=0$, 因此 G_i 在 $P_{i+1}R_i$ 上, 于是 $P_iQ_{i+1}, P_{i+1}R_i$ 和 $P_{i+2}N_i$ 所在直线相交于点 $G_i(i=1,2,3)$.

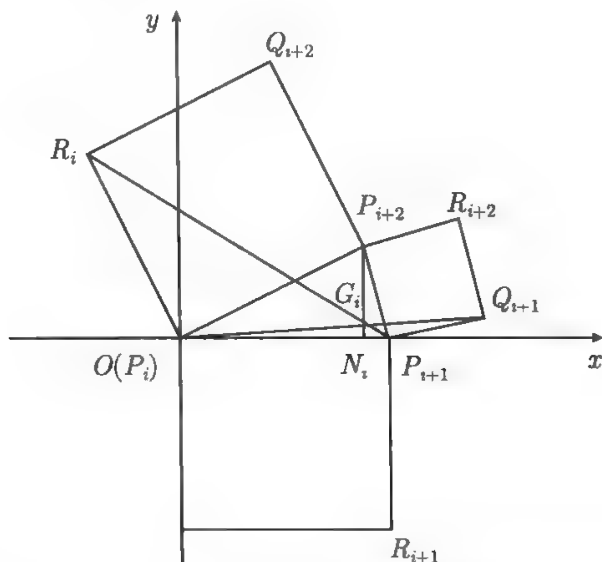


图 7.2.5 $P_iQ_{i+1}, P_{i+1}R_i$ 和 $P_{i+2}N_i$ 所在直线相交于一点

推论 7.2.5 以三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边向外作正方形 $P_iQ_iR_{i+1}P_{i+1}, P_{i+2}N_i\perp P_iP_{i+1}$ 于 N_i, T_i 是 $R_iQ_i(i=1,2,3)$ 的中点, 则 $P_{i+2}N_i$ 所在直线平分 $R_{i+2}Q_{i+2}$ 且

$$S_{T_{i+2}P_iQ_{i+1}}=S_{T_{i+2}P_{i+1}R_i},\quad S_{N_iP_iQ_{i+1}}=S_{N_iP_{i+1}R_i}(i=1,2,3). \tag{7.2.10}$$

证明　由定理 7.2.4 证明, 求得 $R_{i+2}Q_{i+2}$ 中点的坐标为 $T_{i+2}\left(b, \frac{1}{2}a+c\right)$, 因此 T_{i+2} 在 $P_{i+2}N_i$ 所在直线上, 从而 $P_{i+2}N_i$ 所在直线平分 $R_{i+2}Q_{i+2}$. 又在式 (7.2.7) 中分别取 P 为 T_{i+2}, N_i, 即得式 (7.2.10).

定理 7.2.5　以三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边 P_iP_{i+1} 向外 (内) 作相似的长方形 $P_iQ_iR_{i+1}P_{i+1}(P_iQ_i'R_{i+1}'P_{i+1})$ 且 $|P_iQ_i|/|P_iP_{i+1}|=|P_iQ_i'|/|P_iP_{i+1}|=\mu)(i=1,2,3)$, P 是三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{3}D_{PQ_iR_{i+2}}=\sum_{i=1}^{3}D_{PQ_i'R_{i+2}'}=(3\mu^2-1)D_{P_1P_2P_3}, \tag{7.2.11}$$

证明　如图 7.2.6 所示. 设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点坐标为 $P_i(x_i,y_i)$, 根据定理 7.2.1 的证明, 可得各长方形 $P_iQ_iR_{i+1}P_{i+1}$ 另外两个顶点的坐标

$$Q_i(x_i+\mu(y_{i+1}-y_i), y_i+\mu(x_{i+1}-x_i))(i=1,2,3),$$

$$R_{i+1}(x_{i+1}+\mu(y_{i+1}-y_i), y_{i+1}+\mu(x_{i+1}-x_i))(i=1,2,3).$$

于是

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{3}D_{PQ_iR_{i+2}}=&\sum_{i=1}^{3}\{x[y_i-\mu(x_{i+1}-x_i)]-[x_i+\mu(y_{i+1}-y_i)]y\}\\
&+\sum_{i=1}^{3}\{[x_{i+2}+\mu(y_{i+2}-y_{i+1})]y-x[y_{i+2}-\mu(x_{i+2}-x_{i+1})]\}\\
&+\sum_{i=1}^{3}\{[x_i+\mu(y_{i+1}-y_i)][y_{i+2}-\mu(x_{i+2}-x_{i+1})]\\
&-[x_{i+2}+\mu(y_{i+2}-y_{i+1})][y_i-\mu(x_{i+1}-x_i)]\}\\
=&x\sum_{i=1}^{3}[(y_i-y_{i+2})+\mu(x_i+x_{i+2}-2x_{i+1})]\\
&+y\sum_{i=1}^{3}[(x_{i+2}-x_i)+\mu(y_i+y_{i+2}-2y_{i+1})]\\
&+\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)+\mu\sum_{i=1}^{3}[(x_ix_{i+1}+x_{i+1}x_{i+2}-2x_ix_{i+2})\\
&+(y_iy_{i+1}+y_{i+1}y_{i+2}-2y_iy_{i+2})]+\mu^2\sum_{i=1}^{3}[(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\\
&+(x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1})+(x_{i+2}y_i-x_iy_{i+2})]\\
=&\sum_{i=1}^{3}(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})+\mu\sum_{i=1}^{3}[(x_ix_{i+1}+x_ix_{i+1}-2x_{i+1}x_i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(y_iy_{i+1}+y_iy_{i+1}-2y_{i+1}y_i)]\\
&+\mu^2\sum_{i=1}^{3}[(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)]\\
=&(3\mu^2-1)\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)=2(3\mu^2-1)D_{P_1P_2P_3},
\end{aligned}
$$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{3}D_{PQ_iR_{i+2}}=(3\mu^2-1)D_{P_1P_2P_3}$.

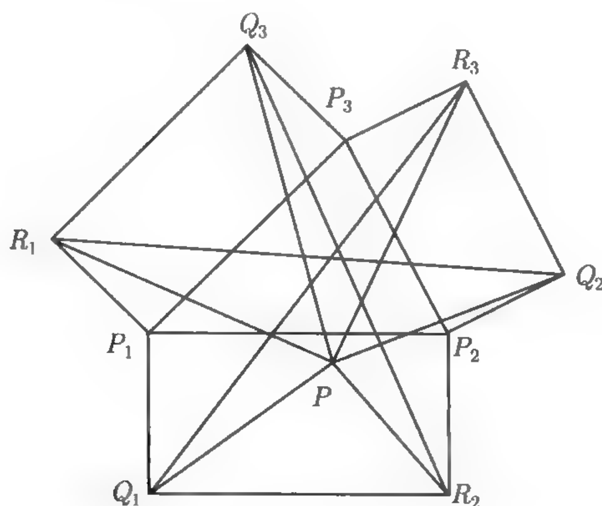


图 7.2.6 三角形的外相似长方形

类似地, 可以证明 $\sum\limits_{i=1}^{3}D_{PQ'_iR'_{i+2}}=(3\mu^2-1)D_{P_1P_2P_3}$, 因此式 (7.2.11) 成立.

推论 7.2.6 以三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边 P_iP_{i+1} 向外 (内) 作相似的长方形 $P_iQ_iR_{i+1}P_{i+1}(P_iQ'_iR'_{i+1}P_{i+1})$ 且 $|P_iQ_i|/|P_iP_{i+1}|=|P_iQ'_i|/|P_iP_{i+1}|=1/\sqrt{3})(i=1,2,3)$, P 是三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, 则三角形 PQ_1R_3,PQ_2R_1,PQ_3R_2 $(PQ'_1R'_3,PQ'_2R'_1,PQ'_3R'_2)$ 中, 其中一个三角形的面积等于其余两个三角形的面积的和.

证明 在式 (7.2.11) 中令 $\mu=1/\sqrt{3}$ 得

$$\sum_{i=1}^{3}D_{PQ_iR_{i+2}}=\sum_{i=1}^{3}D_{PQ'_iR'_{i+2}}=0, \tag{7.2.12}$$

因此推论 7.2.6 结论成立.

推论 7.2.7 以三角形 $P_1P_2P_3$ 的三边 P_iP_{i+1} 向外 (内) 作相似的长方形 $P_iQ_iR_{i+1}P_{i+1}(P_iQ'_iR'_{i+1}P_{i+1})$ 且 $|P_iQ_i|/|P_iP_{i+1}|=|P_iQ'_i|/|P_iP_{i+1}|=1/\sqrt{3})(i=1,2,3)$, 则直线 $Q_1R_3,Q_2R_1,Q_3R_2(Q'_1R'_3,Q'_2R'_1,Q'_3R'_2$ 相交于一点.

证明　如图 7.2.7 所示. 设 G 为直线 $Q_1R_3, Q_2R_1(Q_1'R_3', Q_2'R_1')$ 的交点, 则由式 (7.2.11) 得 $D_{GQ_3R_2} = 0(D_{GQ_3'R_2'} = 0)$, 此 G 在直线 $Q_3R_2(Q_3'R_2')$ 上. 故直线 $Q_1R_3, Q_2R_1, Q_3R_2(Q_1'R_3', Q_2'R_1', Q_3'R_2')$ 交于一点.

定理 7.2.6　设长方形 $ABCD$ 与 $AB_1C_1D_1$ 同向相似, B 与 B_1 不重合, P 是长方形所在平面上任意一点, 则

$$D_{PBB_1} - D_{PCC_1} + D_{PDD_1} = 0. \tag{7.2.13}$$

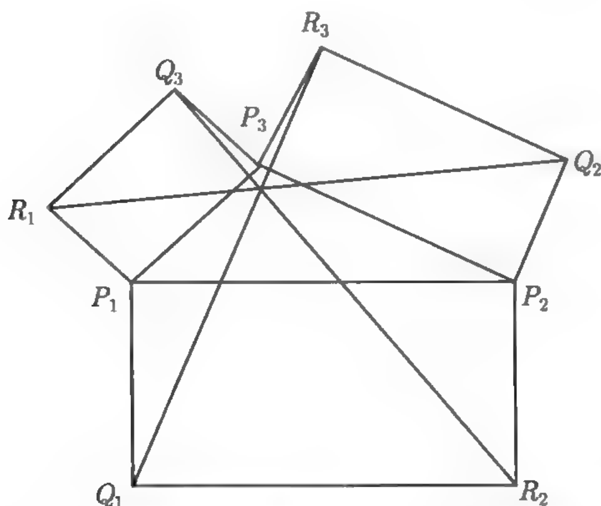


图 7.2.7　三角形的长与宽之比为 $1/\sqrt{3}$ 外相似长方形

证明　如图 7.2.8 所示. 设长方形 $ABCD$ 顶点的坐标为 $A(0,0), B(a,0), C(a,b), D(0,b)$, 任意点及 B_1 的坐标分别为 $P(x,y), B_1(c,d)$, 于是求得 $AB_1C_1D_1$ 其余两个顶点的坐标 $C_1\left(c-\dfrac{bd}{a}, d+\dfrac{bc}{a}\right)$, $D_1\left(-\dfrac{bd}{a}, \dfrac{bc}{a}\right)$.

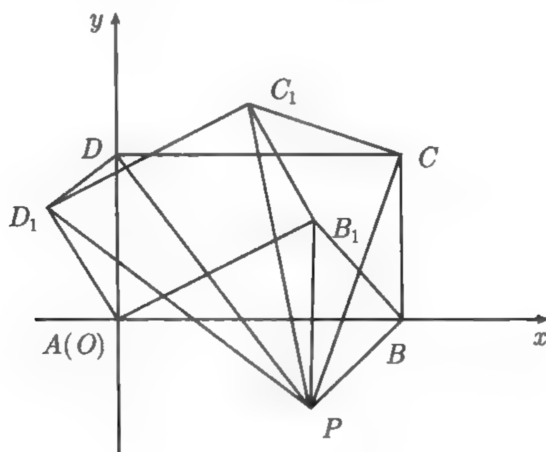


图 7.2.8

根据三角形有向面积公式得

$$2D_{PBB_1} = (0-ay) + (ad-0) + (cy-dx) = -dx + (c-a)y + ad, \tag{7.2.14}$$

$$2aD_{PCC_1} = (ab - ad - bc)x + (ac - bd - a^2)y + (a^2 + b^2)d, \tag{7.2.15}$$

$$2aD_{PDD_1} = (ab - bc)x - bdy + b^2 d. \tag{7.2.16}$$

式 (7.2.14)×a−(7.2.15)+(7.2.16), 并化简即得式 (7.2.13).

推论 7.2.8 设长方形 $ABCD$ 与 $AB_1C_1D_1$ 同向相似, B 与 B_1 不重合, 则直线 BB_1, CC_1, DD_1 三线共点.

证明 如图 7.2.9 所示. 设直线 BB_1, CC_1 的交点为 G, 将 G 代入式 (7.2.13) 得 $D_{GDD_1} = 0$, 因此 G 在直线 DD_1 上, 所以直线 BB_1, CC_1, DD_1 三线共点.

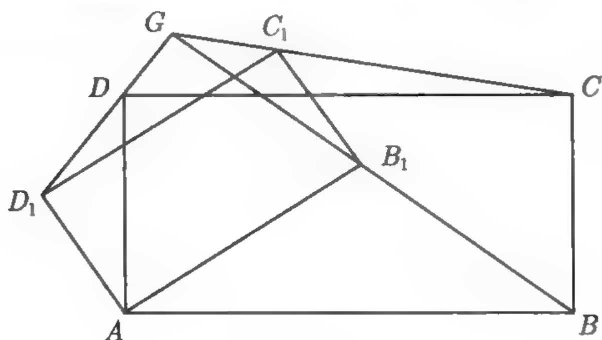


图 7.2.9

注 7.2.3 当 $ABCD$ 与 $AB_1C_1D_1$ 为同向正方形时, 即得第 26 届国际数学奥林匹克候选题结论.

7.3 n 边形中 n 相似形中有向面积的定值定理及其应用

本节主要讨论凸 n 边形的 n 相似形中有向面积的的定值定理及其应用. 在明确凸多边形的 N 相似形概念的基础上, 分别给出凸 n 边形的 n 相似四边形、n 相似矩形和三相似平行四边形中有向面积的定值定理, 并讨论这些定理的应用, 从而推出与凸 n 边形的 n 相似四边形、n 相似矩形和三相似平行四边形有关的几个等积和多线共点等方面的结论, 包括著名的三角形中垂线定理.

7.3.1 n 边形中 n 相似四边形中有向面积的定值定理及其应用

定义 7.3.1 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是凸 n 边形, 分别以 $P_iP_{i+1}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为对角线作 n 个相似多边形, 则称这 n 个相似的多边形为 $P_1P_2\cdots P_n$ 的 n 相似形, 简称 n 相似形.

定理 7.3.1 设 $P_iQ_iP_{i+1}R_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 同向的 n 相似四边形, $Q_iR_i \perp P_iP_{i+1}$ 于 M_i 且 $P_iM_i/M_iP_{i+1} = \lambda, d_{Q_i-P_iP_{i+1}} = \mu_1 d_{P_iP_{i+1}}, d_{R_i-P_iP_{i+1}} = \mu_2 d_{P_iP_{i+1}}(i = 1, 2, \cdots, n), P$ 是 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{n} D_{PQ_iR_i} = \pm\frac{(\mu_1+\mu_2)(\lambda-1)}{4(1+\lambda)}\sum_{i=1}^{n} d^2_{P_iP_{i+1}}(\text{为定值}), \tag{7.3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_{PQ_iM_i} = \pm\frac{\mu_1(\lambda-1)}{4(1+\lambda)}\sum_{i=1}^{n} d^2_{P_iP_{i+1}}(\text{为定值}), \tag{7.3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_{PM_iR_i} = \pm\frac{\mu_2(\lambda-1)}{4(1+\lambda)}\sum_{i=1}^{n} d^2_{P_iP_{i+1}}(\text{为定值}), \tag{7.3.3}$$

其中 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正向多边形时取 “+” 号, 为反向多边形时取 “−” 号.

证明　如图 7.3.1 所示. 不妨设 $P_1P_2\cdots P_n$ 及 $P_iQ_iP_{i+1}R_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为正向多边形, 任意点的坐标为 $P(x,y)$, $P_1P_2\cdots P_n$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$. 于是根据定理 7.2.1 的证明可得 Q_i, R_i 的坐标为

$$Q_i\left(\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu_1(y_{i+1}-y_i)\ ,\ \frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu_1(x_{i+1}-x_i)\right)(i=1,2,\cdots,n),$$

$$R_i\left(\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}-\mu_2(y_{i+1}-y_i)\ ,\ \frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}+\mu_2(x_{i+1}-x_i)\right)(i=1,2,\cdots,n).$$

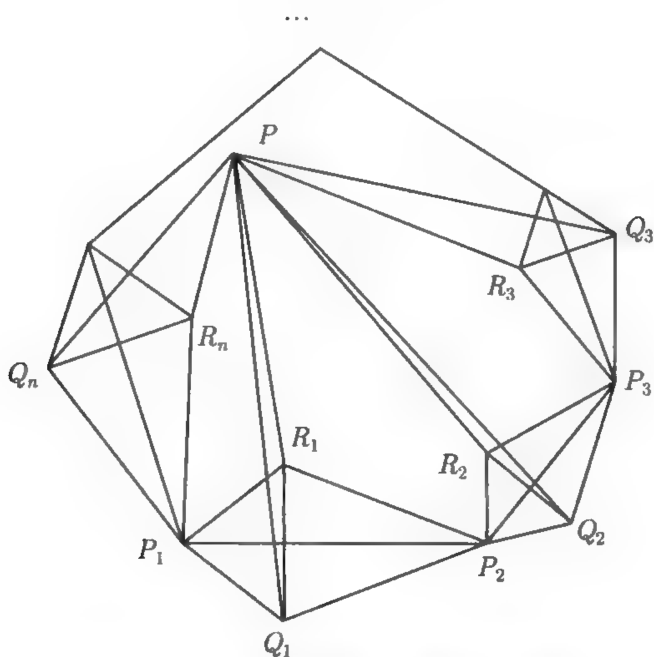


图 7.3.1　n 边形的 n 相似四边形

所以

$$2\sum_{i=1}^{n} D_{PQ_iR_i}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{x\left[\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu_1(x_{i+1}-x_i)\right]-\left[\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu_1(y_{i+1}-y_i)\right]y\right\}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu_1(y_{i+1}-y_i)\right]\left[\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}+\mu_2(x_{i+1}-x_i)\right]\right.$$

$$\left.-\left[\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}-\mu_2(y_{i+1}-y_i)\right]\left[\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu_1(x_{i+1}-x_i)\right]\right\}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}-\mu_2(y_{i+1}-y_i)\right]y-x\left[\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}+\mu_2(x_{i+1}-x_i)\right]\right\}$$

$$=\frac{\mu_1+\mu_2}{1+\lambda}\left\{\sum_{i=1}^{n}[(1-\lambda)x_ix_{i+1}+\lambda x_{i+1}^2-x_i^2)+(1-\lambda)y_iy_{i+1}+\lambda y_{i+1}^2-y_i^2]\right.$$

$$\left.-2x\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)-2y\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1}-y_i)\right\}$$

$$=\frac{(\mu_1+\mu_2)(1-\lambda)}{1+\lambda}\sum_{i=1}^{n}[(x_ix_{i+1}-x_i^2)+(y_iy_{i+1}-y_i^2)]$$

$$=\frac{(\mu_1+\mu_2)(\lambda-1)}{2(1+\lambda)}\sum_{i=1}^{n}d_{P_iP_{i+1}}^2,$$

因此式 (7.3.1) 成立.

类似地, 可以证明式 (7.3.2) 和式 (7.3.3) 成立.

推论 7.3.1 设 $P_iQ_iP_{i+1}R_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 同向的 n 相似四边形, 其中 Q_i,R_i 分别是 $P_1P_2\cdots P_n$ 的 (λ,μ) 外多边形 $Q_1Q_2\cdots Q_n$(内多边形 $R_1R_2\cdots R_n$) 的顶点, $Q_iR_i\perp P_iP_{i+1}$ 于 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$, P 是 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{n}D_{PQ_iR_i}=2\sum_{i=1}^{n}D_{PQ_iM_i}=2\sum_{i=1}^{n}D_{PM_iR_i}=\pm\frac{\mu(\lambda-1)}{2(1+\lambda)}\sum_{i=1}^{n}d_{P_iP_{i+1}}^2(\text{为定值}),$$

其中 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正向多边形时取 “+” 号, 为反向多边形时取 “−” 号.

证明 在定理 7.3.1 中令 $\mu_1=\mu_2=\mu$ 即得.

定理 7.3.2 设 $P_iQ_iP_{i+1}R_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 同向的 n 相似四边形, Q_iR_{i+1} 垂直平分 $P_iP_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$, P 是 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{n}D_{PQ_iR_i}=0(\text{为定值}). \tag{7.3.4}$$

证明 如图 7.3.2 所示. 在定理 7.3.1 中令 $\lambda=1$ 即得.

推论 7.3.2 设 $P_iQ_iP_{i+1}R_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 同向的 n 相似四边形, 且 Q_iR_i 垂直平分 P_iP_{i+1} 于 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$, P 是 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在平面上任意一点, 则在以下各组三角形

$$PQ_iR_i(i=1,2,\cdots,n),\quad PQ_iM_i(i=1,2,\cdots,n),\quad PM_iR_i(i=1,2,\cdots,n)$$

中, 其中正向三角形的面积的和等于反向三角形面积的和.

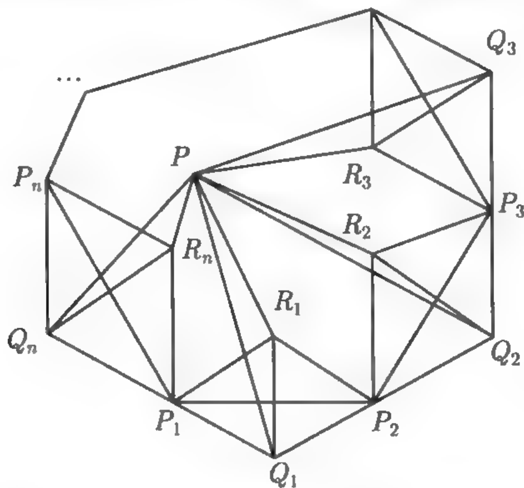


图 7.3.2　n 边形同向的 n 相似四边形

证明　由式 (7.3.4) 式即得.

推论 7.3.3　设 $P_iQ_iP_{i+1}R_i(i=1,2,3)$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 同向的三相似四边形, 且 Q_iR_i 垂直平分 P_iP_{i+1} 于 $M_i(i=1,2,3), P$ 是 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, 则在以下各组的三角形

$$PQ_iR_i(i=1,2,3),\quad PQ_iM_i(i=1,2,3),\quad PM_iR_i(i=1,2,3)$$

中, 其中一个三角形的面积等于其余两个三角形面积的和.

证明　如图 7.3.3 所示. 在三角形 $PQ_1R_1, PQ_2R_2, PQ_3R_3$ 中, 注意到其中必有一个三角形和另外两个三角形的方向相反, 由推论 7.3.1 即得三角形 $PQ_1R_1, PQ_2R_2, PQ_3R_3$ 中, 其中一个三角形的面积等于其余两个三角形面积的和.

另两组的证明类似.

推论 7.3.4　设 $P_iQ_iP_{i+1}R_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 同向的 n 相似四边形, 且 Q_iR_i 垂直平分 P_iP_{i+1} 于 $M_i(i=1,2,\cdots,n), P$ 是某 $Q_{i_0}R_{i_0}(i_0=1,2,\cdots,n)$ 所在直线上任意一点, 则在以下三组三角形:

$$PQ_iR_i(i=1,2,\cdots,n;i\neq i_0),\quad PQ_iM_i(i=1,2,\cdots,n;i\neq i_0),$$

$$PM_iR_i(i=1,2,\cdots,n;i\neq i_0)$$

中, 其中正向三角形的面积的和等于反向三角形面积的和.

证明　注意到 $D_{PQ_{i_0}R_{i_0}}=0$, 由推论 7.3.2 即得.

推论 7.3.5　设 $P_iQ_iP_{i+1}R_i(i=1,2,3)$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 同向的 n 相似四边形, 且 Q_iR_i 垂直平分 P_iP_{i+1} 于 $M_i(i=1,2,3), P$ 是 $Q_{i_0}R_{i_0}(i_0=1,2,3)$ 所在直线上任意一点, 则以下每组三角形

$$PQ_iR_i(i=1,2,3;i\neq i_0),\quad PQ_iM_i(i=1,2,3;i\neq i_0),\quad PM_iR_i(i=1,2,3;i\neq i_0)$$

中的两个三角形的面积相等.

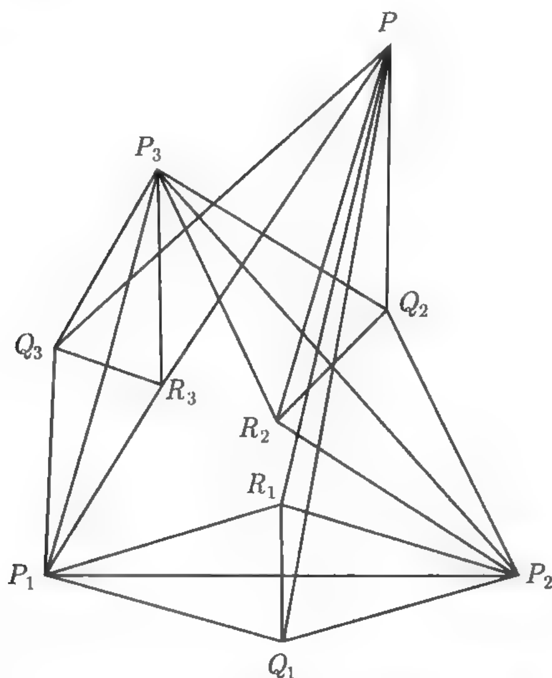


图 7.3.3 三角形同向的三相似四边形

证明 注意到 $D_{PQ_{i_0}R_{i_0}}=0$, 由推论 7.3.3 或在推论 7.3.4 中令 $n=3$ 即得.

推论 7.3.6 设 $P_iQ_iP_{i+1}R_i(i=1,2,3,4)$ 是四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 同向的四相似四边形, 且 Q_iR_i 垂直平分 P_iP_{i+1} 于 $M_i(i=1,2,3,4)$, P 是某 $Q_{i_0}R_{i_0}(i_0=1,2,3,4)$ 所在直线上任意一点, 则以下各组三角形

$$PQ_iR_i(i=1,2,3,4;i\neq i_0),\quad PQ_iM_i(i=1,2,3,4;i\neq i_0),\quad PM_iR_i(i=1,2,3,4;i\neq i_0)$$

中, 其中一个三角形的面积的和等于其余两个三角形面积的和.

证明 由推论 7.3.4 即得.

推论 7.3.7 设多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 各边上的中垂线中有 $n-1$ 条相交于一点, 则各边上的 n 条中垂线相交于一点.

证明 不妨设 $Q_iR_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 所在的 $n-1$ 条直线相交于 G 点, 将 $D_{GQ_iR_i}=0(i=1,\ 2,\cdots,n-1)$ 代入式 (7.3.2) 得 $D_{GQ_nR_n}=0$, 因此 G 在直线 Q_nR_n 上. 从而多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 各边上的 n 条中垂线相交于 G 点.

推论 7.3.8(三角形的中垂线定理) 三角形的三条中垂线直线相交于一点.

证明 如图 7.3.4 所示. 注意到 $Q_iR_i(i=1,2,3)$ 所在的三条直线中任意两条相交于一点, 由推论 7.3.6 即得.

注 7.3.1 三角形三边的中垂线的交点即三角形外接圆圆心, 叫做三角形的外心.

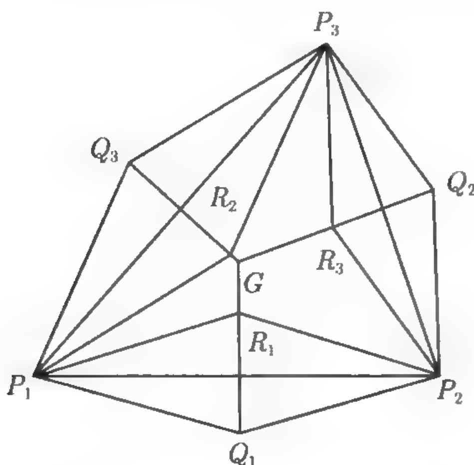


图 7.3.4　三角形的中垂线相交于一点

7.3.2　n 边形中 n 相似矩形中有向面积的定值定理及其应用

定理 7.3.3　设 $P_iQ_iP_{i+1}R_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的方向相同的 N 相似矩形, $Q_iM_i\perp P_iP_{i+1}$ 于 M_i 且 $P_iM_i/M_iP_{i+1}=\lambda, P$ 是 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{n} D_{PQ_iR_i}=\frac{\lambda-1}{1+\lambda}\sum_{i=1}^{n} D_{P_1P_2\cdots P_n}(\text{为定值}).\tag{7.3.5}$$

证明　如图 7.3.5 所示. 不妨设 $P_1P_2\cdots P_n$ 及 $P_iQ_iP_{i+1}R_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为正向多边形, 任意点的坐标为 $P(x,y), P_1P_2\cdots P_n$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i), R_iN_i\perp P_iP_{i+1}$ 于 $N_i(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $P_iN_i/N_iP_{i+1}=1/\lambda(i=1,2,\cdots,n)$. 于是根据定理 7.3.1 的证明可得 Q_i, R_i 的坐标为

$$Q_i\left(\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+1}-y_i),\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu(x_{i+1}-x_i)\right)(i=1,2,\cdots,n),$$

$$R_i\left(\frac{x_{i+1}+\lambda x_i}{1+\lambda}-\mu(y_{i+1}-y_i),\frac{y_{i+1}+\lambda y_i}{1+\lambda}+\mu(x_{i+1}-x_i)\right)(i=1,2,\cdots,n).$$

所以

$$\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{n} D_{PQ_iR_i}\\
=&\sum_{i=1}^{n}\left\{x\left[\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu(x_{i+1}-x_i)\right]-\left[\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+1}-y_i)\right]y\right\}\\
&+\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+1}-y_i)\right]\left[\frac{y_{i+1}+\lambda y_i}{1+\lambda}+\mu(x_{i+1}-x_i)\right]\right.\\
&\left.-\left[\frac{x_{i+1}+\lambda x_i}{1+\lambda}-\mu(y_{i+1}-y_i)\right]\left[\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu(x_{i+1}-x_i)\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{x_{i+1}+\lambda x_i}{1+\lambda}-\mu(y_{i+1}-y_i)\right]y-x\left[\frac{y_{i+1}+\lambda y_i}{1+\lambda}+\mu(x_{i+1}-x_i)\right]\right\}\\
=&x\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\lambda-1}{1+\lambda}(y_{i+1}-y_i)-2\mu(x_{i+1}-x_i)\right]\\
&-y\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\lambda-1}{1+\lambda}(x_{i+1}-x_i)-2\mu(y_{i+1}-y_i)\right]\\
&+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+\mu\sum_{i=1}^{n}[(x_{i+1}^2-x_i^2)+(y_{i+1}^2-y_i^2)]\\
=&\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)=\frac{2(\lambda-1)}{1+\lambda}\sum_{i=1}^{n}D_{P_1P_2\cdots P_n},
\end{aligned}
$$

因此式 (7.3.5) 成立.

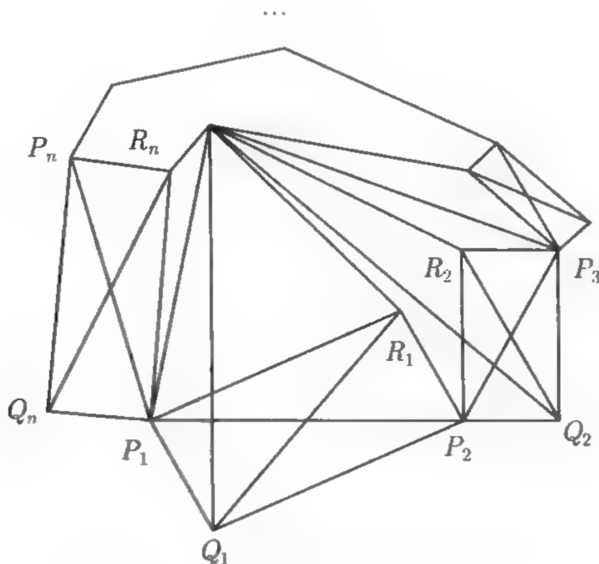


图 7.3.5 n 边形同向的相似矩形

注 7.3.2 当 $\lambda=1$ 时即得定理 7.3.2 中的 n 相似正方形的情形.

7.3.3 三角形中三相似平行四边形有向面积的定值定理及其应用

定理 7.3.4 如图 7.3.6 所示, 设 $AMBN, BQCT$ 和 $ASCR$ 是三角形 ABC 的三平行四边形, P 是三角形 ABC 所在平面上任意一点, 则

$$D_{PMN}-D_{PSR}+D_{PTQ}=0(\text{为定值}). \tag{7.3.6}$$

证明 不妨设任意点的坐标为 $P(x,y)$. 平行四边形顶点的坐标为 $A(0,0)$, $M(a,0), S(a+b,0), N(c,d), B(a+c,d), Q(a+b+c,d), R(e,f), T(a+e,f). C(a+b+e,f)$. 根据三角形有向面积公式, 得

$$D_{PMN}=\frac{1}{2}[(c-a)y-dx+ad], \tag{7.3.7}$$

$$D_{PSR} = \frac{1}{2}[(e-a-b)y - fx + (a+b)f], \tag{7.3.8}$$

$$D_{PTQ} = \frac{1}{2}[(b+c-e)y + (f-d)x + (a+e)d - (a+b+c)f]. \tag{7.3.9}$$

式 (7.3.7)+(7.3.8)+(7.3.9) 并注意到 $ed - fc = 0$, 即得式 (7.3.6).

推论 7.3.9　设 $AMBN, BQCT$ 和 $ASCR$ 是三角形 ABC 如图 7.3.6 所示的三平行四边形.

(1) 若 P 是直线 MN 上任意一点, 则 $S_{PSR} = S_{PTQ}$;

(2) 若 P 是直线 ST 上任意一点, 则 $S_{PMN} = S_{PTQ}$;

(3) 若 P 是直线 TQ 上任意一点, 则 $S_{PMN} = S_{PSR}$.

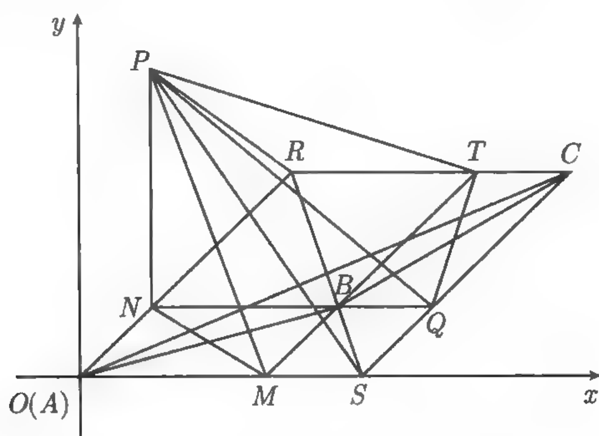


图 7.3.6　三角形的三平行四边形

证明　(1) 将 $D_{PMN} = 0$ 代入式 (7.3.6) 得 $D_{PSR} = D_{PTQ}$, 等式两边取绝对值即得 $S_{PSR} = S_{PTQ}$.

类似地, 可以证明 (2) 和 (3) 的结论成立.

推论 7.3.10　如图 7.3.7 所示, 设 $AMBN, BQCT$ 和 $ASCR$ 是三角形 ABC 的三平行四边形, 则这三平行四边形的对角线 MN, SR, TQ 所在直线共点.

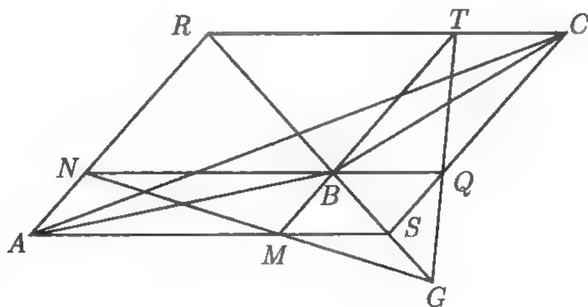


图 7.3.7　三角形的三平行四边形

证明　设 G 为平行四边形 $AMBN, BQCT$ 对角线 MN, QT 所在直线的交点, 将 G 代入式 (7.3.6) 得 $D_{GSR} = 0$, 于是 G, S, R 三点共线, 从而对角线 MN, SR, TQ 所在直线共点.

第 8 章　垂足多边形有向面积的定值定理及其应用

8.1　垂足三角形有向面积公式及其应用

众所周知, 三角形外接圆上任意一点到三角形各边的垂足在一条直线上, 这就是著名的 Simson 定理, 这条直线叫做三角形的 Simson 线. 本节利用有向面积的方法讨论有关的问题, 首先给出垂足三角形的概念, 再推导垂足三角形有向面积公式, 从而推出垂足三角形有向面积中有向面积的一些定值定理和著名的 Simson 定理、三角形的共点线定理等结论. 我们发现 Simson 定理并不是偶然的, 它具有深刻的背景.

8.1.1　垂足三角形有向面积公式

定义 8.1.1　设 P 是三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, 过 P 向 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 所在直线引垂线 PN_1, PN_2, PN_3, 垂足为 N_1, N_2, N_3. 则称 N_1, N_2, N_3 所构成的三角形 $N_1N_2N_3$ 为 $P_1P_2P_3$ 关于 P 点的垂足三角形.

为方便起见, 当 N_1, N_2, N_3 三角共线时, 我们把 N_1, N_2, N_3 依次构成的图形看成是垂足三角形的特殊情形.

定义 8.1.2　设 $N_1N_2N_3$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 关于 P 点的垂足三角形. 如果三角形 $P_1P_2P_3$ 和三角形 $N_1N_2N_3$ 的绕向都是逆时针方向或顺时针方向的, 则称三角形 $P_1P_2P_3$ 和三角形 $N_1N_2N_3$ 是同向的, 否则称为反向的.

定理 8.1.1　设 $\odot C(R)$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 的外接圆, 圆心的坐标为 $C(a,b)$, 三角形顶点的坐标为 $P_i(a+R\cos\theta_i, b+R\sin\theta_i)(i=1,2,3)$, P 到圆心的距离为 r, 则三角形 $P_1P_2P_3$ 关于垂点 P 的垂足三角形 $N_1N_2N_3$ 的有向面积

$$D_{N_1N_2N_3} = \frac{1}{8}(R^2-r^2)\sum_{i=1}^{3}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i) = \frac{1}{2}(r^2-R^2)\prod_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}, \quad (8.1.1)$$

其中 $\theta_{i+i}=\theta_i$, $\odot C(R)$ 表示以 C 为圆心、R 为半径的圆. 以下类同.

证明　如图 8.1.1 所示. 设 P 点的坐标为 $P(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$. 因为有向面积是平移不变的, 所以只需证明 C 为坐标原点时式 (8.1.1) 成立. 当 $a=b=0$ 时, P_iP_{i+1} 所在直线的方程为

$$(\sin\theta_i-\sin\theta_{i+1})x+(\cos\theta_{i+1}-\cos\theta_i)y = R\sin(\theta_i-\theta_{i+1}),$$

即

$$\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\cdot x+\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\cdot y=R\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}. \tag{8.1.2}$$

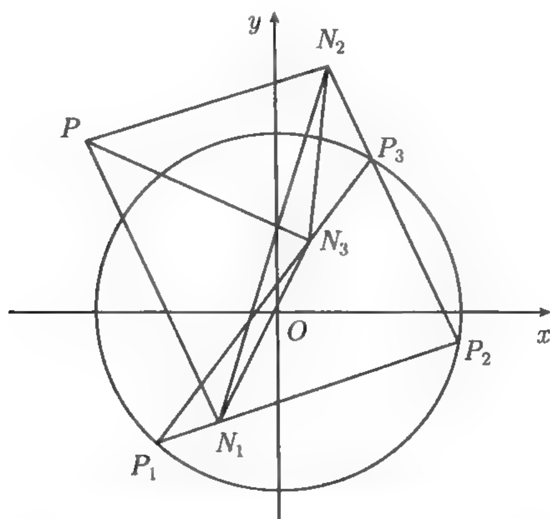


图 8.1.1　三角形的垂足三角形

PN_i 的直线方程为

$$(\cos\theta_{i+1}-\cos\theta_i)\cdot x+(\sin\theta_{i+1}-\sin\theta_i)\cdot y=r[\cos(\theta-\theta_{i+1})-\cos(\theta-\theta_i)],$$

即

$$\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}x-\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}y=-r\sin\left(\theta-\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\right). \tag{8.1.3}$$

式 (8.1.2) 和式 (8.1.3) 联立求得垂足 $N_i(x_i,y_i)$ 的坐标

$$\begin{aligned}
x_i=&\begin{vmatrix} R\cos\dfrac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2} & \sin\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\\ -r\sin\left(\theta-\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\right) & -\cos\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} \cos\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2} & \sin\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\\ \sin\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2} & -\cos\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\end{vmatrix}\\
=&R\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}-r\sin\left(\theta-\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\right)\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\\
=&\frac{1}{2}R(\cos\theta_i+\cos\theta_{i+1})+\frac{1}{2}r[\cos\theta-\cos(\theta-\theta_i-\theta_{i+1})]\ (i=1,2,3),\\
y_i=&\begin{vmatrix} \cos\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2} & R\cos\dfrac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}\\ \sin\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2} & -r\sin\left(\theta-\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\right)\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} \cos\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2} & \sin\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\\ \sin\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2} & -\cos\dfrac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\end{vmatrix}\\
=&R\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}+r\sin\left(\theta-\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\right)\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\\
=&\frac{1}{2}R(\sin\theta_i+\sin\theta_{i+1})+\frac{1}{2}r[\sin\theta+\sin(\theta-\theta_i-\theta_{i+1})]\ (i=1,2,3).
\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&D_{N_1N_2N_3}\\
=&\frac{1}{8}R^2\sum_{i=1}^{3}[(\cos\theta_i+\cos\theta_{i+1})(\sin\theta_{i+1}+\sin\theta_{i+2})\\
&-(\sin\theta_i+\sin\theta_{i+1})(\cos\theta_{i+1}+\cos\theta_{i+2})]\\
&+\frac{1}{8}r^2\sum_{i=1}^{3}\{[\cos\theta-\cos(\theta-\theta_i-\theta_{i+1})][\sin\theta+\sin(\theta-\theta_2-\theta_3)]\\
&-[\cos\theta-\cos(\theta-\theta_{i+1}-\theta_{i+2})][\sin\theta+\sin(\theta-\theta_i-\theta_{i+1})]\}\\
&+\frac{1}{8}Rr\sum_{i=1}^{3}\{(\cos\theta_i+\cos\theta_{i+1})[\sin\theta+\sin(\theta-\theta_2-\theta_3)]\\
&+(\sin\theta_{i+1}+\sin\theta_{i+2})[\cos\theta-\cos(\theta+\theta_{i+1}-\theta_{i+2})]\\
&-(\cos\theta_{i+1}+\cos\theta_{i+2})[\sin\theta+\sin(\theta-\theta_i-\theta_{i+1})]\\
&-(\sin\theta_i+\sin\theta_{i+1})[\cos(\theta-\theta_{i+1}-\theta_{i+2})]\}\\
=&\frac{1}{8}R^2\sum_{i=1}^{3}[\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)+\sin(\theta_{i+2}-\sin\theta_{i+1})+\sin(\theta_{i+2}-\sin\theta_i)]\\
&+\frac{1}{8}r^2\sum_{i=1}^{3}[\sin(2\theta-\theta_{i+1}-\theta_{i+2})-\sin(2\theta-\theta_i-\theta_{i+1})-\sin(\theta_{i+2}-\theta_{i+1})]\\
&+\frac{1}{8}Rr\sum_{i=1}^{3}[\sin(\theta+\theta_i-\theta_{i+1}-\theta_{i+2})-\sin(\theta+\theta_{i+2}-\theta_i-\theta_{i+1})]\\
=&\frac{1}{8}(R^2-r^2)\sum_{i=1}^{3}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)=\frac{1}{2}(r^2-R^2)\prod_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}.
\end{aligned}
$$

注 8.1.1 根据垂足三角形有向面积公式可知, 对与三角形外接圆同心的半径一定的圆上的点而言, 垂足三角形有向面积恒为定值.

8.1.2 垂足三角形有向面积公式的应用

定理 8.1.2 设三角形 $P_1P_2P_3$ 的外接圆的半径为 R, 点 P 到三角形 $P_1P_2P_3$ 外接圆圆心的距离为 r, 三角形 $P_1P_2P_3$ 关于垂点 P 的垂足三角形为 $N_1N_2N_3$, 则

$$\frac{D_{N_1N_2N_3}}{D_{P_1P_2P_3}}=\frac{R^2-r^2}{4R^2}, \tag{8.1.4}$$

$$\frac{S_{N_1N_2N_3}}{S_{P_1P_2P_3}}=\frac{|R^2-r^2|}{4R^2}. \tag{8.1.5}$$

证明 设三角形 $P_1P_2P_3$ 各顶点的坐标如定理 8.1.1 所设, 根据三角形有向面积公式得

$$D_{P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}R^2\sum_{i=1}^{3}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)=-2R^2\prod_{i=1}^{3}\sin\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}, \tag{8.1.6}$$

(8.1.1) 和 (8.1.6) 两式相除, 即得式 (8.1.4), 式 (8.1.4) 两边取绝对值即得式 (8.1.5).

定理 8.1.3　设 $\odot C(R)$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 的外接圆, 则三角形 $P_1P_2P_3$ 关于 $\odot C(r)(r\neq R)$ 上任意一点 P 的垂足三角形 $N_1N_2N_3$ 的 (有向) 面积恒为定值.

证明　根据定理 8.1.2 知, 三角形 $P_1P_2P_3$ 关于 $\odot C(r)(r\neq R)$ 上任意一点 P 的垂足三角形 $N_1N_2N_3$ 的有向面积 (面积) 均为

$$D_{N_1N_2N_3}=\frac{R^2-r^2}{4R^2}D_{P_1P_2P_3}\left(S_{N_1N_2N_3}=\frac{|R^2-r^2|}{4R^2}S_{P_1P_2P_3}\right),$$

其值仅与 $\odot C(r)$ 的半径无关, 而与垂点 P 在 $\odot C(r)$ 上的位置无关, 故为定值.

定理 8.1.4　设 $\odot C(R)$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 的外接圆, P 是 $\odot C(R)$ 内或 $\odot C(R)$ 与 $\odot C(\sqrt{2}R)$(包括 $\odot C(\sqrt{2}R)$ 上) 间的环形区域上的任意一点, 则三角形 $P_1P_2P_3$ 关于垂点 P 的垂足三角形 $N_1N_2N_3$ 的面积不大于三角形 $P_1P_2P_3$ 的中位三角形的面积.

证明　设 $|CP|=r$. 由已知条件得 $0\leqslant r<R$ 或 $R<r\leqslant\sqrt{2}R$. 从而 $0\leqslant|R^2-r^2|\leqslant R^2$. 由式 (8.1.5) 得

$$S_{N_1N_2N_3}=\frac{|R^2-r^2|}{4R^2}S_{P_1P_2P_3}\leqslant\frac{R^2}{4R^2}S_{P_1P_2P_3}=\frac{1}{4}S_{P_1P_2P_3}.$$

定理 8.1.5　从平面上一点 P 向三角形 $P_1P_2P_3$ 的各边 P_iP_{i+1} $(i=1, 2, 3)$ 引垂线, 垂足为 N_i $(i=1, 2, 3)$, 则

(1) 三角形 $P_1P_2P_3$ 与它关于垂点 P 的垂足三角形 $N_1N_2N_3$ 同向的充分必要条件是: P 点落在三角形 $P_1P_2P_3$ 的外接圆的内部 (图 8.1.2);

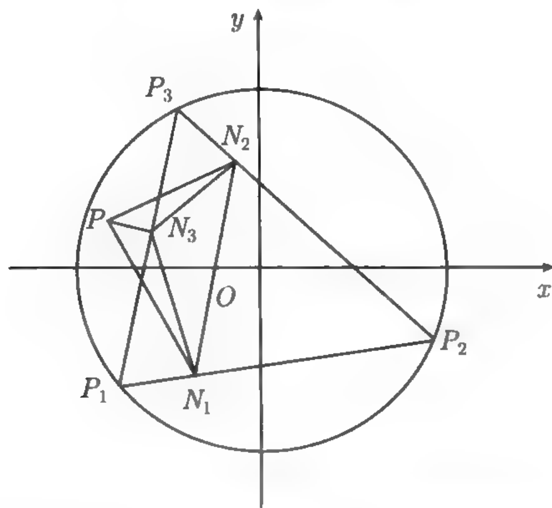


图 8.1.2　三角形外接圆内一点的垂足三角形

(2) 三角形 $P_1P_2P_3$ 与它关于垂点 P 的垂足三角形 $N_1N_2N_3$ 反向的充分必要条件是: P 点落在三角形 $P_1P_2P_3$ 的外接圆的外部 (图 8.1.1);

(3) 垂足 N_1, N_2, N_3 共线的充分必要条件是: P 点落在三角形 $P_1P_2P_3$ 的外接圆上 (图 8.1.3).

证明 (1) P 点落在三角形 $P_1P_2P_3$ 的外接圆的内部 $\Leftrightarrow 0 \leqslant r < R$

$$\Leftrightarrow \frac{D_{N_1N_2N_3}}{D_{P_1P_2P_3}} = \frac{R^2 - r^2}{4R^2} > 0 \Leftrightarrow D_{N_1N_2N_3}\text{与}D_{P_1P_2P_3}\text{同号}.$$

(2) 与 (1) 证明类似.

(3) N_1, N_2, N_3 共线 $\Leftrightarrow S_{N_1N_2N_3} = 0 \Leftrightarrow R = r \Leftrightarrow P$ 点落在三角形 $P_1P_2P_3$ 的外接圆上.

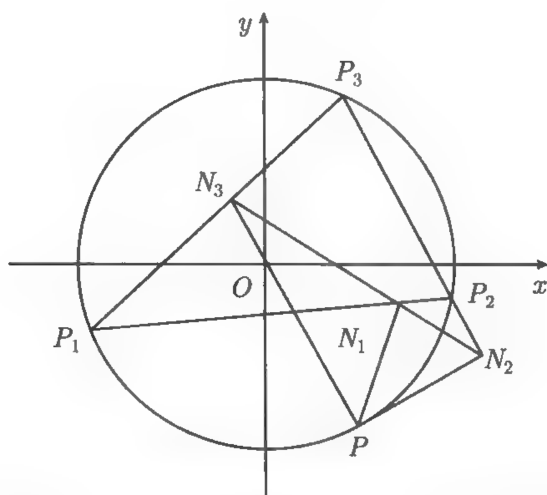


图 8.1.3 三角形外接圆上一点的三垂足共线

注 8.1.2 定理 8.1.5(3) 即著名的Simson 定理.

定理 8.1.6 设 $\odot C(R)$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 的外接圆, $\odot C(r_1), \odot C(r_2)$ $(r_1, r_2 \neq R)$ 在 $\odot C(\sqrt{2}R)$ 内, 则三角形 $P_1P_2P_3$ 关于 $\odot C(r_1)$ 上任意一点的垂足三角形的面积等于三角形 $P_1P_2P_3$ 关于 $\odot C(r_2)$ 上任意一点的垂足三角形的面积充分必要条件是 $r_1^2 + r_2^2 = 2R^2$.

证明 不妨设 $r_1 < R < r_2$, 三角形 $P_1P_2P_3$ 关于 $\odot C(r_1), \odot C(r_2)$ $(r_1, r_2 \neq R)$ 上任意一点的垂足三角形的面积分别为 S_1, S_2. 于是

$$r_1^2 + r_2^2 = 2R^2 \Leftrightarrow 0 < r_2^2 - R^2 = R^2 - r_1^2 \Leftrightarrow \frac{r_2^2 - R^2}{4R^2} = \frac{R^2 - r_1^2}{4R^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_2}{S_{P_1P_2P_3}} = \frac{S_1}{S_{P_1P_2P_3}} \Leftrightarrow S_1 = S_2.$$

注 8.1.3 当 $r_1 = 0, r_2 = \sqrt{2}r$ 时上述结论亦成立.

定理 8.1.7 设 $\odot C(R)$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 的外接圆, 三角形 $P_1P_2P_3$ 关于垂点 P 的垂足三角形为 $N_1N_2N_3$, 则

(1) P 在 $\odot C(\sqrt{4n+1}R)$ $(n \in N)$ 上的充分必要条件是

$$S_{N_1N_2N_3} = nS_{P_1P_2P_3};$$

(2) P 在 $\odot C(\sqrt{4n-3}R)$ 与 $\odot C(\sqrt{4n+1}R)$ $(n \in N)$ 间的环形开区域内的充分必要条件是

$$(n-1)S_{P_1P_2P_3} < S_{N_1N_2N_3} < nS_{P_1P_2P_3}.$$

证明　设 $|CP| = r$.

(1) P 在 $\odot C(\sqrt{4n+1}R)$ $(n \in N)$ 上 $\Leftrightarrow r = \sqrt{4n+1}R \Leftrightarrow r^2 = (4n+1)R^2$

$$\Leftrightarrow r^2 - R^2 = 4nR^2 \Leftrightarrow \frac{r^2-R^2}{4R^2} = n \Leftrightarrow \frac{S_{N_1N_2N_3}}{S_{P_1P_2P_3}} = n \Leftrightarrow S_{N_1N_2N_3} = nS_{P_1P_2P_3}.$$

(2) P 在 $\odot C(\sqrt{4n-3}R)$ 与 $\odot C(\sqrt{4n+1}R)$ $(n \in N)$ 间的环形开区域内

$$\Leftrightarrow \sqrt{4n-3}R < r < \sqrt{4n+1}R \Leftrightarrow (4n-3)R^2 < r^2 < (4n+1)R^2$$

$$\Leftrightarrow 4(n-1)R^2 < r^2 - R^2 < 4nR^2 \Leftrightarrow n-1 < \frac{r^2-R^2}{4R^2} < n$$

$$\Leftrightarrow n-1 < \frac{S_{N_1N_2N_3}}{S_{P_1P_2P_3}} < n \Leftrightarrow (n-1)S_{P_1P_2P_3} < S_{N_1N_2N_3} < nS_{P_1P_2P_3}.$$

定理 8.1.8　设是 $P_1P_2P_3$ 和 $Q_1Q_2Q_3$ 是 $\odot C(R)$ 的两个内接三角形, 三角形 $P_1P_2P_3$ 和 $Q_1Q_2Q_3$ 关于 $\odot C(r)$ 任一点 P 的垂足三角形分别为三角形 $M_1M_2M_3$ 和 $N_1N_2N_3$, 则

$$S_{P_1P_2P_3} \cdot S_{N_1N_2N_3} = S_{Q_1Q_2Q_3} \cdot S_{M_1M_2M_3}. \tag{8.1.7}$$

证明　若 $r = R$, 根据定理 8.1.5(3) 得 $S_{M_1M_2M_3} = S_{N_1N_2N_3} = 0$, 式 (8.1.7) 显然成立.

若 $r \neq R$, 根据式 (8.1.5) 得

$$S_{M_1M_2M_3} = \frac{|R^2-r^2|}{4R^2}S_{P_1P_2P_3},$$

$$S_{N_1N_2N_3} = \frac{|R^2-r^2|}{4R^2}S_{Q_1Q_2Q_3},$$

两式相除并化简, 即得式 (8.1.7).

注 8.1.4　在定理 8.1.1 中, 作 PN_i 的定比分点 H 使 $PN_i/N_iH_i = 1/\lambda(i = 1,2,3)$, 则由三角形 $H_1H_2H_3$ 相似于三角形 $N_1N_2N_3$, 可得

$$D_{H_1H_2H_3} = \frac{1}{8}(1+\lambda)^2(R^2-r^2)\sum_{i=1}^{3}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i).$$

因此, 对三角形 $H_1H_2H_3$ 可以得到定理 8.1.2~ 定理 8.1.8 类似的结论.

定理 8.1.9 设 P 是三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, 三角形 $P_1P_2P_3$ 关于 P 点的垂足三角形为 $N_1N_2N_3$, 则

$$\sum_{i=1}^{3}(d^2_{P_iN_i}-d^2_{N_iP_{i+1}})=0. \tag{8.1.8}$$

证明 不妨设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(R\cos\theta_i, R\sin\theta_i)(i=1,2,3)$, P 点的坐标为 $P(r\cos,\theta, r\sin\theta)$, 根据定理 8.1.1 证明可得垂足 $N_i(x_i,y_i)$ 的坐标

$$\begin{cases} x_i=\dfrac{1}{2}R(\cos\theta_i+\cos\theta_{i+1})+\dfrac{1}{2}r[\cos\theta-\cos(\theta-\theta_i-\theta_{i+1})], \\ y_i=\dfrac{1}{2}R(\sin\theta_i+\sin\theta_{i+1})+\dfrac{1}{2}r[\sin\theta+\sin(\theta-\theta_i-\theta_{i+1})] \end{cases} \quad (i=1,2,3).$$

所以

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}(d^2_{P_iN_i}-d^2_{N_iP_{i+1}}) =& \sum_{i=1}^{3}[(R\cos\theta_i-x_i)^2+(R\sin\theta_i-y_i)^2] \\
&-\sum_{i=1}^{3}[(R\cos\theta_{i+1}-x_i)^2+(R\sin\theta_{i+1}-y_i)^2] \\
=&2R\sum_{i=1}^{3}[(\cos\theta_{i+1}-\cos\theta_i)x_i+(\sin\theta_{i+1}-\sin\theta_i)y_i] \\
=&R^2\sum_{i=1}^{3}[(\cos\theta_{i+1}-\cos\theta_i)(\cos\theta_{i+1}+\cos\theta_i) \\
&+(\sin\theta_{i+1}-\sin\theta_i)(\sin\theta_{i+1}+\sin\theta_i)] \\
&+Rr\sum_{i=1}^{3}\{(\cos\theta_{i+1}-\cos\theta_i)[\cos\theta-\cos(\theta-\theta_i-\theta_{i+1})] \\
&+(\sin\theta_{i+1}-\cos\theta_i)[\sin\theta+\sin(\theta-\theta_i-\theta_{i+1})]\} \\
=&R^2\sum_{i=1}^{3}[(\cos^2\theta_{i+1}-\cos^2\theta_i)+(\sin^2\theta_{i+1}-\sin^2\theta_i)] \\
&+Rr\sum_{i=1}^{3}[\cos(\theta_{i+1}-\theta)-\cos(\theta_i-\theta)-\cos(\theta-\theta_i)+\cos(\theta-\theta_{i+1})] \\
=&0,
\end{aligned}$$

从而式 (8.1.8) 成立.

定理 8.1.10(三角形的共点线定理) 设 N_i 是三角形 $P_1P_2P_3$ 边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 上的点, 则过 N_i 垂直于 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 的三条垂线共点的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{3}(d^2_{P_iN_i}-d^2_{N_iP_{i+1}})=0. \tag{8.1.9}$$

证明 必要性. 即定理 8.1.9 中三垂足分别在三角形 $P_1P_2P_3$ 三边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 上的情形.

充分性. 如图 8.1.4 所示. 分别过 N_1, N_2 作所在边的垂线, 设它们的交点为 O. 再作 $ON\perp P_3P_1$ 于 N, 则由必要性知

$$d^2_{P_1N_1}-d^2_{N_1P_2}+d^2_{P_2N_2}-d^2_{N_2P_3}+d^2_{P_3N}-d^2_{NP_1}=0, \tag{8.1.10}$$

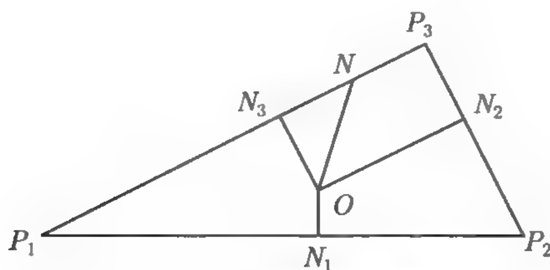


图 8.1.4 三角形的共点线定理

又已知式 (8.1.8) 成立, 于是式 (8.1.10)− 式 (8.1.9) 得

$$D^2_{P_3N}-D^2_{NP_1}=D^2_{P_3N_3}-D^2_{N_3P_1},$$

即

$$(D_{P_3N}+D_{NP_1})(D_{P_3N}-D_{NP_1})=(D_{P_3N_3}+D_{N_3P_1})(D_{P_3N_3}-D_{N_3P_1}).$$

由于 $D_{P_3N}+D_{NP_1}=D_{P_3N_3}+D_{N_3P_1}=D_{P_3P_1}$, 所以

$$D_{P_3N}-D_{NP_1}=D_{P_3N_3}-D_{N_3P_1},$$

设 P_3P_1 的中点为 M, 则

$$D_{P_3N}-D_{NP_1}=2D_{MN},\quad D_{P_3N_3}-D_{N_3P_1}=2D_{MN_1},$$

所以 $D_{MN}=D_{MN_1}$, 故 N 与 N_1 重合. 从而过 N_i 垂直于 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 的三条垂线共点.

8.2 垂足多边形有向面积公式及其应用

在 8.1 节中, 我们介绍了垂足三角形的有向面积公式及其应用, 本节将把三角形的垂足三角形的概念推广到多边形上去, 给出垂足多边形有向面积公式, 并讨论公式的一些应用.

8.2.1 垂足多边形有向面积公式

定义 8.2.1 设 P 是多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在平面上任意一点, 过 P 向 $P_1P_2,\cdots,P_{n-1}P_n,P_nP_1$ 所在直线引垂线 $PN_1,\cdots,PN_{n-1},PN_n$, 垂足为 $N_1,\cdots,N_{n-1},N_n$. 如果 $N_1,\cdots,N_{n-1},N_n$ 依次构成一个 (简单) 多边形, 则 $N_1\cdots N_{n-1}N_n$ 为 $P_1P_2\cdots P_n$ 关于垂点 P 的垂足多边形.

为方便起见, 当 $N_1,\cdots,N_{n-1},N_n$ 中有连续三点或三点以上共线时, 我们把 $N_1,\cdots,N_{n-1},N_n$ 依次构成的图形看成是垂足多边形的特殊情形.

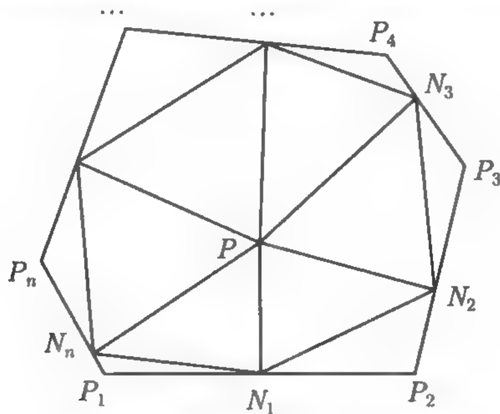


图 8.2.1 多边形的垂足多边形

显然, 过任意多边形所在平面上一点, 未必可以作多边形关于这点的垂足多边形. 但过不落在三边形所在平面上且不在其外接圆上任意一点可以作三角形关于这点的垂足三角形; 过凸多边形内任意一点可以作多边形关于这点的垂足多边形; 过圆内接多边形外接圆内任意一点可以作多边形关于这点的垂足多边形. 在特殊情形下, 还可以包含以上区域的边界.

定义 8.2.2 设 $N_1\cdots N_{n-1}N_n$ 是多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 关于垂点 P 的垂足多边形. 如果多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 和多边形 $N_1\cdots N_{n-1}N_n$ 的绕向都是逆时针方向或顺时针方向的, 则称多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 和 $N_1\cdots N_{n-1}N_n$ 是同向的, 否则称为反向的.

定理 8.2.1 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是 $\odot C(R)$ 的内接多边形, 圆心的坐标为 $C(a,b)$, 多边形顶点的坐标为 $P_i(a+R\cos\theta_i,b+R\sin\theta_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 关于垂点 $P(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)$ $(r\leqslant R)$ 的垂足多边形 $N_1N_2\cdots N_n$ 的有向面积

$$\begin{aligned}D_{N_1N_2\cdots N_n}=&\frac{1}{8}(R^2+r^2)\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_{i+2}-\theta_i)+\frac{1}{4}R^2\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)\\&+\frac{1}{4}Rr\sum_{i=1}^{n}\cos(\theta-\theta_{i+1})\sin(\theta_i-\theta_{i+2}),\end{aligned}\tag{8.2.1}$$

其中 $\theta_{n+i}=\theta_i$, 以下类同.

证明　只需证明 C 为坐标原点时式 (8.2.1) 成立. 当 $a=b=0$ 时, 由 P_iP_{i+1} 所在直线的方程

$$\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\cdot x+\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\cdot y=R\cos\frac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}$$

和 PN_i 的直线方程为

$$\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\cdot x-\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\cdot y=-r\sin\left(\theta-\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}\right)$$

求得垂足 $N_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的坐标

$$\begin{cases}x_i=\dfrac{1}{2}R(\cos\theta_i+\cos\theta_{i+1})+\dfrac{1}{2}r[\cos\theta-\cos(\theta-\theta_i-\theta_{i+1}),\\ y_i=\dfrac{1}{2}R(\sin\theta_i+\sin\theta_{i+1})+\dfrac{1}{2}r[\sin\theta+\sin(\theta-\theta_i-\theta_{i+1})\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

所以

$$\begin{aligned}&D_{N_1N_2\cdots N_n}\\=&\frac{1}{8}R^2\sum_{i=1}^{n}[(\cos\theta_i+\cos\theta_{i+1})(\sin\theta_{i+1}+\sin\theta_{i+2})\\&-(\sin\theta_i+\sin\theta_{i+1})(\cos\theta_{i+1}+\cos\theta_{i+2})]\\&+\frac{1}{8}r^2\sum_{i=1}^{n}\{[\cos\theta-\cos(\theta-\theta_i-\theta_{i+1})][\sin\theta+\sin(\theta-\theta_2-\theta_3)]\\&-[\cos\theta-\cos(\theta-\theta_{i+1}-\theta_{i+2})][\sin\theta+\sin(\theta-\theta_i-\theta_{i+1})]\}\\&+\frac{1}{8}Rr\sum_{i=1}^{n}\{(\cos\theta_i+\cos\theta_{i+1})[\sin\theta+\sin(\theta-\theta_2-\theta_3)]\\&+(\sin\theta_{i+1}+\sin\theta_{i+2})[\cos\theta-\cos(\theta+\theta_{i+1}-\theta_{i+2})]\\&-(\cos\theta_{i+1}+\cos\theta_{i+2})[\sin\theta+\sin(\theta-\theta_i-\theta_{i+1})]\\&-(\sin\theta_i+\sin\theta_{i+1})[\cos(\theta-\theta_{i+1}-\theta_{i+2})]\}\\=&\frac{1}{8}R^2\sum_{i=1}^{n}[\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)+\sin(\theta_{i+2}-\sin\theta_{i+1})+\sin(\theta_{i+2}-\sin\theta_i)]\\&+\frac{1}{8}r^2\sum_{i=1}^{n}[\sin(2\theta-\theta_{i+1}-\theta_{i+2})-\sin(2\theta-\theta_i-\theta_{i+1})-\sin(\theta_{i+2}-\theta_i)]\\&+\frac{1}{8}Rr\sum_{i=1}^{n}[\sin(\theta+\theta_i-\theta_{i+1}-\theta_{i+2})-\sin(\theta+\theta_{i+2}-\theta_i-\theta_{i+1})]\\=&\frac{1}{8}(R^2+r^2)\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_{i+2}-\theta_i)+\frac{1}{4}R^2\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}Rr\sum_{i=1}^{n}\cos(\theta-\theta_{i+1})\sin(\theta_i-\theta_{i+2}).$$

特别, 当 $n=3$ 时, 即得定理 8.1.1 在三角形外接圆所围成的区域上的情形. 因此, 定理 8.2.1 只是定理 8.1.1 在部分情形下的推广.

推论 8.2.1 设 $P_1P_2P_3P_4$ 是 $\odot C(R)$ 的内接四边形, 圆心的坐标为 $C(a,b)$, 四边形顶点的坐标为 $P_i(a+R\cos\theta_i,b+R\sin\theta_i)$ $(i=1,2,3,4)$, 则 $P_1P_2P_3P_4$ 关于垂点 $P(a+r\cos\theta,\ b+r\sin\theta)$ $(r\leqslant R)$ 的垂足四边形 $N_1N_2N_3N_4$ 的有向面积

$$D_{N_1N_2N_3N_4}=\frac{1}{4}R^2\sum_{i=1}^{4}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)+\frac{1}{4}Rr\sum_{i=1}^{4}\cos(\theta-\theta_{i+1})\sin(\theta_i-\theta_{i+2}).\quad(8.2.2)$$

证明 由于

$$\sum_{i=1}^{4}\sin(\theta_{i+2}-\theta_i)=\sin(\theta_3-\theta_1)+\sin(\theta_4-\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_3)+\sin(\theta_2-\theta_4)=0,$$

因此式 (8.2.2) 成立.

推论 8.2.2 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是 $\odot C(R)$ 的内接多边形, 圆心的坐标为 $C(a,b)$, 多边形顶点的坐标为 $P_i(a+R\cos\theta_i,b+R\sin\theta_i)(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $P_1P_2\cdots P_n$ 关于圆心 $C(a,b)$ 的垂足多边形 $N_1N_2\cdots N_n$ 的有向面积

$$\begin{aligned}D_{N_1N_2\cdots N_n}=&\frac{1}{8}R^2\sum_{i=1}^{n}[2\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)+\sin(\theta_{i+2}-\theta_i)]\\=&\frac{1}{2}R^2\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\theta_{i+2}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}.\end{aligned}$$

证明 在式 (8.2.1) 中令 $r=0$, 得

$$\begin{aligned}D_{N_1N_2\cdots N_n}=&\frac{1}{8}R^2\sum_{i=1}^{n}[\sin(\theta_{i+2}-\theta_i)+\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)]+\frac{1}{8}R^2\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)\\=&\frac{1}{4}R^2\left[\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}-\theta_i\right)\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_{i+2}}{2}\right.\\&\left.+\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\right]\\=&\frac{1}{4}R^2\sum_{i=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{\theta_{i+2}+\theta_{i+1}}{2}-\theta_i\right)+\sin\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}\right]\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_{i+2}}{2}\\=&\frac{1}{2}R^2\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\theta_{i+2}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+2}-\theta_{i+1}}{2}.\end{aligned}$$

8.2.2 垂足多边形有向面积公式的应用

定理 8.2.2 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是 $\odot C(R)$ 的内接多边形, 则 $P_1P_2\cdots P_n$ 关于 $\odot C(r)$ 的任意一条直径 PP' 的端点 PP' 的两个垂足多边形 $N_1N_2\cdots N_n(M_1M_2\cdots M_n)$ 的面积的和恒为定值, 即

$$S_{M_1M_2\cdots M_n}+S_{N_1N_2\cdots N_n}=\frac{1}{4}\left|(R^2+r^2)\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_{i+2}-\theta_i)+2R^2\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)\right|. \tag{8.2.3}$$

证明 如图 8.2.2 所示. 不妨设圆内接多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 顶点及圆心 C 的坐标均如定理 8.2.1, $\odot C(r)$ 任意一条直径 PP' 两端点的坐标分别为 $P(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta),P'(a+r\cos(\pi+\theta),b+r\sin(\pi+\theta))$. 根据式 (8.2.1) 得

$$\begin{aligned}
&D_{M_1M_2\cdots M_n}\\
=&\frac{1}{8}(R^2+r^2)\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_{i+2}-\theta_i)+\frac{1}{4}R^2\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)\\
&+\frac{1}{4}Rr\sum_{i=1}^{n}\cos(\theta+\pi-\theta_{i+1})\sin(\theta_i-\theta_{i+2})\\
=&\frac{1}{8}(R^2+r^2)\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_{i+2}-\theta_i)+\frac{1}{4}r^2\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)\\
&-\frac{1}{4}Rr\sum_{i=1}^{n}\cos(\theta-\theta_{i+1})\sin(\theta_i-\theta_{i+2})
\end{aligned}\tag{8.2.4}$$

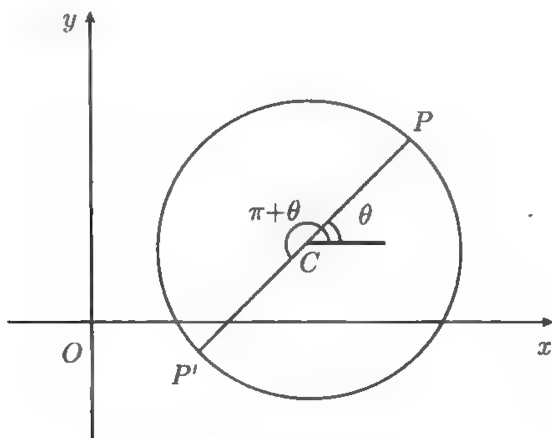


图 8.2.2 圆的直径

式 (8.2.1)+(8.2.4) 得

$$D_{M_1M_2\cdots M_n}+D_{N_1N_2\cdots N_n}=\frac{1}{4}[(R^2+r^2)\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_{i+2}-\theta_i)+2R^2\sum_{i=1}^{n}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)].$$

显然, 当多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正 (反) 向多边形时, 垂足多边形 $M_1M_2\cdots M_n$, $N_1N_2\cdots N_n$ 都是正 (反) 向的, 故上式两边取绝对值即得式 (8.2.3).

推论 8.2.3 设 $P_1P_2P_3P_4$ 是 $\odot C(R)$ 的内接多边形, 则 $P_1P_2P_3P_4$ 关于 $\odot C(r)$ 的任意一条直径 PP' 的端点 PP' 的两个垂足四边形 $N_1N_2N_3N_4(M_1M_2M_3M_4)$ 的面积的和恒等于四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的面积, 即

$$S_{M_1M_2M_3M_4}+S_{N_1N_2N_3N_4}=S_{P_1P_2P_3P_4}. \tag{8.2.5}$$

证明 在式 (8.2.3) 中令 $n=4$, 根据四边形, 由 (有向) 面积公式即得式 (8.2.5).

定理 8.2.3 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是 $\odot C(R)$ 的内接正多边形, 则 $P_1P_2\cdots P_n$ 关于 $\odot C(r)(r\leqslant R)$ 上任意一点 P 的垂足多边形 $N_1N_2\cdots N_n$ 的面积恒为定值, 即

$$S_{N_1N_2\cdots N_n}=\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{n}\left[(R^2+r^2)\cos\frac{2\pi}{n}+r^2\right] \tag{8.2.6}$$

证明 令 $\theta_{i+1}-\theta_i=\alpha$, 则 $\theta_i=\theta_1+(i-1)\alpha\ (i=1,2,\cdots,n)$, $n\alpha=\pm2\pi$. 由于

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[\sin(\theta+\theta_i-\theta_{i+1}-\theta_{i+2})-\sin(\theta+\theta_{i+2}-\theta_i-\theta_{i+1})]\\
=&\sum_{i=1}^{n}\sin[\theta-\theta_1-(i+2)\alpha]-\sum_{i=1}^{n}\sin[\theta-\theta_1-(i-2)\alpha]\\
=&\sum_{i=n-3}^{n}\sin[\theta-\theta_1-(i+2)\alpha]-\sum_{i=1}^{4}\sin[\theta-\theta_1-(i-2)\alpha]\\
=&\sin[\theta-\theta_1-(n-1)\alpha]+\sin(\theta-\theta_1-n\alpha)\\
&+\sin[\theta-\theta_1-(n+1)\alpha]+\sin[\theta-\theta_1-(n+2)\alpha]\\
&-\sin(\theta-\theta_1+\alpha)-\sin(\theta-\theta_1)-\sin(\theta-\theta_1-\alpha)-\sin(\theta-\theta_1-2\alpha)\\
=&\sin(\theta-\theta_1\pm2\pi+\alpha)+\sin(\theta-\theta_1\pm2\pi)\\
&+\sin(\theta-\theta_1\pm2\pi-\alpha)+\sin(\theta-\theta_1\pm2\pi-2\alpha)\\
&-\sin(\theta-\theta_1+\alpha)-\sin(\theta-\theta_1)-\sin(\theta-\theta_1-\alpha)-\sin(\theta-\theta_1-2\alpha)\\
=&0.
\end{aligned}$$

于是, 根据定理 8.2.1 得

$$\begin{aligned}
D_{N_1N_2\cdots N_n}=&\frac{1}{8}(R^2+r^2)\sum_{i=1}^{n}\sin2\alpha+\frac{1}{4}R^2\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha\\
=&\frac{1}{4}n\sin\alpha[(R^2+r^2)\cos\alpha+R^2]\\
=&\pm\frac{1}{4}n\sin\frac{2\pi}{n}\left[(R^2+r^2)\cos\frac{2\pi}{n}+R^2\right].
\end{aligned}$$

上式两边取绝对值即得式 (8.2.6).

定理 8.2.4　设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是 $\odot C(R)$ 的内接多边形, P 是 $\odot C(R)$ 或 $\odot C(R)$ 内任意一点, $P_1P_2\cdots P_n$ 关于 P 点的垂足多边形为 $N_1N_2\cdots N_n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}(d^2_{P_iN_i}-d^2_{N_iP_{i+1}})=0. \tag{8.2.7}$$

证明　在定理 8.1.9 的证明中将 P 点限制在 $\odot C(R)$ 上或 $\odot C(R)$ 内任意一点, 注意到其中各式都可以推广到 n 的情形, 即得.

8.3　完全四边形的垂足四边形有向面积的定值定理及其应用

三角形的 Simson 线定理, 说的是三角形外接圆上一点到三角形各边的垂足共线. 完全四边形是由两两相交的四条直线所构成的图形, 因此一个完全四边形中有四个不同的三角形, 而每个三角形又有一个外接圆. 如果这四个圆相交于一点, 那么这点到完全四边形各边的四个垂足就应该共线, 这就是完全四边形的 Simson 线定理.

本节用有向面积的方法来探讨有关的问题, 首先给出完全四边形的垂足四边形的概念, 再给出垂足四边形有向面积的定值定理, 从而推出著名的完全四边形的 Simson 线定理.

8.3.1　完全四边形的垂足四边形的概念

定义 8.3.1　自完全四边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 所在平面上一点 P 向各边 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 引垂线, 垂足分别为 N_1, N_2, N_3, N_4, 则称由这四点所构成的四边形为该完全四边形关于 P 点的垂足四边形, 简称为完全四边形的垂足四边形 (图 8.3.1).

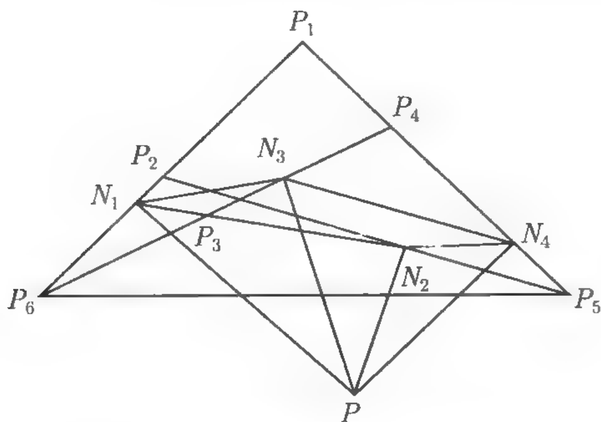


图 8.3.1　完全四边形的垂足四边形

特别, 当 N_1, N_2, N_3, N_4 共线时, 我们把这四点构成的线段看成是完全四边形的垂足四边形的特殊情形.

引理 8.3.1 完全四边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 的垂足四边形必为如下 6 种情况之二、之四或之六:

$$N_1N_2N_3N_4,\quad N_1N_2N_4N_3,\quad N_1N_3N_2N_4,$$

$$N_1N_3N_4N_2,\quad N_1N_4N_3N_2,\quad N_1N_4N_2N_3.$$

证明 如图 8.3.2~ 图 8.3.4 所示. 四垂足 N_1, N_2, N_3, N_4 首尾相连排列成一个封闭的图形, 有 $(4-1)! = 3! = 6$ 种情形:

$$N_1N_2N_3N_4,\quad N_1N_2N_4N_3,\quad N_1N_3N_2N_4,$$

$$N_1N_3N_4N_2,\quad N_1N_4N_3N_2,\quad N_1N_4N_2N_3,$$

其中有 1 对、2 对或 3 对情形为边不自交的四边形 (每对中一个为正向四边形, 另一个为反向四边形).

因此, 如上所定义的完全四边形的垂足四边形不是唯一的, 在不考虑绕向的情况下, 至少有一个, 至多有三个.

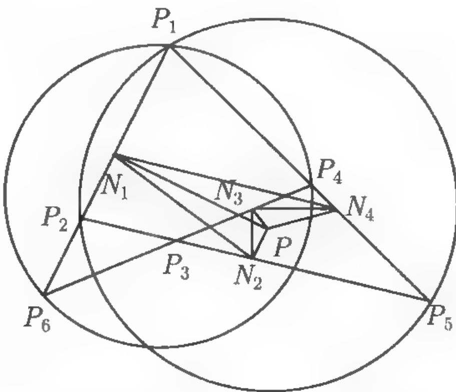


图 8.3.2 完全四边形的垂足四边形之一

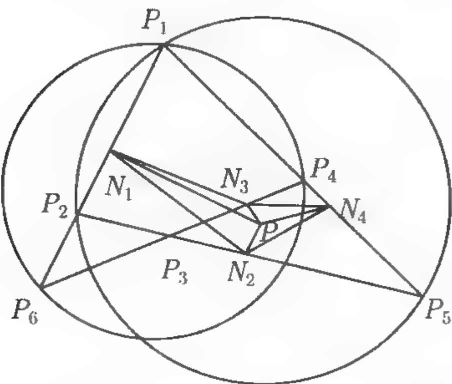


图 8.3.3 完全四边形的垂足四边形之二

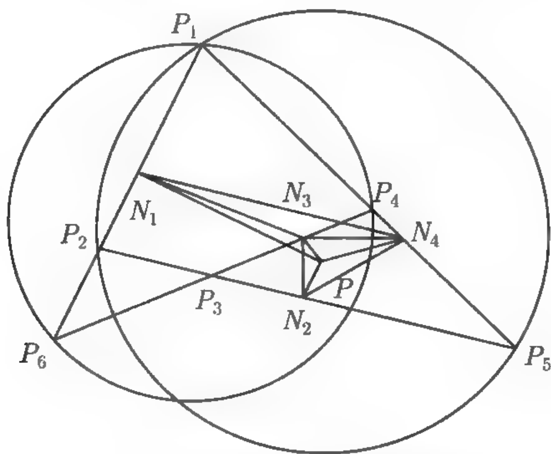


图 8.3.4　完全四边形的垂足四边形之三

8.3.2　垂足四边形有向面积的定值定理及其应用

定理 8.3.1　设 P 是完全四边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 所在平面上任意一点, 三角形 $P_1P_2P_5, P_1P_4P_6$, $P_2P_3P_6, P_3P_4P_5$ 的外接圆的半径分别为 R_1, R_2, R_3, R_4, P 到三角形 $P_1P_2P_5, P_1P_4P_6, P_2P_3P_6, P_3P_4P_5$ 圆心的距离分别为 r_1, r_2, r_3, r_4, P 到各边 $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$ 的射影分别为 N_1, N_2, N_3, N_4. 则在如下 3 个定值结论中, 至少有一个成立:

$$\begin{aligned} D_{N_1N_2N_3N_4} &= -D_{N_1N_4N_3N_2} \\ &= \frac{R_1^2-r_1^2}{4R_1^2}D_{P_1P_2P_5}+\frac{R_4^2-R_4^2}{4R_4^2}D_{P_3P_4P_5} \\ &= \frac{R_3^2-r_3^2}{4R_3^2}D_{P_2P_3P_6}+\frac{R_2^2-r_2^2}{4R_2^2}D_{P_1P_4P_6} \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

或

$$\begin{aligned} D_{N_1N_2N_4N_3} &= -D_{N_1N_3N_4N_2} \\ &= \frac{R_1^2-r_1^2}{4R_1^2}D_{P_1P_2P_5}+\frac{R_2^2-r_2^2}{4R_1^2}D_{P_1P_4P_6} \\ &= \frac{R_3^2-r_3^2}{4R_3^2}D_{P_2P_3P_6}+\frac{R_4^2-r_4^2}{4R_4^2}D_{P_3P_5P_4} \end{aligned} \tag{8.3.2}$$

或

$$\begin{aligned} D_{N_1N_3N_2N_4} &= -D_{N_1N_4N_2N_3} \\ &= \frac{R_1^2-r_1^2}{4R_1^2}D_{P_1P_2P_3}+\frac{R_3^2-r_3^2}{4R_3^2}D_{P_2P_6P_3} \\ &= \frac{R_2^2-r_2^2}{4R_2^2}D_{P_1P_6P_4}+\frac{R_4^2-r_4^2}{4R_4^2}D_{P_3P_5P_4}. \end{aligned} \tag{8.3.3}$$

证明　如图 8.3.5 所示. 若 N_1, N_2, N_3, N_4 构成的四边形为 $N_1N_2N_3N_4$. 由有向面积的可加性及定理 8.1.3 得

$$D_{N_1N_2N_3N_4} = D_{N_1N_2N_4} + D_{N_2N_3N_4} = \frac{R_1^2 - r_1^2}{4R_1^2} D_{P_1P_2P_5} + \frac{R_4^2 - r_4^2}{4R_4^2} D_{P_3P_4P_5},$$

$$D_{Q_1Q_2Q_3Q_4} = D_{N_1N_2N_3} + D_{N_1N_3N_4} = \frac{R_3^2 - r_3^2}{4R_3^2} D_{P_2P_3P_6} + \frac{R_2^2 - r_2^2}{4R_2^2} D_{P_1P_4P_6},$$

从而式 (8.3.1) 成立.

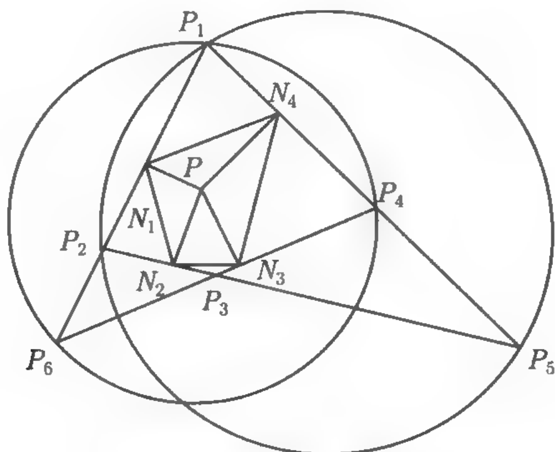


图 8.3.5 完全四边形的垂足四边形 $N_1N_2N_3N_4$

类似地, 可以证明式 (8.3.2) 和 (8.3.3) 成立.

引理 8.3.2 完全四边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 中的四个三角形 $P_1P_2P_5, P_1P_4P_6, P_2P_3P_6, P_3P_4P_5$ 的外接圆相交于一点.

推论 8.3.1 设 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 是完全四边形, P 是三角形 $P_1P_2P_5, P_1P_4P_6, P_2P_3P_6, P_3P_4P_5$ 的外接圆的交点, 则 P 到 $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$ 的射影 N_1, N_2, N_3, N_4 四点共线.

证明 如图 8.3.6 所示. 在式 (8.3.1)~(8.3.3) 中注意到

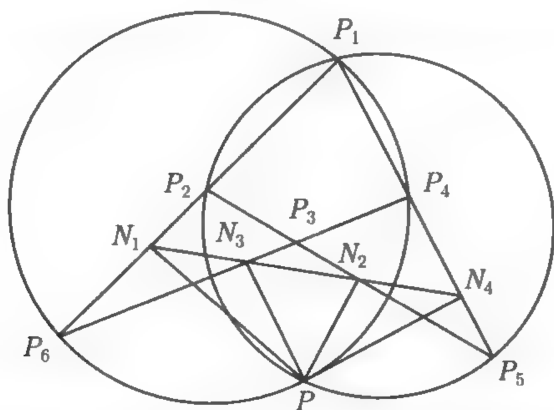


图 8.3.6 完全四边形中三角形外接圆的交点到各边的射影相交于一点

$$R_1 = r_1, \quad R_2 = r_2, \quad R_3 = r_3, \quad R_4 = r_4$$

即得.

注 8.3.1　推论 8.3.1 中 N_1, N_2, N_3, N_4 四点所在的直线称为完全四边形的 Simson 线.

注 8.3.2　推论 8.3.1 也可以用定理 8.1.5(3) 证明: 因为 P 在三角形 $P_2P_3P_6$ 的外接圆上, 故 N_1, N_2, N_3 三点共线, 又 P 在三角形 $P_1P_2P_5$ 的外接圆上, 故 N_1, N_2, N_4 三点共线, 所以 N_1, N_2, N_3, N_4 四点共线.

第 9 章　线型三角形有向面积公式及其应用

9.1　线型三角形有向面积公式及其应用

在 4.1 节中，给出了关于三角形三个顶点坐标的有向面积公式. 现在的问题是，给定三角形三边所在直线的方程，如何直接求出三角形的有向面积呢？这就是本节要讨论的问题. 首先给出三直线组一、二阶行列式的概念，以及一、二阶行列式的两个性质定理；其次给出线形三角形有向面积公式及其推论；最后利用线型三角形有向面积公式讨论一些具体的问题，得出相应的线形三角形的有向面积，从而把几个数学竞赛题推广到更一般的情形.

9.1.1　三直线组一、二阶行列式的概念与性质

定义 9.1.1　设 $l_i: a_ix+b_iy+c_i=0\,(i=1,2,3)$ 为任意三条平面直线，则称

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} b_1c_2-b_2c_1 & c_1a_2-c_2a_1 & a_1b_2-a_2b_1 \\ b_2c_3-b_3c_2 & c_2a_3-c_3a_2 & a_2b_3-a_3b_2 \\ b_3c_1-b_1c_3 & c_3a_1-c_1a_3 & a_3b_1-a_1b_3 \end{vmatrix},$$

分别为三直线 l_1,l_2,l_3 的一、二级行列式.

定义 9.1.2　依次经过两点 $P_i(x_i,y_i),P_j(x_j,y_j)(i\neq j)$ 的如下形式的直线方程

$$(y_i-y_j)x+(x_j-x_i)y+(x_iy_j-x_jy_i)=0 \tag{9.1.1}$$

叫做直线 P_iP_j 的两点式标准方程.

显然，直线的两点式标准方程不仅可以由直线的两点式方程 $\dfrac{x-x_i}{x_j-x_i}=\dfrac{y-y_i}{y_j-y_i}$ 化得，还与两点 $P_i(x_i,y_i),P_j(x_j,y_j)(i\neq j)$ 的顺序有关. 给定两点的直线的两点式标准方程是唯一的，但直线的两点式标准方程与两点的次序有关.

定义 9.1.3　设 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 为 n 条直线，l_i 与 l_{i+1} 的交点为 $P_i(i=1,2,\cdots,n;$ $l_{n+1}=l_1)$. 若 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 依次构成 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$，则称该 n 边形为 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 所围成的 n 边形，该多边形及其有向面积分别记为多边形 $l_1l_2\cdots l_n$ 和 $D_{l_1l_2\cdots l_n}$.

显然，任意 n 条两两依次相交的直线未必可以构成一个 n 边形，但 3 条直线两两相交的直线可以构成一个三角形 (三线相交于一点看成是三角形的特殊情形).

定理 9.1.1 设直线 l_i 与 l_{i+1} 的交点为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$, 则三角形 $l_1l_2l_3$ 的面积 (有向面积) 和由交点 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$ 所确定的这三条直线的两点式标准方程的行列式之间的关系是

$$\Delta_1=4D^2_{l_1l_2l_3}. \tag{9.1.2}$$

证明 将行列式的第 2, 3 行加到第 1 行, 并由式 (4.1.2) 得

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} y_1-y_2 & x_2-x_1 & x_1y_2-x_2y_1\\ y_2-y_3 & x_3-x_2 & x_2y_3-x_3y_2\\ y_3-y_1 & x_1-x_3 & x_3y_1-x_1y_3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2D_{P_1P_2P_3}\\ y_2-y_3 & x_3-x_2 & x_2y_3-x_3y_2\\ y_3-y_1 & x_1-x_3 & x_3y_1-x_1y_3\end{vmatrix}$$

$$=2D_{l_1l_2l_3}\begin{vmatrix} y_2-y_3 & x_3-x_2\\ y_3-y_1 & x_1-x_3\end{vmatrix}=2D_{l_1l_2l_3}\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)=4D^2_{l_1l_2l_3},$$

因此式 (9.1.2) 成立.

定理 9.1.2 设 $l_i:a_ix+b_iy+c_i=0\,(i=1,2,3)$ 为任意三条平面直线, 则这三条直线一、二阶行列式满足如下关系:

$$\Delta_2=\Delta_1^2. \tag{9.1.3}$$

证明

$$\begin{aligned}\Delta_2=&\begin{vmatrix} b_1c_2-b_2c_1 & c_1a_2-c_2a_1 & a_1b_2-a_2b_1\\ b_2c_3-b_3c_2 & c_2a_3-c_3a_2 & a_2b_3-a_3b_2\\ b_3c_1-b_1c_3 & c_3a_1-c_1a_3 & a_3b_1-a_1b_3\end{vmatrix}\\
=&\sum_{i=1}^{3}[(a_{i+2}b_i-a_ib_{i+2})(b_ic_{i+1}-b_{i+1}c_i)(c_{i+1}a_{i+2}-c_{i+2}a_{i+1})\\
&-(a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i)(b_{i+2}c_i-b_ic_{i+2})(c_{i+1}a_{i+2}-c_{i+2}a_{i+1})]\\
=&\sum_{i=1}^{3}(a_{i+2}^2b_i^2c_{i+1}^2+a_{i+1}^2b_i^2c_{i+2}^2-2a_{i+2}^2b_ib_{i+1}c_ic_{i+1}-2a_{i+1}a_{i+2}b_i^2c_{i+1}c_{i+2}\\
&-2a_ia_{i+1}b_ib_{i+1}c_{i+2}^2+a_ia_{i+1}b_ib_{i+2}c_{i+1}c_{i+2}+a_{i+1}a_{i+2}b_ib_{i+1}c_ic_{i+1}\\
&+a_ia_{i+2}b_ib_{i+1}c_{i+1}c_{i+2}+a_{i+1}a_{i+2}b_ib_{i+2}c_ic_{i+1})\\
=&a_1^2b_2^2c_3^2+a_2^2b_3^2c_1^2+a_3^2b_1^2c_2^2+a_3^2b_2^2c_1^2+a_2^2b_1^2c_3^2+a_1^2b_3^2c_2^2\\
&+2a_1a_2b_2b_3c_1c_2+2a_1a_3b_1b_2c_2c_3+2a_2a_3b_1b_3c_1c_2\\
&+2a_2a_3b_1b_2c_1c_3+2a_1a_2b_1b_3c_2c_3+2a_1a_3b_2b_3c_1c_2\\
&-2a_1^2b_2b_3c_2c_3-2a_2^2b_1b_3c_1c_3-2a_3^2b_1b_2c_1c_2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2a_2a_3b_1^2c_2c_3-2a_1a_3b_2^2c_1c_3-2a_1a_2b_3^2c_1c_2-2a_2a_3b_2b_3c_1^2\\
&-2a_1a_3b_1b_3c_2^2-2a_1a_2b_1b_2c_3^2,\\
=&(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2)^2=\Delta_1^2,
\end{aligned}
$$

故式 (9.1.3) 成立.

9.1.2 线型三角形有向面积公式

定理 9.1.3 三条两两相交的直线 $l_i: a_ix+b_iy+c_i=0\,(i=1,2,3)$ 所构成的三角形 $l_1l_2l_3$ 的有向面积

$$
D_{l_1l_2l_3}=\frac{\Delta_1^2}{2\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33}}=\frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{3}(a_ib_{i+1}c_{i+2}-a_{i+2}b_{i+1}c_i)\right]^2}{2\prod\limits_{i=1}^{3}(a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i)},\tag{9.1.4}
$$

其中 $\Delta_{i3}=a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i$ 表示 Δ_1 第三列的代数余子式.

证明 直线 l_i 与 l_{i+1} 的交点为 $P_i(x_i,y_i)$ 的坐标为

$$
x_i=\frac{\begin{vmatrix}-c_i & b_i\\ -c_{i+1} & b_{i+1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_i & b_i\\ a_{i+1} & b_{i+1}\end{vmatrix}}=\frac{b_ic_{i+1}-b_{i+1}c_i}{a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i},
$$

$$
y_i=\frac{\begin{vmatrix}a_i & -c_i\\ a_{i+1} & -c_{i+1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_i & b_i\\ a_{i+1} & b_{i+1}\end{vmatrix}}=\frac{c_ia_{i+1}-c_{i+1}a_i}{a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i}(i=1,2,3),
$$

于是

$$
\begin{aligned}
D_{l_1l_2l_3}=&\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} & \dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1} & 1\\ \dfrac{b_2c_3-b_3c_2}{a_2b_3-a_3b_2} & \dfrac{c_2a_3-c_3a_2}{a_2b_3-a_3b_2} & 1\\ \dfrac{b_3c_1-b_1c_3}{a_3b_1-a_1b_3} & \dfrac{c_3a_1-c_1a_3}{a_3b_1-a_1b_3} & 1\end{vmatrix}=\frac{\Delta_2}{2\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33}}\\
=&\frac{\Delta_1^2}{2\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33}}=\frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{3}(a_ib_{i+1}c_{i+2}-a_{i+2}b_{i+1}c_i)\right]^2}{2\prod\limits_{i=1}^{3}(a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i)}.
\end{aligned}
$$

特别, 分别当 $a_1=a_2=a_3=1; b_1=b_2=b_3=1; c_1=c_2=c_3=1$ 时, 即得下面的推论.

推论 9.1.1 三条两两相交的直线方程 $l_i: x+b_iy+c_i=0(i=1,2,3)$ 所构成的三角形 $l_1l_2l_3$ 的有向面积

$$D_{l_1l_2l_3}=\frac{\left[\sum_{i=1}^{3}(b_ic_{i+1}-b_{i+1}c_i)\right]^2}{2\prod_{i=1}^{3}(b_{i+1}-b_i)}. \tag{9.1.5}$$

推论 9.1.2 三条两两相交的直线方程 $l_i: a_ix+y+c_i=0(i=1,2,3)$ 所构成的三角形 $l_1l_2l_3$ 的有向面积

$$D_{l_1l_2l_3}=\frac{\left[\sum_{i=1}^{3}(a_ic_{i+1}-a_{i+1}c_i)\right]^2}{2\prod_{i=1}^{3}(a_{i+1}-a_i)}. \tag{9.1.6}$$

推论 9.1.3 三条两两相交的直线方程 $l_i: a_ix+b_iy+1=0(i=1,2,3)$ 所构成的三角形 $l_1l_2l_3$ 的有向面积

$$D_{l_1l_2l_3}=\frac{\left[\sum_{i=1}^{3}(a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i)\right]^2}{2\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33}}. \tag{9.1.7}$$

9.1.3 线型三角形有向面积公式的应用

定理 9.1.4 设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 的 λ- 等分点三角形, 依次连接 P_1Q_2, P_2Q_3, P_3Q_1 所成的三角形为 $R_1R_2R_3$, 则

$$\frac{S_{R_1R_2R_3}}{S_{P_1P_2P_3}}=\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2+\lambda+1}. \tag{9.1.8}$$

证明 如图 9.1.1 所示. 设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)$, 于是等分点的坐标为 $Q_i\left(\dfrac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda},\dfrac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}\right)(i=1,2,3)$. 故 P_1Q_2, P_2Q_3, P_3Q_1 的直线方程分别为

$$[(1+\lambda)y_1-y_2-\lambda y_3]x+[x_2+\lambda x_3-(1+\lambda)x_1]y+(x_1y_2-x_2y_1)+\lambda(x_1y_3-x_3y_1)=0,$$

$$[(1+\lambda)y_2-y_3-\lambda y_1]x+[x_3+\lambda x_1-(1+\lambda)x_2]y+(x_2y_3-x_3y_2)+\lambda(x_2y_1-x_1y_2)=0,$$

$$[(1+\lambda)y_3-y_1-\lambda y_2]x+[x_1+\lambda x_2-(1+\lambda)x_3]y+(x_3y_1-x_1y_3)+\lambda(x_3y_2-x_2y_3)=0.$$

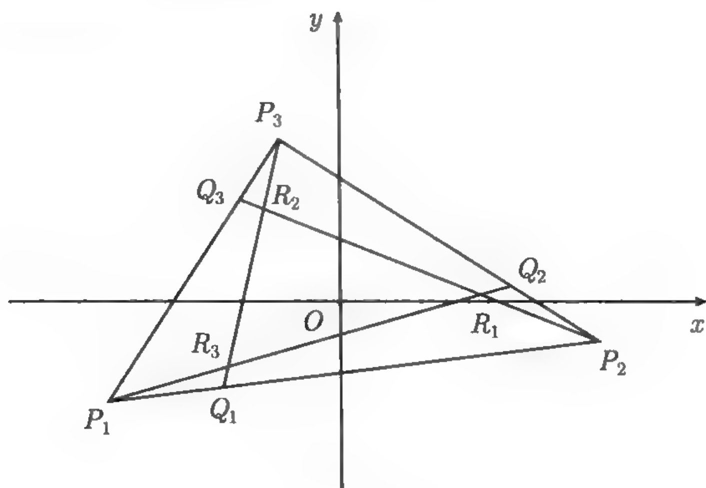


图 9.1.1

于是该直线组一级行列式

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}(1+\lambda)y_1-y_2-\lambda y_3 & x_2+\lambda x_3-(1+\lambda)x_1 & x_1y_2-x_2y_1+\lambda(x_1y_3-x_3y_1)\\(1+\lambda)y_2-y_3-\lambda y_1 & x_3+\lambda x_1-(1+\lambda)x_2 & x_2y_3-x_3y_2+\lambda(x_2y_1-x_1y_2)\\(1+\lambda)y_3-y_1-\lambda y_2 & x_1+\lambda x_2-(1+\lambda)x_3 & x_3y_1-x_1y_3+\lambda(x_3y_2-x_2y_3)\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2+r_3}\begin{vmatrix}0 & 0 & (1-\lambda)\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\\(1+\lambda)y_2-y_3-\lambda y_1 & x_3+\lambda x_1-(1+\lambda)x_2 & x_2y_3-x_3y_2+\lambda(x_2y_1-x_1y_2)\\(1+\lambda)y_3-y_1-\lambda y_2 & x_1+\lambda x_2-(1+\lambda)x_3 & x_3y_1-x_1y_3+\lambda(x_3y_2-x_2y_3)\end{vmatrix}$$

$$=4(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)D^2_{P_1P_2P_3}.$$

又 Δ_1 第三列各元素的代数余子式

$$\Delta_{13}=\begin{vmatrix}(1+\lambda)y_2-y_3-\lambda y_1 & x_3+\lambda x_1-(1+\lambda)x_2\\(1+\lambda)y_3-y_1-\lambda y_2 & x_1+\lambda x_2-(1+\lambda)x_3\end{vmatrix}$$

$$=(1+\lambda+\lambda^2)\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)=2(1+\lambda+\lambda^2)D_{P_1P_2P_3},$$

同理

$$\Delta_{23}=\Delta_{33}=2(1+\lambda+\lambda^2)D_{P_1P_2P_3}.$$

故

$$D_{R_1R_2R_3}=\frac{\Delta_1^2}{2\Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{33}}=\frac{16(1-\lambda)^2(1+\lambda+\lambda^2)^2D^4_{P_1P_2P_3}}{16(1+\lambda+\lambda^2)^3D^3_{P_1P_2P_3}}=\frac{(1-\lambda)^2}{(1+\lambda+\lambda^2)}D_{P_1P_2P_3}$$

从而式 (9.1.8) 成立.

推论 9.1.4 三角形 $P_1P_2P_3$ 的三条中线 P_1Q_2, P_2Q_3, P_3Q_1 相交于一点.

证明　在式 (9.1.8) 中令 $\lambda=1$ 得 $D_{R_1R_2R_3}=0$. 因为 R_1,R_2,R_3 不共线, 故三点必重合, 即得三角形 $P_1P_2P_3$ 的三条中线 P_1Q_2,P_2Q_3,P_3Q_1 相交于一点.

注 9.1.1　由于 $\dfrac{(1-\lambda)^2}{(1+\lambda+\lambda^2)}\geqslant 0$, 故三角形 $P_1P_2P_3$ 与三角形 $R_1R_2R_3$ 是同向三角形.

注 9.1.2　当 λ 为正数时, 定理 9.1.4 为第 23 届美国数学竞赛题; 当 $\lambda>1$ 时, 定理 9.1.4 为1951 年波兰数学奥林匹克竞赛题.

定理 9.1.5　设A,B,C,D 是一条直线上依次排列的四个不同的点, $\odot O_1,\odot O_2$ 分别是以 AC, BD 为直径的两圆. 若 $\odot O_1,\odot O_2$ 相交于点 X 和 Y,M 和 N 分别是 $\odot O_1,\odot O_2$ 上异于 X,Y 的两点, $\angle MO_1D=\alpha,\angle NO_2D=\beta$. 记 $b=d_{AB},c=d_{AC},d=d_{AD}$; 过 X 和 Y,A 和 M,D 和 N,C 和 M,B 和 N 的直线依次为 l_1,l_2,l_3,l_4,l_5, 则

$$D_{l_1l_2l_3}=\frac{d^2\left[b\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}+(d-c)\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\right]^2}{2(c-b-d)^2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}},\tag{9.1.9}$$

$$D_{l_1l_4l_5}=\frac{(b-c)^2\left[b\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}+(d-c)\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\right]^2}{2(c-b-d)^2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}}.\tag{9.1.10}$$

证明　如图 9.1.2 所示. 以 A 为坐标原点, 已知直线为横轴建立坐标系, 直线上各点的坐标为 $A(0,0),B(b,0),C(c,0),D(d,0)$. 于是以 AC,BD 个圆的方程分别为

$$\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2 \text{和} \left(x-\frac{b+d}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{b-d}{2}\right)^2,$$

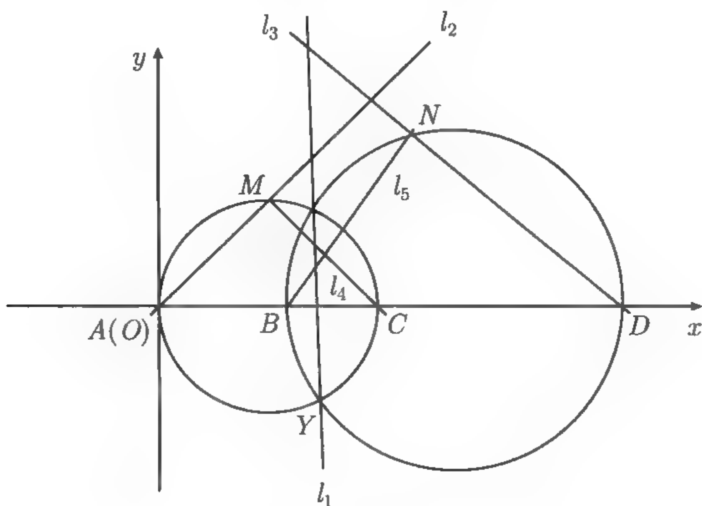


图 9.1.2

两式相减即得 XY 的直线方程

$$l_1:(c-b-d)x+bd=0,$$

又设 M,N 的坐标分别为

$$M\left(\frac{c}{2}(1+\cos\alpha),\frac{c}{2}\sin\alpha\right)\ \text{和}\ N\left(\frac{b+d}{2}+\frac{b-d}{2}\cos\beta,\frac{b-d}{2}\sin\beta\right),$$

即

$$M\left(c\cos^2\frac{\alpha}{2},c\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\ \text{和}\ N\left(b\cos^2\frac{\beta}{2}+d\sin^2\frac{\beta}{2},\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right).$$

从而求得 AM,DN,CM,BN 的直线方程依次为

$$l_2:\sin\frac{\alpha}{2}\cdot x-\cos\frac{\alpha}{2}\cdot y=0,$$
$$l_3:\sin\frac{\beta}{2}\cdot x-\cos\frac{\beta}{2}\cdot y-d\sin\frac{\beta}{2}=0,$$
$$l_4:\cos\frac{\alpha}{2}\cdot x-\sin\frac{\alpha}{2}\cdot y-c\cos\frac{\alpha}{2}=0,$$
$$l_5:\cos\frac{\beta}{2}\cdot x-\sin\frac{\beta}{2}\cdot y-b\cos\frac{\beta}{2}=0.$$

于是三直线 l_1,l_2,l_3 和 l_1,l_4,l_5 的一级行列式分别为

$$\Delta_1'=\begin{vmatrix} c-b-d & 0 & bd\\ \sin\frac{\alpha}{2} & -\cos\frac{\alpha}{2} & 0\\ \sin\frac{\beta}{2} & -\cos\frac{\beta}{2} & -d\sin\frac{\beta}{2}\end{vmatrix}=-d\left[b\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+(d-c)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right],$$

$$\Delta_1''=\begin{vmatrix} c-b-d & 0 & d\\ \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} & -c\cos\frac{\alpha}{2}\\ \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} & -b\cos\frac{\beta}{2}\end{vmatrix}=(c-b)\left[b\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+(d-c)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right].$$

Δ_1',Δ_1'' 第三列的代数余子式依次为

$$\Delta_{13}'=\begin{vmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} & -\cos\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\beta}{2} & -\cos\frac{\beta}{2}\end{vmatrix}=\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\Delta_{23}'=-\begin{vmatrix} c-b-d & 0\\ \sin\frac{\beta}{2} & -\cos\frac{\beta}{2}\end{vmatrix}=(c-b-d)\cos\frac{\beta}{2},$$

$$\Delta_{33}'=\begin{vmatrix} c-b-d & 0\\ \sin\frac{\alpha}{2} & -\cos\frac{\alpha}{2}\end{vmatrix}=(b+d-c)\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\Delta''_{13}=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\alpha}{2} & \sin\dfrac{\alpha}{2}\\ \cos\dfrac{\beta}{2} & \sin\dfrac{\beta}{2}\end{vmatrix}=\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\Delta''_{23}=-\begin{vmatrix}c-b-d & 0\\ \cos\dfrac{\beta}{2} & \sin\dfrac{\beta}{2}\end{vmatrix}=(c-b-d)\sin\frac{\beta}{2},$$

$$\Delta''_{33}=\begin{vmatrix}c-b-d & 0\\ \cos\dfrac{\alpha}{2} & \sin\dfrac{\alpha}{2}\end{vmatrix}=(b+d-c)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

所以

$$D_{l_1l_2l_3}=\frac{\Delta'^2_1}{2\Delta'_{13}\Delta'_{23}\Delta'_{33}}=\frac{d^2\left[b\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}+(d-c)\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\right]^2}{2(c-b-d)^2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}},$$

$$D_{l_1l_4l_5}=\frac{\Delta''^2_1}{2\Delta''_{13}\Delta''_{23}\Delta''_{33}}=\frac{(b-c)^2\left[b\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}+(d-c)\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\right]^2}{2(c-b-d)^2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}}.$$

推论 9.1.5 设 A,B,C,D 是一条直线上依次排列的四个不同的点, $\odot O_1,\odot O_2$ 分别是以 AC, BD 为直径的两圆. 若 $\odot O_1,\odot O_2$ 相交于点 X 和 Y,M 和 N 分别是 $\odot O_1,\odot O_2$ 上异于 X,Y 的两点, $\angle MO_1D=\alpha,\angle NO_2D=\beta$. 记 $b=d_{AB},c=d_{AC},d=d_{AD}$; 过 X 和 Y,A 和 M,D 和 N,C 和 M,B 和 N 的直线依次为 l_1,l_2,l_3,l_4,l_5, 则

$$D_{l_1l_2l_3}=-\left(\frac{d}{b-c}\right)^2\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}D_{l_1l_2l_3}. \tag{9.1.11}$$

证明 由式 (9.1.9) 和 (9.1.10) 易知式 (9.1.11) 成立.

推论 9.1.6 设 A,B,C,D 是一条直线上依次排列的四个不同的点, $\odot O_1,\odot O_2$ 分别是以 AC, BD 为直径的两圆. 若 $\odot O_1,\odot O_2$ 相交于点 X 和 Y,M 和 N 分别是 $\odot O_1,\odot O_2$ 上异于 X,Y 的两点, $\angle MO_1D=\alpha,\angle NO_2D=\beta$. 则直线 XY,AM,DN (XY,BN,CM) 相交于一点的充分必要条件是 $b\tan\dfrac{\alpha}{2}=(c-d)\tan\dfrac{\beta}{2}$.

证明 由式 (9.1.9) 和 (9.1.10) 可知, 直线 $XY,AM,DN(XY,BN,CM)$ 相交于一点$\Leftrightarrow D_{l_1l_2l_3}=0(D_{l_1l_4l_5}=0)\Leftrightarrow b\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}+(d-c)\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}=0\Leftrightarrow b\tan\dfrac{\alpha}{2}=(c-d)\tan\dfrac{\beta}{2}$.

推论 9.1.7 设 A,B,C,D 是一条直线上依次排列的四个不同的点, $\odot O_1,\odot O_2$ 分别是以 AC, BD 为直径的两圆. 若 $\odot O_1,\odot O_2$ 相交于点 X 和 Y,M 和 N 分别是

$\odot O_1, \odot O_2$ 上异于 X, Y 的两点, 则直线 XY, AM, DN 相交于一点的充分必要条件直线 XY, BN, CM 相交于一点.

注 9.1.3 推论 9.1.7 的充分性即为第 36 届国际数学奥林匹克竞赛题.

定理 9.1.6 设 l_i 是过点 $P_i(a\cos\alpha_i, b\sin\alpha_i)(i=1,2,3)$ 且与椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 在该点处的切线垂直的直线, 则

$$D_{l_1l_2l_3}=\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{4ab\prod\limits_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)}\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\sin 2\alpha_{i+2}. \tag{9.1.12}$$

证明 椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 在 $P_i(a\cos\alpha_i, b\sin\alpha_i)$ 处的切线的方程为

$$b\cos\alpha_i\cdot x+a\sin\alpha_i\cdot y-ab=0.$$

于是设 l_i 的方程为

$$a\sin\alpha_i\cdot x-b\cos\alpha_i\cdot y+c_i=0,$$

将 $P_i(a\cos\alpha_i, b\sin\alpha_i)$ 的坐标代入求得 $c_i=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\sin 2\alpha_i$, 故

$$a\sin\alpha_i\cdot x-b\cos\alpha_i\cdot y+\frac{1}{2}(b^2-a^2)\sin 2\alpha_i=0.$$

根据线型三角形面积公式, 得

$$\begin{aligned}D_{l_1l_2l_3}=&\frac{a^2(-b)^2(b^2-a^2)^2}{8a^3b^3\prod\limits_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)}\begin{vmatrix}\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & \sin 2\alpha_1\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & \sin 2\alpha_2\\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & \sin 2\alpha_3\end{vmatrix}^2\\ =&\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{8ab\prod\limits_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)}\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\sin 2\alpha_{i+2}.\end{aligned}$$

推论 9.1.8 过点 $P_i(a\cos\alpha_i, b\sin\alpha_i)$ 且与椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 在 P_i 处的切线垂直的三条直线 $l_i(i=1,2,3)$ 相交于一点的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\sin 2\alpha_{i+2}=0. \tag{9.1.13}$$

证明 由式 (9.1.12) 得, 三条直线 $l_i(i=1,2,3)$ 相交于一点 $\Leftrightarrow D_{l_1l_2l_3}=0\Leftrightarrow$ 式 (9.1.13) 成立.

定理 9.1.7 设 l_i 是过点 $P_i(a\sec\alpha_i, b\tan\alpha_i)(i=1,2,3)$ 且与双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 在该点处的切线垂直的直线, 则

$$D_{l_1l_2l_3}=\frac{(a^2+b^2)^2}{2ab\prod\limits_{i=1}^{3}\sin(\sin\alpha_i-\alpha_{i+1})}\sum_{i=1}^{3}\sin(\sin\alpha_i-\alpha_{i+1})\tan\alpha_{i+2}. \tag{9.1.14}$$

证明　双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 在 $P_i(a\sec\alpha_i,b\tan\alpha_i)$ 处的切线的方程为

$$bx-a\sin\alpha_i\cdot y-ab\cos\alpha_i=0.$$

于是设 l_i 的方程为

$$\alpha\sin\alpha_i\cdot x+by+c_i=0,$$

将 $P_i(a\sec\alpha_i,b\tan\alpha_i)$ 的坐标代入求得 $c_i=-(a^2+b^2)\tan\alpha_i$, 故

$$\alpha\sin\alpha_i\cdot x+by-(a^2+b^2)\tan\alpha_i=0.$$

根据线型三角形面积公式, 得

$$\begin{aligned}D_{l_1l_2l_3}=&\frac{(a)^2b^2[-(a^2+b^2)]^2}{2a^3b^3\prod\limits_{i=1}^{3}(\sin\alpha_i-\sin\alpha_{i+1})}\begin{vmatrix}1&\sin\alpha_1&\tan\alpha_1\\1&\sin\alpha_2&\tan\alpha_2\\1&\sin\alpha_3&\tan\alpha_3\end{vmatrix}^2\\=&\frac{(a^2+b^2)^2}{2ab\prod\limits_{i=1}^{3}\sin(\alpha_i-\sin\alpha_{i+1})}\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_i-\sin\alpha_{i+1})\tan\alpha_{i+2}.\end{aligned}$$

推论 9.1.9　过点 $P_i(a\sec\alpha_i,b\tan\alpha_i)$ 且与椭圆 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 在 P_i 处的切线垂直的三条直线 $l_i(i=1,2,3)$ 相交于一点的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_i-\sin\alpha_{i+1})\tan\alpha_{i+2}=0. \tag{9.1.15}$$

证明　由式 (9.1.14) 得, 三条直线 $l_i(i=1,2,3)$ 相交于一点 $\Leftrightarrow D_{l_1l_2l_3}=0\Leftrightarrow$ 式 (9.1.15) 成立.

定理 9.1.8　设 l_i 是过点 $P_i(2pu_i,2pu_i^2)(i=1,2,3)$ 且与抛物线 $y^2=2px$ 在该点处的切线垂直的直线, 则

$$D_{l_1l_2l_3}=\frac{2p^2}{\prod\limits_{i=1}^{3}(u_{i+1}^2-u_i^2)}\sum_{i=1}^{3}u_i^2u_{i+1}^2(u_{i+1}-u_i). \tag{9.1.16}$$

证明　抛物线 $y^2=2px$ 在 $P_i(2pu_i,2pu_i^2)(i=1,2,3)$ 处的切线的方程为

$$x-2u_i^2y+2pu_i=0.$$

于是设 l_i 的方程为

$$2u_i^2x+y+c_i=0,$$

将 $P_i(2pu_i,2pu_i^2)$ 的坐标代入求得 $c_i=-2pu_i^2(2u_i+1)$, 故

$$2u_i^2x+y-2pu_i^2(2u_i+1)=0.$$

根据线型三角形面积公式, 得

$$D_{l_1l_2l_3}=-\frac{2^2(-2p)^2}{16\prod\limits_{i=1}^{3}(u_i^2-u_{i+1}^2)}\begin{vmatrix}u_1^2 & 1 & u_1^2(2u_1+1)\\ u_2^2 & 1 & u_2^2(2u_2+1)\\ u_3^2 & 1 & u_3^2(2u_3+1)\end{vmatrix}^2$$

$$=\frac{2p^2\sum\limits_{i=1}^{3}u_i^2u_{i+1}^2(u_{i+1}-u_i)}{\prod\limits_{i=1}^{3}(u_{i+1}^2-u_i^2)}.$$

推论 9.1.10 过点 $P_i(a\sec\alpha_i,b\tan\alpha_i)$ 且与椭圆 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 在 P_i 处的切线垂直的三条直线 $l_i(i=1,2,3)$ 相交于一点的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{3}u_i^2u_{i+1}^2(u_{i+1}-u_i)=0. \tag{9.1.17}$$

证明 由式 (9.1.16) 得, 三条直线 $l_i(i=1,2,3)$ 相交于一点 $\Leftrightarrow D_{l_1l_2l_3}=0\Leftrightarrow$ 式 (9.1.17) 成立.

定理 9.1.9 设 $OABC$ 是平行四边形, E,F,M,N 分别是 AB,OC,OA,BC 所在直线的分点, 且 $BE/EA=\lambda_1,OF/FC=\lambda_2,AM/MO=\mu_1,CN/NB=\mu_2$. 记 OE,AF,CE,BF,MN 所在的直线方程分别为 l_1,l_2,l_1',l_2',l_3, 则

$$D_{l_1l_2l_3}=\frac{(1+\mu_2-\lambda_2\mu_1+\lambda_2\mu_2-\lambda_1\lambda_2\mu_1-\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2)^2}{2(1+2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2)(\lambda_2\delta_1+\delta_2)(\delta_1+\lambda_1\delta_2)}D_{OABC}, \tag{9.1.18}$$

$$D_{l_1'l_2'l_3}=-\frac{(1+\mu_1+\lambda_1\mu_1-\lambda_1\mu_2-\lambda_1\lambda_2\mu_2-\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2)^2}{2(1+2\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)(\delta_1'+\lambda_2\delta_2)(\lambda_1\delta_1+\delta_2)}D_{OABC}, \tag{9.1.19}$$

其中 $\delta_1=\mu_1+\mu_2+2\mu_1\mu_2,\delta_1'=2+\mu_1+\mu_2,\delta_2=(1+\mu_1)(1+\mu_2)$.

证明 如图 9.1.3 所示. 设平行四边形顶点的坐标为 $O(0,0),A(a,0),B(a+b,c),C(b,c)$, 于是各分点的坐标为 $E\left(\dfrac{a+b+\lambda_1a}{1+\lambda_1},\dfrac{c}{1+\lambda_1}\right),F\left(\dfrac{\lambda_2b}{1+\lambda_2},\dfrac{\lambda_2c}{1+\lambda_2}\right)$, $M\left(\dfrac{a}{1+\mu_1},0\right),N\left(\dfrac{b+\mu_2(a+b)}{1+\mu_2},c\right)$. 求得各直线的方程

$$l_1:cx-(a+b+\lambda_1a)y=0,$$

$$l_2 : \lambda_2 cx + (a + \lambda_2 a - \lambda_2 b)y - \lambda_2 ac = 0,$$
$$l_1' : \lambda_1 cx + (a + \lambda_1 a - \lambda_1 b)y - (1 + \lambda_1)ac = 0,$$
$$l_2' : cx - (a + b + \lambda_2 a)y + \lambda_2 ac = 0,$$
$$l_3 : \delta_2 cx + [(1 - \mu_1\mu_2)a - \delta_2 b]y - (1 + \mu_2)ac = 0.$$

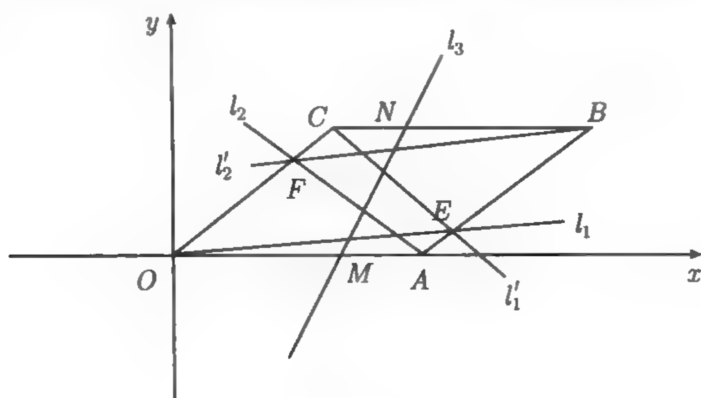


图 9.1.3

因为

$$\Delta_1 = -ac^2\begin{vmatrix} 1 & -a-b-\lambda_1 a & 0 \\ \lambda_2 & a+\lambda_2 a-\lambda_2 b & \lambda_2 \\ \delta_2 & (1-\mu_1\mu_2)a-\delta_2 b & 1+\mu_2 \end{vmatrix}$$
$$= -a^2c^2\begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & 1+\lambda_2 & \lambda_2 \\ \mu_1(1+\mu_2) & 1-\mu_1\mu_2 & 1+\mu_2 \end{vmatrix}$$
$$= -a^2c^2\begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 \\ \mu_1(1+\mu_2) & -\mu_2(1+\mu_1) & 1+\mu_2 \end{vmatrix}$$
$$= -a^2c^2(1+\mu_2-\lambda_2\mu_1+\lambda_2\mu_2-\lambda_1\lambda_2\mu_1-\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2),$$

$$\Delta_{13} = c\begin{vmatrix} \lambda_2 & a+\lambda_2 a-\lambda_2 b \\ \delta_2 & (1-\mu_1\mu_2)a-\delta_2 b \end{vmatrix} = ac\begin{vmatrix} \lambda_2 & 1 \\ \delta_2 & -\delta_1 \end{vmatrix} = -ac(\lambda_2\delta_1+\delta_2),$$

$$\Delta_{23} = c\begin{vmatrix} \delta_2 & (1-\mu_1\mu_2)a-\delta_2 b \\ 1 & -a-b-\lambda_1 a \end{vmatrix} = ac\begin{vmatrix} \delta_2 & 1-\mu_1\mu_2 \\ 1 & -1-\lambda_1 \end{vmatrix} = -ac(\delta_1+\lambda_1\delta_2),$$

$$\Delta_{33} = c\begin{vmatrix} 1 & -a-b-\lambda_1 a) \\ 1 & a+\lambda_2 a-\lambda_2 b \end{vmatrix} = ac(1+2\lambda_1+\lambda_1\lambda_2);$$

$$\Delta_1' = -ac^2\begin{vmatrix} \lambda_1 & a+\lambda_1 a-\lambda_1 b & 1+\lambda_1 \\ 1 & -a-\lambda_2 a-b & -\lambda_2 \\ \delta_2 & (1-\mu_1\mu_2)a-\delta_2 b & 1+\mu_2 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= -a^2c^2\begin{vmatrix} \lambda_1 & 1+\lambda_1 & 1+\lambda_1 \\ 1 & -1-\lambda_2 & -\lambda_2 \\ \delta_2 & 1-\mu_1\mu_2 & 1+\mu_2 \end{vmatrix} \\
&= -a^2c^2\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 1+\lambda_1 \\ 0 & -1 & -\lambda_2 \\ 1+\mu_1 & -(1+\mu_1)\mu_2 & 1+\mu_2 \end{vmatrix} \\
&= -a^2c^2(1+\mu_1+\lambda_1\mu_1-\lambda_1\mu_2-\lambda_1\lambda_2\mu_2-\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2),
\end{aligned}
$$

$$\Delta'_{13} = c\begin{vmatrix} 1 & -a-\lambda_2a-b \\ \delta_2 & (1-\mu_1\mu_2)a-\delta_2b \end{vmatrix} = ac\begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda_2 \\ \delta_2 & 1-\mu_1\mu_2 \end{vmatrix} = ac(\delta'_1+\lambda_2\delta_2),$$

$$\Delta'_{23} = c\begin{vmatrix} \delta_2 & (1-\mu_1\mu_2)a-\delta_2b \\ \lambda_1 & a+\lambda_1a-\lambda_1b \end{vmatrix} = ac\begin{vmatrix} \delta_2 & 1-\mu_1\mu_2 \\ \lambda_1 & 1+\lambda_1 \end{vmatrix} = ac(\lambda_1\delta_1+\delta_2),$$

$$\Delta'_{33} = c\begin{vmatrix} \lambda_1 & a+\lambda_1a-\lambda_1b \\ \lambda_2 & -a-\lambda_2a-b \end{vmatrix} = -ac(1+2\lambda_1+\lambda_1\lambda_2),$$

故由线型三角形有向面积公式, 即得式 (9.1.18) 和 (9.1.19).

推论 9.1.11 设 $OABC$ 是平行四边形, E,F,M,N 分别是 AB,OC,OA,BC 所在直线的分点, 且 $BE/EA=\lambda_1, OF/FC=\lambda_2, AM/MO=\mu_1, CN/NB=\mu_2$. 记 OE,AF,CF,BF,MN 所在的直线方程分别为 l_1,l_2,l'_1,l'_2,l_3. 若 l_3 过 l_1,l_2 和 l'_1,l'_2 的交点, 则 $\mu_1=\mu_2$.

证明 由 l_3 过 l_1,l_2 和 l'_1,l'_2 两交点, 得

$$\begin{cases} D_{l_1l_2l_3}=0, \\ D_{l'_1l'_2l_3}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\mu_2-\lambda_2\mu_1+\lambda_2\mu_2-\lambda_1\lambda_2\mu_1-\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2=0, \\ 1+\mu_1+\lambda_1\mu_1-\lambda_1\mu_2-\lambda_1\lambda_2\mu_2-\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2=0, \end{cases}$$

两方程相减, 得

$$(\mu_2-\mu_1)(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)=0,$$

注意到 $(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\neq 0$, 得 $\mu_1=\mu_2$, 从而推论 9.1.10 成立.

注 9.1.4 当 M,N 分别为线段 OA,BC 的中点时, 即是1994 年澳大利亚数学奥林匹克试题.

9.2 线型三角形有向面积公式在三线共点证明中的应用

在几何中, 往往会遇到三线共点的问题. 根据 9.1 节的知识, 只要知道三条直线的方程, 就可以把三直线是否共点的问题转化成线型三角形面积是否为零的问题.

本节主要讨论线形三角形有向面积公式在三线共点证明中的应用. 首先给出三直线共点的充分必要条件; 再据此讨论线形三角形有向面积公式在一些具体的三

线共点问题证明中的应用, 从而给出著名的高线定理、中线定理、Neuberg 定理和 Ceva 定理和一些数学竞赛题等结论的证明或推广.

9.2.1 三直线共点的充要条件

定理 9.2.1 任意三条两两相交的直线 $l_i: a_ix+b_iy+c_i=0\,(i=1,2,3)$ 共点的充要条件是其一级行列式

$$\Delta_1 = 0. \tag{9.2.1}$$

证明 根据式 (9.1.4) 知, 三条两两相交的三条直线 $l_i: a_ix+b_iy+c_i=0\,(i=1,2,3)$ 共点 $\Leftrightarrow D_{l_il_2l_3}=0 \Leftrightarrow$ 式 (9.2.1) 成立.

推论 9.2.1 三条两两相交的的直线 $l_i: a_ix+b_iy+c_i=0\,(i=1,2,3)$ 满足如下两个条件之一:

$$k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3=k_1c_1+k_2c_2+k_3c_3=0\ (k_1k_2k_3\neq 0), \tag{9.2.2}$$

$$k_1a_1+k_2b_1+k_3c_1=k_1a_2+k_2b_2+k_3c_2=k_1a_3+k_2b_3+k_3c_3=0\ (k_1k_2k_3\neq 0), \tag{9.2.3}$$

则这三条直线共点.

证明 若三条两两相交的直线 $l_i: a_ix+b_iy+c_i=0\,(i=1,2,3)$ 满足式 (9.2.2), 则

$$\Delta_1 \xlongequal{k_1r_1+k_2r_2+k_3r_3} \frac{1}{k_1}\begin{vmatrix} k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3 & k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3 & k_1c_1+k_2c_2+k_3c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{k_1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0,$$

所以三条直线 $l_i: a_ix+b_iy+c_i=0\,(i=1,2,3)$ 共点.

类似地, 可以证明三条两两相交的直线 $l_i: a_ix+b_iy+c_i=0\,(i=1,2,3)$ 满足式 (9.2.3) 的情形.

9.2.2 线型三角形有向面积公式在三线共点证明中的应用

例 9.2.1 已知两平行四边形 $ABCD, AMNP$, 其中 M, P 分别在直线 AB, AD 上. 证明: 直线 MD, BP, NC 相交于一点.

证明 如图 9.2.1 所示. 不妨设平行四边形 $ABCD, AMNP$ 顶点的坐标分别为 $A(0,0), B(a,0), C(a+c,d), D(c,d), M(b,0), N(b+e,f), P(e,f)$. 注意到 $ed=cf$, 求得直线 BP, MD, NC 的方程分别为

$$-fx+(e-a)y+af=0,$$

$$-dx + (c-b)y + bd = 0,$$
$$(f-d)x + (a+c-b-e)y + (bd-af) = 0.$$

因为

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -f & e-a & af \\ -d & c-b & bd \\ f-d & a+c-b-c & bd-af \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_1-r_2} \begin{vmatrix} -f & e-a & af \\ -d & c-b & bd \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

所以直线 BP, MD, NC 相交于一点.

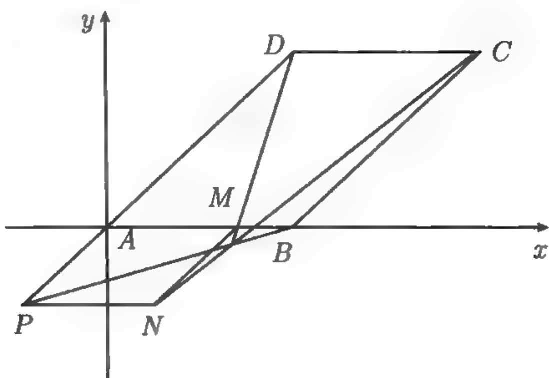


图 9.2.1 两平行四边形中三线相交于一点

例 9.2.2(高线定理) 三角形 $P_1P_2P_3$ 的三条高线 $P_{i+2}H_i$ 所在直线 h_i 相交于一点, 其中 $P_{i+2}H_i \perp P_iP_{i+1}$ 于 $H_i(i=1,2,3)$.

证明 如图 9.2.2 所示. 设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i, y_i)$. 于是由直线 P_iP_{i+1} 的方程

$$(y_i - y_{i+1})x + (x_{i+1} - x_i)y + (x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i) = 0$$

可得 h_i 的方程

$$(x_{i+1} - x_i)x + (y_{i+1} - y_i)y + c_i = 0,$$

其中 $c_i = (x_i - x_{i+1})x_{i+2} - (y_i - y_{i+1})y_{i+2}$. 因为

$$\sum_{i=1}^{3}(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{3}(y_{i+1} - y_i) = 0,$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c_i &= \sum_{i=1}^{n}[(x_i - x_{i+1})x_{i+2} - (y_i - y_{i+1})y_{i+2}] \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_ix_{i+2} - x_{i+1}x_{i+2} - y_iy_{i+2} + y_{i+1}y_{i+2}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}x_i - x_{i+1}x_{i+2} - y_{i+1}y_i + y_{i+1}y_{i+2}) = 0,\end{aligned}$$

所以三角形 $P_1P_2P_3$ 的三条高线 $P_{i+2}H_i$ 所在直线 $h_i(i=1,2,3)$ 相交于一点.

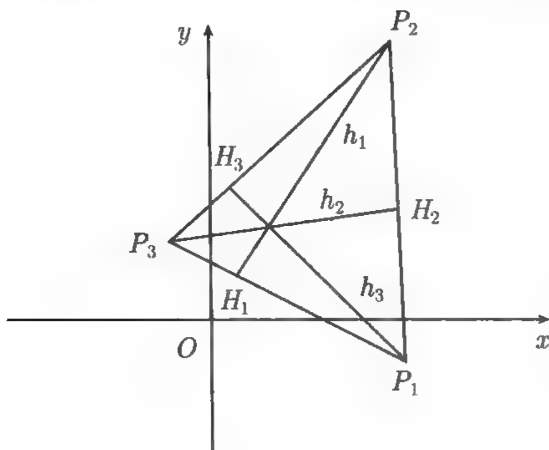


图 9.2.2　三角形高线定理

例 9.2.3(中线定理)　三角形 $P_1P_2P_3$ 的三条中线 $P_{i+2}M_i$ 所在直线 m_i 相交于一点, 其中 M_i 是 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 的中点.

证明　如图 9.2.3 所示. 设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)$, 于是中点的坐标为

$$M_i\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2},\frac{y_i+y_{i+1}}{2}\right)(i=1,2,3).$$

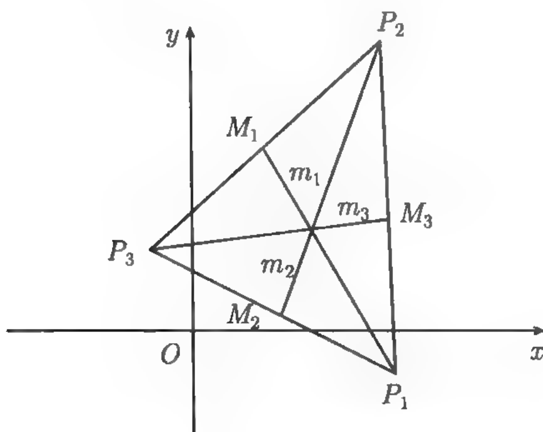


图 9.2.3　三角形中线定理

中线 m_i 的方程

$$\left(y_{i+2}-\frac{y_i+y_{i+1}}{2}\right)x+\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}-x_{i+2}\right)y+\frac{1}{2}[x_{i+2}(y_i+y_{i+1})-(x_i+x_{i+1})y_{i+2}]=0,$$

即

$$(2y_{i+2}-y_i-y_{i+1})x+(x_{i+1}+x_i-2x_{i+2})y+c_i=0,$$

其中 $c_i=(x_{i+2}y_i-x_iy_{i+2})+(x_{i+2}y_{i+1}-x_{i+1}y_{i+2})$.

显然

$$\sum_{i=1}^{3}(2y_{i+2}-y_i-y_{i+1})=0,\quad \sum_{i=1}^{3}(x_{i+1}+x_i-2x_{i+2})=0,\quad \sum_{i=1}^{3}c_i=0,$$

所以三角形 $P_1P_2P_3$ 的三条中线 $P_{i+2}M_i$ 所在直线 m_i 相交于一点.

例 9.2.4(Neuberg 定理)　过三角形 $P_1P_2P_3$ 各顶点向一直线 L 作垂线, 再过它们的垂足分别作其对边的垂线, 则这三条垂线共点.

证明　如图 9.2.4 所示. 不妨设 L 为 x 轴, $P_iQ_i\perp L$ 于 Q_i, 三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)$, 于是 Q_i 的坐标为 $Q_i(x_i,0)(i=1,2,3)$.

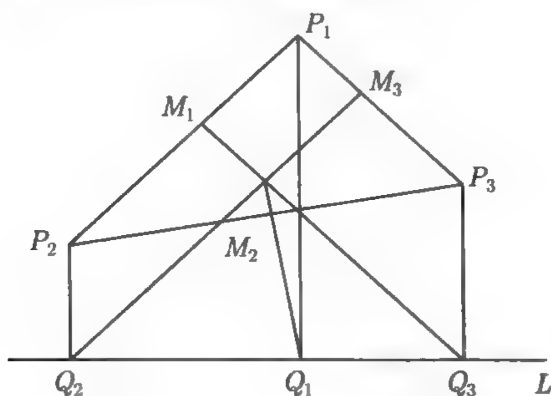


图 9.2.4　Neuberg 定理

设 Q_{i+2} 到 P_iP_{i+1} 垂线 h_i 的方程为

$$(x_{i+1}-x_i)x+(y_{i+1}-y_i)y+c_i=0,$$

将 Q_{i+2} 的坐标代入得

$$c_i=(x_i-x_{i+1})x_{i+2}.$$

因为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}c_i&=\sum_{i=1}^{3}(x_i-x_{i+1})x_{i+2}=\sum_{i=1}^{3}(x_ix_{i+2}-x_{i+1}x_{i+2})\\&=\sum_{i=1}^{3}(x_{i+1}x_i-x_{i+1}x_{i+2})=0,\end{aligned}$$

所以结论成立.

例 9.2.5(Ceva 定理)　在三角形 $P_1P_2P_3$ 的边 P_1P_2,P_2P_3,P_3P_1 所在直线上依次取点 Q_1,Q_2,Q_3. 试证: P_1Q_2,P_2Q_3,P_3Q_1 交于一点的充分必要条件是 $\dfrac{P_1Q_1}{Q_1P_2}\cdot\dfrac{P_2Q_2}{Q_2P_3}\cdot\dfrac{P_3Q_3}{Q_3P_1}=1$.

证明　如图 9.2.5 所示. 不妨设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_1(0,0),P_2(a,0)$,

$P_3(b,c), \dfrac{P_1Q_1}{Q_1P_2}=\lambda_1, \dfrac{P_2Q_2}{Q_2P_3}=\lambda_2, \dfrac{P_3Q_3}{Q_3P_1}=\lambda_3$. 于是 Q_1,Q_2,Q_3 的坐标为

$$Q_1\left(\frac{a\lambda_1}{1+\lambda_1},0\right),\quad Q_2\left(\frac{a+b\lambda_2}{1+\lambda_2},\frac{c\lambda_2}{1+\lambda_2}\right),\quad Q_3\left(\frac{b}{1+\lambda_3},\frac{c}{1+\lambda_3}\right).$$

于是求得 P_1Q_2 的方程为

$$c\lambda_2x+(a+b\lambda_2)y=0,$$

P_2Q_3 的方程为

$$-cx+[(b-a)-a\lambda_3]y+ac=0,$$

P_3Q_1 的方程为

$$c(1+\lambda_1)x+[a\lambda_1-b(1+\lambda_1)]y-\lambda_1ac=0.$$

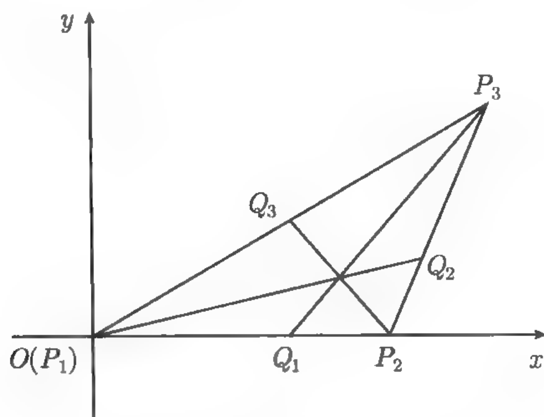


图 9.2.5　Ceva 定理

于是

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-c\lambda_2 & a+b\lambda_1 & 0\\ -c & b-a(1+\lambda_3) & ac\\ c(1+\lambda_1) & (a-b)\lambda_1-b & -ac\lambda_1\end{vmatrix}=ac^2\begin{vmatrix}-\lambda_2 & a+b\lambda_1 & 0\\ -1 & b-a(1+\lambda_3) & 1\\ 1+\lambda_1 & (a-b)\lambda_1-b & -\lambda_1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_3}ac^2\begin{vmatrix}-\lambda_2 & a+b\lambda_1 & 0\\ 0 & b-a(1+\lambda_3) & 1\\ 1 & (a-b)\lambda_1-b & -\lambda_1\end{vmatrix}=a^2c^2(1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3),$$

因为 $ac\neq0$, 所以 P_1Q_2,P_2Q_3,P_3Q_1 交于一点 $\Leftrightarrow 1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0\Leftrightarrow \dfrac{P_1Q_1}{Q_1P_2}\cdot\dfrac{P_2Q_2}{Q_2P_3}\cdot\dfrac{P_3Q_3}{Q_3P_1}=1$.

例 9.2.6(2003 年考研题)　已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0,\quad l_2: bx+2cy+3a=0,\quad l_3: cx+2ay+3b=0,$$

证明这三条直线相交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

证明

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix} \xlongequal[c_3\div 3]{c_2\div 2} 6\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2+r_3} 6\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & a-b \\ c & a-c & b-c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

因为 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$, 所以三条直线相交于一点 $\Leftrightarrow \Delta_1=0 \Leftrightarrow a+b+c=0$.

例 9.2.7(第 11 届中国中学生数学冬令营题的推广) 设 H 是三角形 ABC 的垂心, 由 C 向以 AB 为直径的圆作切线 CP,CQ, 切点为 P,Q, 求证 P,H,Q 三点共线.

证明 如图 9.2.6 所示. 设三角形顶点的坐标为 $A(-a,0),B(a,0),C(b,c)$, 过 C 作 $CD\perp AB$ 于 D, A 作 $AE\perp BC$ 于 E. 于是以 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$, CD 的直线方程为

$$x-b=0.$$

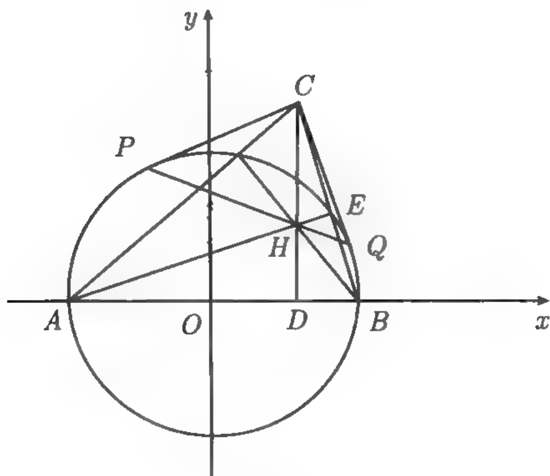


图 9.2.6

因为 $k_{AE}=-1/k_{BC}=(a-b)/c$, 故 AE 的直线方程为

$$(a-b)x-cy+a(a-b)=0.$$

又因为 P,Q 在以 OC 为直径的圆 $x^2-ax+y^2-by=0$ 上, 两圆方程相减便得过两圆交点 P,Q 的曲线方程

$$bx+cy-a^2=0.$$

这是一直线方程, 因此为直线 PQ 的方程.

因为三条直线 PQ, AE 和 CD 的系数行列式

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b & c & -a^2 \\ a-b & -c & a(a-b) \\ 1 & 0 & -b \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} b & c & -a^2 \\ a & 0 & -ab \\ 1 & 0 & -b \end{vmatrix}=0,$$

所以这三条直线相交于 H 点, 即 P,H,Q 三点共线.

注 9.2.1　当 ABC 为锐角三角形时, 即为第 11 届中国中学生数学冬令营题.

例 9.2.8(1997 年美国数学竞赛题)　分别以三角形 $P_1P_2P_3$ 的边 P_1P_2,P_2P_3,P_3P_1 为底边作等腰三角形 $P_1P_2Q_1,P_2P_3Q_2,P_3P_1Q_3$, 求证: 分别过 P_1,P_2,P_3 作 Q_3Q_1, Q_1Q_2,Q_2Q_3 的垂线 l_1,l_2,l_3 相交于一点.

证明　如图 9.2.7 所示. 设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i),d_{Q_{i-P_iP_{i+1}}}/d_{P_iP_{i+1}}=\mu_i(i=1,2,3)$, 于是由定理 7.1.1 的证明知, 各等腰三角形顶点的坐标为

$$Q_i\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}+\mu_i(y_{i+1}-y_i),\frac{y_i+y_{i+1}}{2}-\mu_i(x_{i+1}-x_i)\right)(i=1,2,3).$$

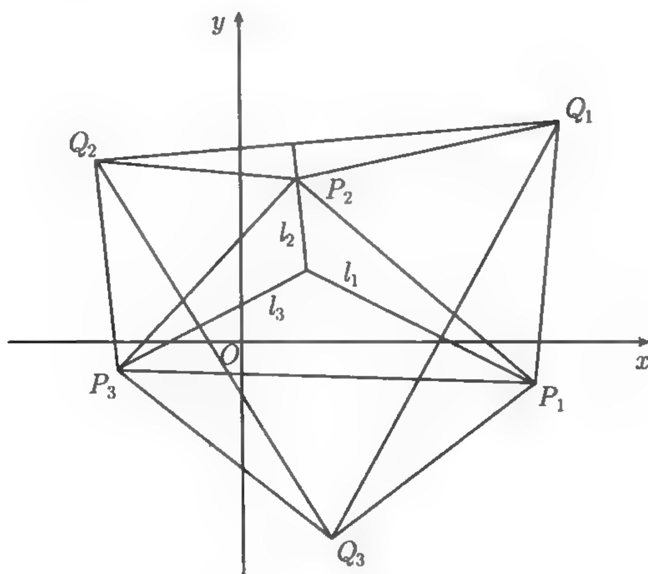


图 9.2.7

记

$$a_i = (x_{i+2} - x_i) + 2\mu_{i+1}(y_{i+2} - y_{i+1}) - 2\mu_i(y_{i+1} - y_i),$$
$$b_i = (y_{i+2} - y_i) + 2\mu_i(x_{i+1} - x_i) - 2\mu_{i+1}(x_{i+2} - x_{i+1}),$$

则

$$k_{Q_iQ_{i+1}} = \frac{b_i}{a_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

垂线 l_{i+1} 的方程为

$$y - y_{i+1} = -\frac{a_i}{b_i}(x - x_{i+1}),$$

即

$$a_i x + b_i y + c_i = 0,$$

其中 $c_i = x_{i+1}(x_i - x_{i+2}) + y_{i+1}(y_i - y_{i+2}) + 2\mu_{i+1}(x_{i+2}y_{i+1} - x_{i+1}y_{i+2}) + 2\mu_i(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)$.

因为 $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{i=1}^{3}[(x_{i+2} - x_i) + 2\mu_{i+1}(y_{i+2} - y_{i+1}) - 2\mu_i(y_{i+1} - y_i)] = 0, \sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{i=1}^{3} c_i = 0$, 所以 l_1, l_2, l_3 相交于一点.

例 9.2.9(1966 年基辅数学奥林匹克题的推广) 以三角形 ABC 的边 AB 为直径作一圆. 设 M_1 和 M_2 分别是圆与 AC, BC 的交点, 过 M_1, M_2 分别作圆的切线 t_1, t_2. 证明: 切线 t_1, t_2 与三角形 ABC 的高 CD 所在直线相交于一点.

证明 如图 9.2.8 所示. 设三角形 ABC 顶点的坐标为 $A(-a,0), B(a,0), C(b,c)$ $(a>0)$, 于是以 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$. 显然, 当 ABC 为直角三角形时, 结论成立.

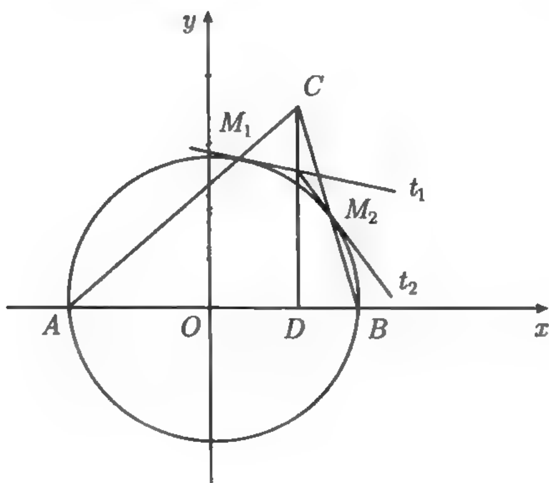


图 9.2.8

当 ABC 为锐角三角形时, $\angle BOM_1 = 2A, \angle BOM_2 = \pi - 2B$; 当 ABC 为钝角三角形时, 不妨设 A 为钝角, 则 $\angle BOM_1 = \pi + \angle AOM_1 = 2\pi - 2\angle OAM_1 = 2\pi - 2(\pi - A) = 2A$, $\angle BOM_2 = \pi - 2B$. 由于

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 1 - \frac{2c^2}{(a+b)^2+c^2} = \frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)^2+c^2}, \cos 2B = \frac{(a-b)^2-c^2}{(a-b)^2+c^2},$$

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2(a+b)c}{(a+b)^2+c^2}, \cos 2B = \frac{2(a-b)c}{(a-b)^2+c^2}.$$

于是切点的坐标为

$$M_1\left(\frac{a[(a+b)^2-c^2]}{(a+b)^2+c^2}, \frac{2ac(a-b)}{(a+b)^2+c^2}\right), \quad M_2\left(-\frac{a[(a+b)^2-c^2]}{(a+b)^2+c^2}, \frac{2ac(a-b)}{(a+b)^2+c^2}\right).$$

故求得圆在 M_1, M_2 处的切线及 CD 的直线方程分别为

$$t_1 : [(a+b)^2-c^2]x + 2(a+b)cy - a[(a+b)^2+c^2] = 0,$$

$$t_2 : [c^2-(a-b)^2]x + 2(a-b)cy - a[(a-b)^2+c^2] = 0.$$

$$CD : x - b = 0.$$

因为

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (a+b)^2-c^2 & 2(a+b)c & -a[(a+b)^2+c^2] \\ c^2-(a+b)^2 & 2(a-b)c & -a[(a-b)^2+c^2] \\ 1 & 0 & -b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3\div(-1)]{c_2\div 2c} -2c\begin{vmatrix} (a+b)^2-c^2 & a+b & a[(a+b)^2+c^2] \\ c^2-(a+b)^2 & a-b & a[(a-b)^2+c^2] \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(r_2+r_1)\div 2a} -4ac\begin{vmatrix} (a+b)^2-c^2 & a+b & a[(a+b)^2+c^2] \\ 2b & 1 & a^2+b^2+c^2 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$= -4ac[b(a+b)^2 - bc^2 + (a+b)(a^2+b^2+c^2) - a(a+b)^2 - ac^2 - 2(a+b)b^2]$$

$$= 0,$$

所以两条切线 t_1, t_2 和三角形 ABC 的高 CD 所在直线相交于一点.

注 9.2.2 1966 年基辅数学奥林匹克题为：以三角形 ABC 的边 AB 为直径作一圆. 设 M_1 和 M_2 分别是圆与 AC, BC 的交点, 过 M_1, M_2 分别作圆的切线. 证明：这两条切线的交点落在三角形 ABC 的高 CD 上.

例 9.2.10(第 1 届国际数学奥林匹克题) 已知：在平面上一线段 AB, M 为 AB 上任意一点, 在 AB 的一侧分别以 AM 与 BM 为一边作正方形 $AMCD$ 与 $BMEF$. 这两个正方形的外接圆除相交于 M 外, 还相交于点 N. 求证：直线 AE 与 BC 相交于点 N.

证明 如图 9.2.9 所示. 不妨设正方形 $AMCD$ 与 $BMEF$ 顶点的坐标为 $A(0,0), M(2a,0), C(2a,2a), D(0,2a); B(2a+2b,0), M(2a,0), E(2a,2b), F(2a+2b,2b)$.

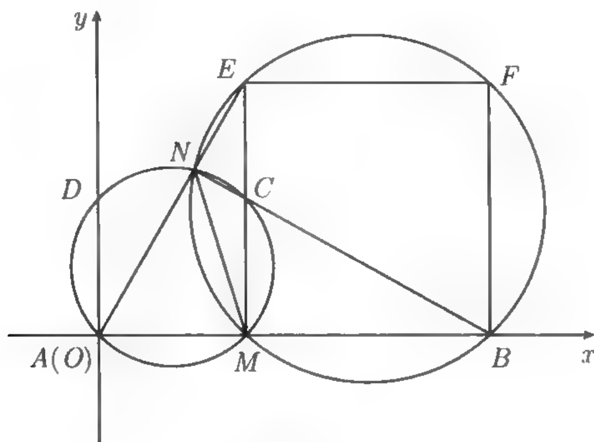


图 9.2.9

于是 $AMCD$ 与 $BMEF$ 的外接圆的方程分别为

$$(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2 \quad 和 \quad (x-2a-b)^2+(y-b)^2=2b^2,$$

两方程相减, 得 MN 的直线方程

$$(a+b)x+(b-a)y-2a^2-2ab=0,$$

又 AE, BC 的直线方程分别为

$$bx-ay=0,$$

$$ax+by-2a^2-2ab=0.$$

由于

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a+b & b-a & -2a(a+b) \\ b & -a & 0 \\ a & b & -2a(a+b) \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2+r_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & -a & 0 \\ a & b & -2a(a+b) \end{vmatrix}=0,$$

所以三直线 MN, AE, BC 相交于点 N'.

因为 $AM=MC, EM=BM, \angle AMC=\angle BMC=90^\circ$, 所以在三角形 AME 和三角形 BMC 全等, 于是 $\angle N'AM=\angle BCM$. 故 A, M, N', C 共圆, 从而 A, M, N', C, D 共圆, 即 N' 在正方形 $AMCD$ 的外接圆上, 所以 N' 与 N 重合.

例 9.2.11(第 25 届全苏联数学奥林匹克题) 在矩形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 上分别取异于顶点的点 K, L, M, N. 已知 $KL//MN, KM\perp NL$, 求证: KM 和 LN 的交点在矩形的对角线 BD 上.

证明　如图 9.2.10 所示. 设矩形 $ABCD$ 顶点的坐标为 $A(0,0), B(a,0), C(a,b), D(0,b)$, KM 和 LN 的直线方程分别为

$$y = kx + c \text{ 和 } y = -x/k + d,$$

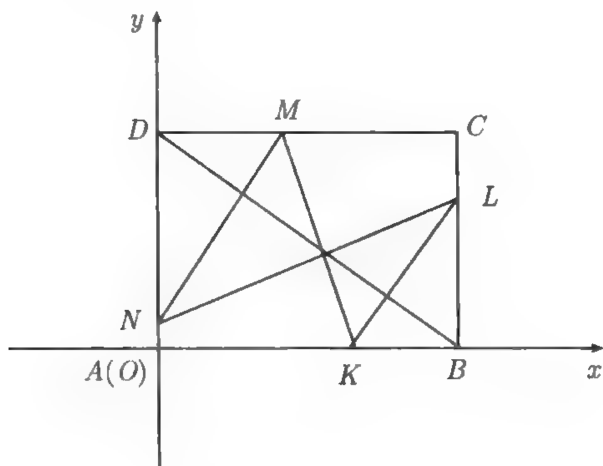


图 9.2.10

即

$$kx - y + c = 0 \text{ 和 } x/k + y - d = 0,$$

于是求得 BD 的方程及 K, L, M, N 的坐标分别为

$$x/a + y/b - 1 = 0,$$

$$K\left(-\frac{c}{k}, 0\right), \quad L\left(a, d - \frac{a}{k}\right), \quad M\left(\frac{b-c}{k}, b\right), \quad N(0, d).$$

又由 $KL//MN$ 得

$$\frac{b-d}{(b-c)/k} = \frac{d - a/k}{a + c/k},$$

化简得

$$k^2a(b-d) + kb(c-d) + a(b-c) = 0.$$

于是三直线 KM, LN 和 BD 的一级行列式

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k & -1 & c \\ 1/k & 1 & -d \\ 1/a & 1/b & -1 \end{vmatrix} = -k + \frac{c}{bk} + \frac{d}{a} - \frac{c}{a} - \frac{1}{k} + \frac{kd}{b}$$

$$= \frac{k^2a(d-b) + kb(d-c) + a(c-b)}{kab} = 0,$$

从而 KM 和 LN 的交点在矩形的对角线 BD 上.

例 9.2.12(第 18 届全苏联数学奥林匹克题)　设 $\odot O$ 内切于三角形 $Q_1Q_2Q_3$, Q_iQ_{i+1} 与 $\odot O$ 的切点为 P_i, Q_iO 与 $\odot O$ 的交点为 $R_i (i = 1, 2, 3)$. 求证: R_1P_2, R_2P_3, R_3P_1 相交于一点.

证明 如图 9.2.11 所示. 以圆心 O 为坐标原点建立平面直角坐标系, 设 $\odot O$ 的半径为 a, Q_iQ_{i+1} 与 $\odot O$ 切点的坐标为 $P_i(R\cos\alpha_i, R\sin\alpha_i)(i=1,2,3)$, 于是 $\odot O$ 的方程为 $x^2+y^2=a^2$. 由 $Q_{i+2}Q_i$ 和 Q_iQ_{i+1} 的方程

$$\cos\alpha_{i+2}x+\sin\alpha_{i+2}y=a \text{ 和 } \cos\alpha_i x+\sin\alpha_i y=a$$

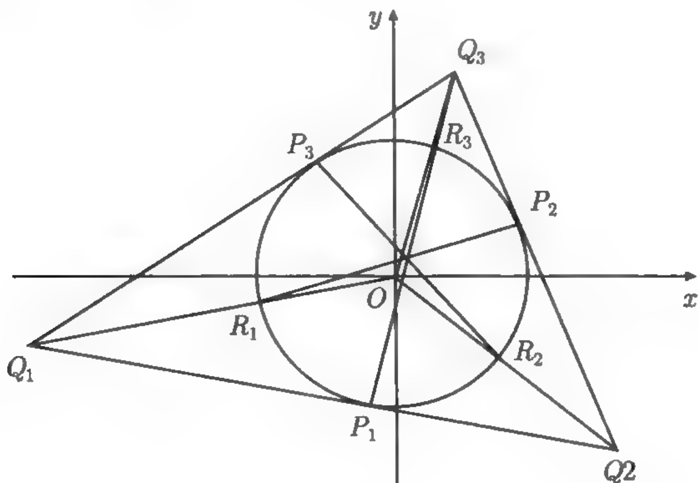


图 9.2.11

求得三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{a\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}, \frac{a\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}\right)(i=1,2,3).$$

于是直线 Q_iO 的方程

$$\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cdot x-\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cdot y=0, \text{ 即 } y=\tan\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cdot x.$$

将其代入 $\odot O$ 的方程, 求得线段 Q_iO 与 $\odot O$ 的交点为

$$R_i\left(-a\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}, -a\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\right)(i=1,2,3).$$

R_iP_{i+1} 的方程为

$$\left(\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}+\sin\alpha_{i+1}\right)-\left(\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}+\cos\alpha_{i+1}\right)y$$
$$-a\sin\left(\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}-\alpha_{i+1}\right)=0,$$

即

$$\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}+2\alpha_{i+1}}{4}\cdot x-\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}+2\alpha_{i+1}}{4}\cdot y$$
$$-a\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}-2\alpha_{i+1}}{4}=0(i=1,2,3).$$

于是三直线组 R_1P_2, R_2P_3, R_3P_1 的一级行列式

$$\Delta_1 = -(-a)\begin{vmatrix} \sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_2}{4} & \cos\dfrac{\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_2}{4} & \sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4} \\ \sin\dfrac{\alpha_2+\alpha_1+2\alpha_3}{4} & \cos\dfrac{\alpha_2+\alpha_1+2\alpha_3}{4} & \sin\dfrac{\alpha_2+\alpha_1-2\alpha_3}{4} \\ \sin\dfrac{\alpha_3+\alpha_2+2\alpha_1}{4} & \cos\dfrac{\alpha_3+\alpha_2+2\alpha_1}{4} & \sin\dfrac{\alpha_3+\alpha_2-2\alpha_1}{4} \end{vmatrix}$$

$$=a\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}+2\alpha_{i+1}}{4}\left(\sin\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}-2\alpha_i}{4}\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i+2\alpha_{i+2}}{4}\right.$$

$$\left.-\cos\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}+2\alpha_i}{4}\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i-2\alpha_{i+2}}{4}\right)$$

$$=\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}+2\alpha_{i+1}}{4}\left(\sin\frac{3\alpha_{i+2}+2\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}-\sin\frac{3\alpha_i+\alpha_{i+2}}{4}\right.$$

$$\left.-\sin\frac{3\alpha_i+2\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}}{4}+\sin\frac{\alpha_i+3\alpha_{i+2}}{4}\right)$$

$$=\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}+2\alpha_{i+1}}{4}\sin\frac{3\alpha_{i+2}+2\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}\right.$$

$$\left.-\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i+2\alpha_{i+2}}{4}\sin\frac{3\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}-\alpha_i}{4}\right)$$

$$+\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(-\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}+2\alpha_{i+1}}{4}\sin\frac{3\alpha_i+\alpha_{i+2}}{4}\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i+2\alpha_{i+2}}{4}\sin\frac{\alpha_{i+1}+3\alpha_i}{4}\right)$$

$$=-\frac{a}{4}\sum_{i=1}^{3}\left[\cos(\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1})-\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\right.$$

$$\left.-\cos(\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1})-\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+1}}{2}\right]$$

$$+\frac{a}{4}\sum_{i=1}^{3}\left(\cos\frac{2\alpha_i+\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right.$$

$$\left.-\cos\frac{2\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\right)$$

$$=-\frac{a}{4}\sum_{i=1}^{3}\left(-\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}+\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+1}}{2}\right)$$

$$+\frac{a}{4}\sum_{i=1}^{3}\left(-\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}-\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+1}}{2}\right)=0,$$

所以 R_1P_2, R_2P_3, R_3P_1 相交于一点.

例 9.2.13(1988 年加拿大数学奥林匹克题) 设 $\odot O$ 内切于三角形 $Q_1Q_2Q_3$, Q_iQ_{i+1} 与 $\odot O$ 的切点为 P_i, Q_iQ_{i+1} 的中点为 $M_i(i=1,2,3)$. 求证: $P_iP_{i+1}, Q_iO, M_{i+1}M_{i+2}(i=1,2,3)$ 相交于一点.

证明 如图 9.2.12 所示. 以圆心 O 为坐标原点建立平面直角坐标系, 设 $\odot O$ 的半径为 a, Q_iQ_{i+1} 与 $\odot O$ 切点的坐标为 $P_i(R\cos\alpha_i, R\sin\alpha_i)(i=1,2,3)$. 由 $Q_{i+2}Q_i$ 和 Q_iQ_{i+1} 的方程

$$\cos\alpha_{i+2}x+\sin\alpha_{i+2}y=a \text{ 和 } \cos\alpha_i x+\sin\alpha_i y=a$$

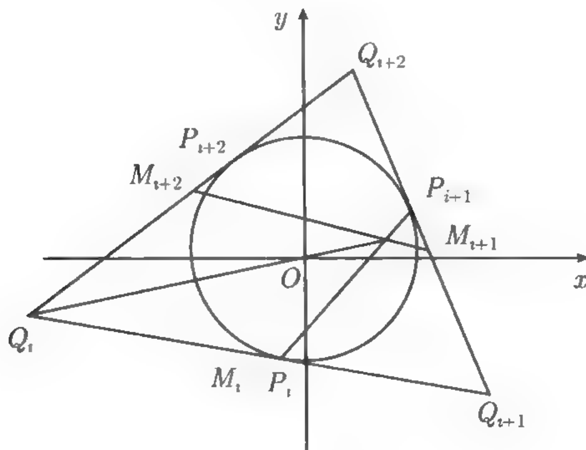


图 9.2.12

求得三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{a\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}},\frac{a\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}\right)(i=1,2,3).$$

于是直线 P_iP_{i+1}, Q_iO 的方程分别为

$$\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}\cdot x+\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}\cdot y-a\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}=0,$$

$$\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cdot x-\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cdot y=0.$$

$M_{i+1}M_{i+2}$ 的方程为

$$\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}-\frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}\right)x+\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}-\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}\right)y$$

$$+\frac{a}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\cos\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}}+\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}\right.$$

$$+\frac{\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+1}}{2}}{\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}\Bigg)=0,$$

即

$$\begin{aligned}&2\cos\alpha_i\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\cdot x+2\sin\alpha_i\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\cdot y\\&-a\left[\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}+\cos\left(\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}{2}-\alpha_i\right)\right]=0.\end{aligned}$$

于是三直线组 $P_iP_{i+1},Q_iO,M_{i+1}M_{i+2}$ 的一级行列式

$$\begin{aligned}\Delta_1=&-a\begin{vmatrix}\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2} & \sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2} & \cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\\ \sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2} & -\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2} & 0\\ 2\cos\alpha_i\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2} & 2\sin\alpha_i\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2} & \begin{matrix}\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\\+\cos\left(\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}{2}-\alpha_i\right)\end{matrix}\end{vmatrix}\\
=&-\left[2\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\left(\sin\alpha_i\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}+\cos\alpha_i\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}\right)\right.\\
&-\left(\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}+\cos\left(\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}{2}-\alpha_i\right)\right)\left(\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\right.\\
&\left.\left.+\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\right)\right]\\
=&-a\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\left[2\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\right.\\
&\left.-\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}-\cos\left(\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}{2}-\alpha_i\right)\right]\\
=&-a\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}{2}-\alpha_i\right)+\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\right.\\
&\left.-\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}-\cos\left(\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}{2}-\alpha_i\right)\right]\\
=&0,\end{aligned}$$

所以 $P_iP_{i+1},Q_iO,M_{i+1}M_{i+2}(i=1,2,3)$ 相交于一点.

例 9.2.14(1997 年中国国家集训队测试题的推广) 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle A=60°$, E 为三角形 ABD 外接圆上异于 B,D 的任意点, 直线 DE 与 AB 交于点 F, 求证: AD,BE,CF 三线共点.

证明 如图 9.2.13 所示. 设菱形顶点的坐标为 $A(-a,0),C(a,0),B(0,-a/\sqrt{3})$, $D(0,a/\sqrt{3})$, 于是求得三角形 ABD 外接圆的方程为 $\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}a^2$, 直线 AB 的方程为

$$x+\sqrt{3}y=-a, \tag{9.2.4}$$

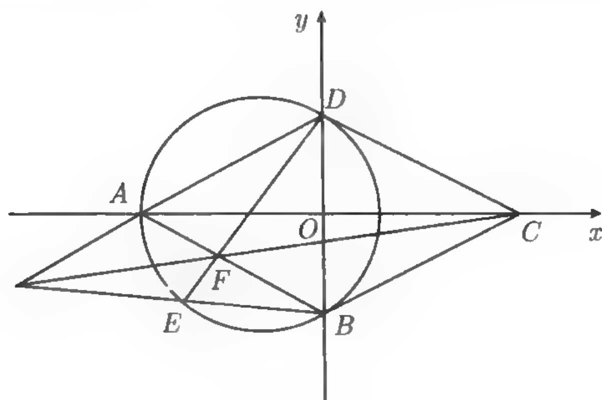


图 9.2.13

又设 E 点的坐标为 $E\left(\frac{a}{3}(-1+2\cos\theta), \frac{2a}{3}\sin\theta\right)$, 于是求得 DE 的直线方程

$$(3-2\sqrt{3}\sin\theta)x+\sqrt{3}(2\cos\theta-1)y=a(2\cos\theta-1), \tag{9.2.5}$$

式 (9.2.4) 和 (9.2.5) 联立, 求得 AB, DE 交点 F 的坐标

$$\begin{cases} x_F=\dfrac{\begin{vmatrix} -a & \sqrt{3} \\ a(2\cos\theta-1) & \sqrt{3}(2\cos\theta-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 3-2\sqrt{3}\sin\theta & \sqrt{3}(2\cos\theta-1) \end{vmatrix}}=\dfrac{2\cos\theta-1}{2-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}a, \\ y_F=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 3-2\sqrt{3}\sin\theta & a(2\cos\theta-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 3-2\sqrt{3}\sin\theta & \sqrt{3}(2\cos\theta-1) \end{vmatrix}}=-\dfrac{1+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{3}(2-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)}a. \end{cases}$$

依次求得直线 AB, BE, FC 的方程

$$x-\sqrt{3}y+a=0,$$

$$(3+2\sqrt{3}\sin\theta)x+\sqrt{3}(1-2\cos\theta)y+(1-2\cos\theta)a=0,$$

$$(1+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)x+(3\sin\theta+3\sqrt{3}\cos\theta-3\sqrt{3})y+(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta-1)a=0.$$

于是三直线组的一级行列式

$$\Delta_1=a\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 3+2\sqrt{3}\sin\theta & \sqrt{3}(1-2\cos\theta) & 1-2\cos\theta \\ 1+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta & 3\sin\theta+3\sqrt{3}\cos\theta-3\sqrt{3} & \sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(c_3+c_1)\div 2]{(c_2+\sqrt{3}c_1)\div 2\sqrt{3}} 4\sqrt{3}a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3+2\sqrt{3}\sin\theta & 2-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta & 2-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta \\ 1+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta & 2\cos\theta-1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-c_3} 4\sqrt{3}a\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta & 2-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta & 2-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta \\ 1+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta & 2\cos\theta-1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4\sqrt{3}a\begin{vmatrix} 2+2\cos\theta & 1+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta \\ 1+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta & 2\cos\theta-1 \end{vmatrix}$$

$$= 4\sqrt{3}a[2(1+\cos\theta)(2\cos\theta-1)-(1+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)(1+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)]$$

$$= 0,$$

所以 AD, BE, CF 三线共点.

注 9.2.3 当把 E 点限制在三角形 ABD 外接圆的劣弧 BD 上时, 例 9.2.4 即为1997 年中国国家队集训队测试题的结论.

9.3 两三角形的垂三角形有向面积的定值定理及应用

两个三角形的透视性是几何学中一个十分有趣的问题, 很多数学家对这个问题都进行过研究, 并得到了不同形式的透视的充要条件.

本节用有向面积的观点探讨这个问题. 首先论述两三角形的垂三角形有关的概念; 其次给出两三角形及其垂三角形有向面积的一个关系定理及其推论, 包括著名的共点线的施泰纳定理; 再次分别给出两三角形的顶点向量数量积、两三角形顶点间的距离之间和两个三角形外正方形中心三角形有向面积之间的定值定理, 并据此推出两三角形垂直透射的几个充分必要条件, 包括两个著名的 Zvonko Cerin's 定理. 我们发现, 这些充分必要条件都和两三角形的坐标的某种对称性有关.

9.3.1 两三角形的垂三角形有关的概念

定义 9.3.1 设 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 是平面三角形, 过三角形 $P_1P_2P_3(Q_1Q_2Q_3)$ 的顶点 $P_i(Q_i)$ 作三角形 $Q_1Q_2Q_3(P_1P_2P_3)$ 的边 $Q_{i+1}Q_{i+2}(P_{i+1}P_{i+2})$ 的垂线 $h_i(h_i')$ $(i=1,2,3)$, 则称三垂线 h_1, h_2, h_3 (h_1', h_2', h_3') 依次构成的三角形 $h_1h_2h_3(h_1'h_2'h_3')$ 为三角形 $P_1P_2P_3(Q_1Q_2Q_3)$ 对三角形 $Q_1Q_2Q_3(P_1P_2P_3)$ 的垂三角形 (图 9.3.1).

特别, 当三垂线$h_1, h_2, h_3(h_1', h_2', h_3')$共点时, 我们把其交点看成是三角形 $P_1P_2P_3$ $(Q_1Q_2Q_3)$ 对三角形 $Q_1Q_2Q_3(P_1P_2P_3)$ 的垂三角形的特殊情形.

显然, 三角形 $P_1P_2P_3$ 对其自身的垂三角形, 就是三角形 $P_1P_2P_3$ 的垂心.

定义 9.3.2 设 $h_i(h_i')$ 是 $P_1P_2P_3(Q_1Q_2Q_3)$ 的顶点 $P_i(Q_i)$ 到三角形 $Q_1Q_2Q_3$ $(P_1P_2P_3)$ 的边 $Q_{i+1}Q_{i+2}(P_{i+1}P_{i+2})(i=1,2,3)$ 的垂线. 若 $h_1, h_2, h_3(h_1', h_2', h_3')$ 三线共点, 则称三角形 $P_1P_2P_3$ 与三角形 $Q_1Q_2Q_3$(三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 与三角形 $P_1P_2P_3$) 是垂直透射的.

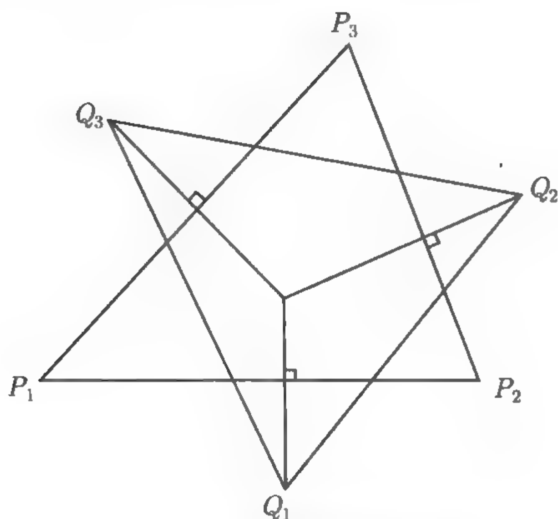


图 9.3.1 两三角形的垂直透射

显然, 三角形 $P_1P_2P_3$ 与其自身是垂直透射的, 因此三角形的垂直透射关系是自反的.

又根据三角形的高线定理, 即得三角形 $P_1P_2P_3$ 与其垂足三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 是垂直透射的.

定义 9.3.3 以三角形所在平面上一点为起点、三角形的一个顶点为终点的向量称为三角形的顶点向量.

显然, 终点为三角形顶点的向径和三角形的边向量都是三角形的顶点向量的特殊情形.

9.3.2 两三角形及其垂三角形有向面积之间的关系定理及其应用

定理 9.3.1 设非退化三角形 $P_1P_2P_3(Q_1Q_2Q_3)$ 顶点的坐标分别为 $P_i(x_i,y_i)$ $(Q_i(u_i,v_i)), h_i(h_i')$ 是三角形 $P_1P_2P_3(Q_1Q_2Q_3)$ 的顶点 $P_i(Q_i)$ 到三角形 $Q_1Q_2Q_3$ $(P_1P_2P_3)$ 的边 $Q_{i+1}Q_{i+2}(P_{i+1}P_{i+2})(i=1,2,3)$ 的垂线, $C_i=(u_{i+1}-u_{i+2})x_i+(v_{i+1}-v_{i+2})y_i(i=1,2,3)$, 则

$$D_{Q_1Q_2Q_3}D_{h_1h_2h_3}=D_{P_1P_2P_3}D_{h_1'h_2'h_3'}=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{3}C_i\right)^2. \tag{9.3.1}$$

证明 (如图 9.3.2) 直线 $Q_{i+1}Q_{i+2}$ 的方程为

$$(v_{i+1}-v_{i+2})x+(u_{i+2}-u_{i+1})y+(u_{i+1}v_{i+2}-u_{i+2}y_{i+1})=0,$$

设垂线 h_i 的方程为

$$(u_{i+2}-u_{i+1})x+(v_{i+2}-v_{i+1})y+C_i'=0,$$

将 $P_i(x_i,y_i)$ 的坐标代入求得

$$C_i=C_i'(i=1,2,3).$$

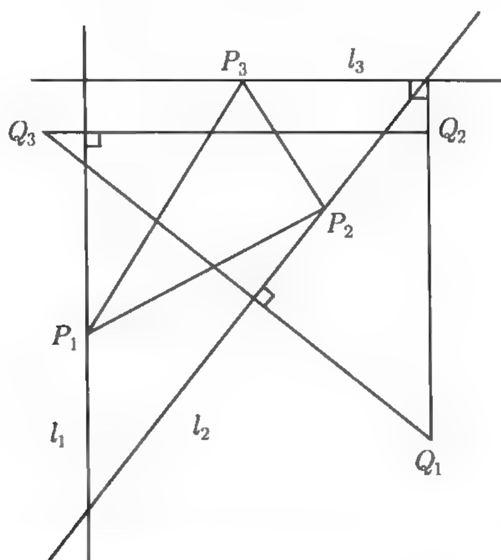


图 9.3.2　三角形 $P_1P_2P_3$ 对三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的垂三角形

由于

$$\prod_{i=1}^{3}[(u_{i+2}-u_{i+1})(v_i-v_{i+2})-(u_i-u_{i+2})(v_{i+2}-v_{i+1})]$$
$$=\prod_{i=1}^{3}[(u_iv_{i+1}-u_{i+1}v_i)+(u_{i+1}v_{i+2}-u_{i+2}v_{i+1})+(u_{i+2}v_i-u_iv_{i+2})]=8D^3_{Q_1Q_2Q_3},$$

故由式 (9.1.4) 得

$$D_{h_1h_2h_3}=\frac{1}{16D^3_{Q_1Q_2Q_3}}\begin{vmatrix} u_3-u_2 & v_3-v_2 & C_1 \\ u_1-u_3 & v_1-v_3 & C_2 \\ u_2-u_1 & v_2-v_1 & C_3 \end{vmatrix}^2$$
$$=\frac{1}{16D^3_{P_1P_2P_3}}\begin{vmatrix} 0 & 0 & C_1+C_2+C_3 \\ u_1-u_3 & v_1-v_3 & C_2 \\ u_2-u_1 & v_2-v_1 & C_2 \end{vmatrix}^2$$
$$=\frac{(C_1+C_2+C_3)^2}{16D^3_{Q_1Q_2Q_3}}\begin{vmatrix} u_1-u_3 & v_1-v_3 \\ u_2-u_1 & v_2-v_1 \end{vmatrix}^2=\frac{(C_1+C_2+C_3)^2}{4D_{Q_1Q_2Q_3}},$$

因此 $D_{Q_1Q_2Q_3}D_{h_1h_2h_3}=\dfrac{1}{4}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{3}C_i\right)^2$.

类似地, 可以证明 $D_{P_1P_2P_3}D_{h'_1h'_2h'_3}=\dfrac{1}{4}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{3}C_i\right)^2$, 所以式 (9.3.1) 成立. 注意到式 (9.3.1) 的右边是非负的, 故由定理 9.3.1 即得下面的推论.

推论 9.3.1 三角形 $P_1P_2P_3(Q_1Q_2Q_3)$ 对三角形 $Q_1Q_2Q_3(P_1P_2P_3)$ 的垂三角形 $h_1h_2h_3(h_1'h_2'h_3')$ 与三角形 $Q_1Q_2Q_3(P_1P_2P_3)$ 是同向三角形.

推论 9.3.2 非退化三角形 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 的垂直透射关系是对称的.

证明 由定理 9.3.1 知, $D_{h_1h_2h_3}=0 \Leftrightarrow D_{h_1'h_2'h_3'}=0$, 即 h_1,h_2,h_3 相交于一点的充分必要条件是 $h_1'h_2'h_3'$ 相交于一点, 因此两三角形 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 的垂直透射关系是对称的.

推论 9.3.3(共点线的施泰纳定理) 设 $h_i(h_i')$ 是 $P_1P_2P_3(Q_1Q_2Q_3)$ 的顶点 $P_i(Q_i)$ 到三角形 $Q_1Q_2Q_3(P_1P_2P_3)$ 的边 $Q_{i+1}Q_{i+2}(P_{i+1}P_{i+2})(i=1,2,3)$ 的垂线, 则 h_1,h_2,h_3 三线共点的充要条件是 h_1',h_2',h_3' 三线共点.

证明 (如图 9.3.3) 当三角形 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 均为非退化三角形时, 根据推论 9.3.2 即得.

当三角形 $P_1P_2P_3$ 或 $Q_1Q_2Q_3$ 退化成一线段时, 根据例 9.2.4 知结论成立.

当三角形 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 退化成两线段时, $h_1,h_2,h_3;h_1',h_2',h_3'$ 是两组平行的直线, 它们均相交于无穷远点, 结论亦成立.

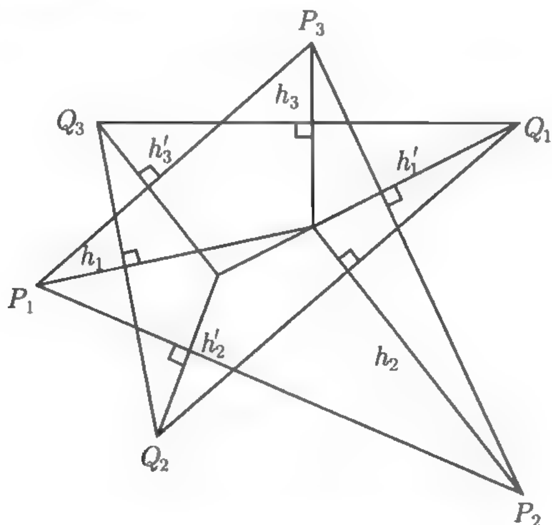


图 9.3.3 共点线的施泰纳定理

推论 9.3.4 非退化的三角形 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 垂直透射的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{3} C_i = 0.$$

证明 由式 (9.3.1) 即得.

9.3.3 两三角形的顶点向量数量积的定值定理及其应用

定理 9.3.2 设 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 是同一平面上的两个三角形, 它们顶点的坐标分别为 $P_i(x_i,y_i)$, $Q_i(u_i,v_i)(i=1,2,3)$, P 是平面上任意一点, $C_i=(u_{i+1}-$

$u_{i+2})x_i+(v_{i+1}-v_{i+2})y_i(i=1,2,3)$, 则

$$\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{PP_i}\cdot\overrightarrow{Q_{i+1}Q_{i+2}}=\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{PQ_i}\cdot\overrightarrow{P_{i+1}P_{i+2}}=\sum_{i=1}^{3}C_i(\text{为定值}). \tag{9.3.2}$$

证明　设 P 点的坐标为 $P(x,y)$, 则

$$\overrightarrow{PP_i}=\{x_i-x,y_i-y\},\overrightarrow{Q_iQ_{i+1}}=\{u_{i+1}-u_i,v_{i+1}-v_i\}(i=1,2,3),$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{PP_i}\cdot\overrightarrow{Q_{i+1}Q_{i+2}}&=\sum_{i=1}^{3}[(x_i-x)(u_{i+2}-u_{i+1})+(y_i-y)(v_{i+2}-v_{i+1})]\\&=\sum_{i=1}^{3}[(x_iu_{i+2}-x_iu_{i+1})-x(u_{i+2}-u_{i+1})\\&\quad+(y_iv_{i+2}-y_iv_{i+1})-y(v_{i+2}-v_{i+1})]\\&=\sum_{i=1}^{3}[(x_{i+1}u_i-x_iu_{i+1})+(y_{i+1}v_i-y_iv_{i+1})]=\sum_{i=1}^{3}C_i.\end{aligned}$$

同理可证 $\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{PQ_i}\cdot\overrightarrow{P_{i+1}P_{i+2}}=\sum_{i=1}^{3}C_i$, 因此式 (9.3.2) 成立.

由定理 9.3.1 和定理 9.3.2 即得

推论 9.3.5　设 $P_1P_2P_3,Q_1Q_2Q_3$ 是同一平面上的两个三角形, P 是三角形所在平面上任意一点, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{PQ_i}\cdot\overrightarrow{P_{i+1}P_{i+2}}\right)^2=4D_{Q_1Q_2Q_3}D_{h_1h_2h_3}=4D_{P_1P_2P_3}D_{h_1'h_2'h_3'}(\text{为定值}).$$

推论 9.3.6[27]　设 $P_1P_2P_3,Q_1Q_2Q_3$ 是同一平面上的两个三角形, P 是三角形所在平面上任意一点, 则非退化的三角形 $P_1P_2P_3,Q_1Q_2Q_3$ 垂直透射的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{PP_i}\cdot\overrightarrow{Q_{i+1}Q_{i+2}}=0\ \text{或}\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{PQ_i}\cdot\overrightarrow{P_{i+1}P_{i+2}}=0.$$

证明　由推论 9.3.4 和式 (9.3.2) 即得.

9.3.4　两三角形顶点间的距离之间的关系及其应用

定理 9.3.3　如图 9.3.4, 设 $P_1P_2P_3,Q_1Q_2Q_3$ 是同一平面上的两个三角形, 它们顶点的坐标分别为 $P_i(x_i,y_i)$, $Q_i(u_i,v_i)(i=1,2,3),C_i=(u_{i+1}-u_{i+2})x_i+(v_{i+1}-v_{i+2})y_i(i=1,2,3)$, 则

$$\sum_{i=1}^{3}(d_{P_{i+1}Q_i}^2 - d_{Q_{i+1}P_i}^2) = 2\sum_{i=1}^{3}C_i. \tag{9.3.3}$$

证明 根据两点间的距离公式得

$$\sum_{i=1}^{3}(d_{P_{i+1}Q_i}^2 - d_{Q_{i+1}P_i}^2) = \sum_{i=1}^{3}[(x_{i+1}-u_i)^2+(y_{i+1}-v_i)^2-(u_{i+1}-x_i)^2-(v_{i+1}-y_i)^2]$$

$$=2\sum_{i=1}^{3}[(x_iu_{i+1}-x_{i+1}u_i)+(y_iv_{i+1}-y_{i+1}v_i)] = 2\sum_{i=1}^{3}C_i.$$

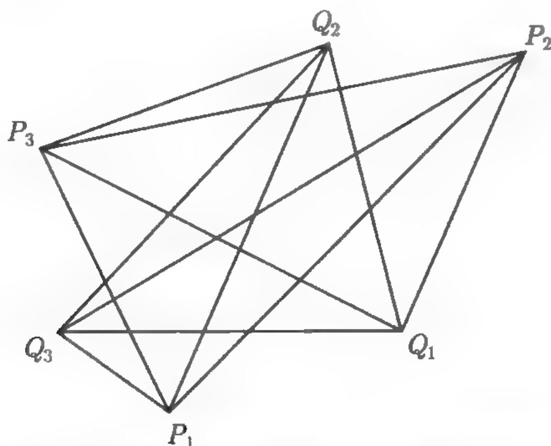


图 9.3.4 两三角形顶点之间的距离

推论 9.3.7 设 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 是同一平面上的两个三角形, $h_i(h_i')$ 是三角形 $P_1P_2P_3(Q_1Q_2Q_3)$ 的顶点 $P_i(Q_i)$ 到 $Q_1Q_2Q_3(P_1P_2P_3)$ 的边 $Q_{i+1}Q_{i+2}(P_{i+1}P_{i+2})(i=1,2,3)$ 的垂线, 则

$$D_{Q_1Q_2Q_3}D_{h_1h_2h_3} = D_{P_1P_2P_3}D_{h_1'h_2'h_3'} = \left[\sum_{i=1}^{3}(d_{P_{i+1}Q_i}^2 - d_{Q_{i+1}P_i}^2)\right]^2.$$

证明 由式 (9.3.1) 及 (9.3.3) 即得.

推论 9.3.8 设 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 是同一平面上的两个三角形, P 是平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{PP_i}\cdot\overrightarrow{Q_{i+1}Q_{i+2}} = \sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{PQ_i}\cdot\overrightarrow{P_{i+1}P_{i+2}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(d_{P_{i+1}Q_i}^2 - d_{Q_{i+1}P_i}^2)(\text{为定值}).$$

证明 由式 (9.3.2) 及 (9.3.3) 即得.

推论 9.3.9(Zvonko Cerin's 定理)[25] 两个非退化的三角形 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 垂直透射的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{3}d_{P_{i+1}Q_i}^2 = \sum_{i=1}^{3}d_{Q_{i+1}P_i}^2.$$

证明 由式 (9.3.3) 及推论 9.3.4 即得.

9.3.5　两个三角形外正方形中心三角形有向面积之间的关系及其应用

定理 9.3.4　(如图 9.3.5) 设 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 是同一平面上的两个三角形, 它们顶点的坐标分别为 $P_i(x_i, y_i)$, $Q_i(u_i, v_i)(i=1,2,3), C_i=(u_{i+1}-u_{i+2})x_i+(v_{i+1}-v_{i+2})y_i(i=1,2,3)$. 以 $P_iQ_{i+2}(Q_{i+2}P_{i+1})(i=1,2,3)$ 为边向外分别作正方形, 正方形中心分别为 $M_i(N_i)(i=1,2,3)$, 则

$$D_{M_1M_2M_3}-D_{N_1N_2N_3}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}C_i. \tag{9.3.4}$$

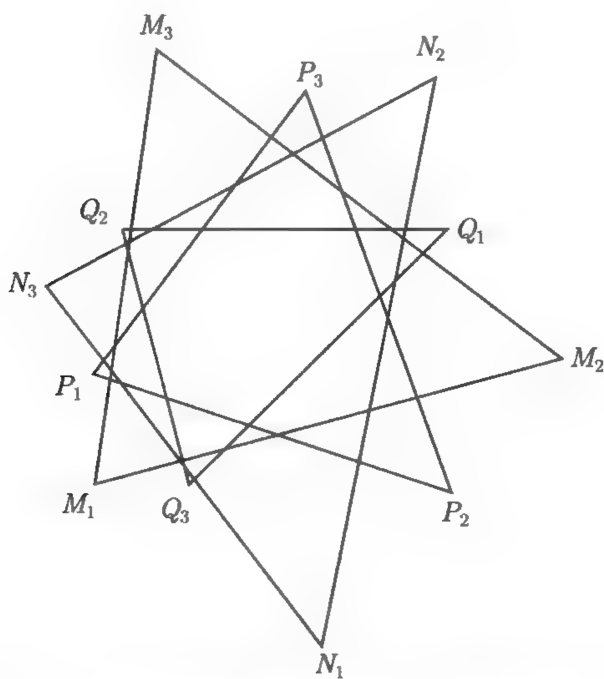


图 9.3.5　两三角形的外正方形中心所构成的三角形

证明　由定理 7.1.1 的证明可知各正方形的中心的坐标分别为

$$M_i\left(\frac{1}{2}(x_i+u_{i+2}+v_{i+2}-y_i),\frac{1}{2}(x_i+y_i+v_{i+2}-u_{i+2})\right)(i=1,2,3),$$

$$N_i\left(\frac{1}{2}(x_{i+1}+y_{i+1}+u_{i+2}-v_{i+2}),\frac{1}{2}(y_{i+1}+u_{i+2}+v_{i+2}-x_{i+1})\right)(i=1,2,3).$$

于是

$$\begin{aligned}
&D_{M_1M_2M_3}\\
=&\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{3}[(x_i+u_{i+2}+v_{i+2}-y_i)(x_{i+1}+y_{i+1}+v_i-u_i)\\
&-(x_{i+1}+u_i+v_i-y_{i+1})(x_i+y_i+v_{i+2}-u_{i+2})]\\
=&\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{3}[(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+(x_iv_i-x_{i+1}v_{i+2})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(x_{i+1}u_{i+2}-x_iu_i)+(x_{i+1}u_{i+2}-x_iu_i)\\
&+(y_{i+1}u_{i+2}-y_iu_i)+(u_{i+2}v_i-u_iv_{i+2})+(x_{i+1}v_{i+2}-x_iv_i)\\
&+(y_{i+1}v_{i+2}-y_iv_i)+(u_{i+2}v_i-u_iv_{i+2})+(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)\\
&+(y_{i+1}v_{i+2}-y_iv_i)+(y_iu_i-u_{i+2}y_{i+1})]\\
=&\frac{1}{2}D_{P_1P_2P_3}+\frac{1}{2}D_{Q_1Q_2Q_3}+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}[(x_{i+1}u_{i+2}-x_iu_i)+(y_{i+1}v_{i+2}-y_iv_i)]\\
=&\frac{1}{2}D_{P_1P_2P_3}+\frac{1}{2}D_{Q_1Q_2Q_3}+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}(x_iu_{i+1}-x_iu_i+y_iv_{i+1}-y_iv_i),
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
D_{N_1N_2N_3}=\frac{1}{2}D_{P_1P_2P_3}+\frac{1}{2}D_{Q_1Q_2Q_3}+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}(x_{i+1}u_i-x_iu_i+y_{i+1}v_i-y_iv_i).
$$

于是

$$
D_{M_1M_2M_3}-D_{N_1N_2N_3}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}[(x_iu_{i+1}-x_{i+1}u_i)+(y_iv_{i+1}-y_{i+1}v_i)]=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}C_i.
$$

推论 9.3.10 设 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 是同一平面上的两个三角形, $h_i(h'_i)$ 是三角形 $P_1P_2P_3(Q_1Q_2Q_3)$ 的顶点 $P_i(Q_i)$ 到三角形 $Q_1Q_2Q_3(P_1P_2P_3)$ 的边 $Q_{i+1}Q_{i+2}$ $(P_{i+1}P_{i+2})(i=1,2,3)$ 的垂线, 则

$$
D_{Q_1Q_2Q_3}D_{h_1h_2h_3}=D_{P_1P_2P_3}D_{h'_1h'_2h'_3}=4(D_{M_1M_2M_3}-D_{N_1N_2N_3})^2.
$$

证明 由式 (9.3.1) 及 (9.3.4) 即得.

推论 9.3.11 设 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 是同一平面上的两个三角形, P 是平面上任意一点, 则

$$
\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{PP_i}\cdot\overrightarrow{Q_{i+1}Q_{i+2}}=\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{PQ_i}\cdot\overrightarrow{P_{i+1}P_{i+2}}=4(D_{M_1M_2M_3}-D_{N_1N_2N_3})(\text{为定值}).
$$

证明 由式 (9.3.2) 及 (9.3.4) 即得.

推论 9.3.12(Zvonko Cerin's 定理)[25] 设 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 是同一平面上的两个三角形. 以 $P_iQ_{i+2}(Q_{i+2}P_{i+1})(i=1,2,3)$ 为边向外分别作正方形, 正方形中心分别为 $M_i(N_i)(i=1,2,3)$, 则两三角形 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 垂直透射的充分必要条件是

$$
D_{M_1M_2M_3}=D_{N_1N_2N_3}.
$$

证明 由式 (9.3.4) 及推论 9.3.4 即得.

9.4 三角形与二次曲线交点的垂线三角形有向面积公式及应用

我们知道, 三角形与圆交点有如下有趣的一个性质: “自三角形各边与圆的交点作交点所在边的垂线, 若其中三垂线相交于一点, 则另外三垂线也相交于一点.” 这个定理可以根据圆的某种对称性给出证明, 但这种方法对一般的二次曲线不能奏效.

本节用有向面积的观点探讨这个问题, 分别给出三角形与各种二次曲线交点的垂线三角形有向面积公式, 并据此得到两垂线三角形有向面积之间的关系定理等结论, 从而把三角形与圆的交点的垂线三角形定理推广到一般二次曲线的情形.

9.4.1 三角形各边所在直线与椭圆交点的垂线三角形有向面积公式及其应用

定理 9.4.1 设三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的交点为 $Q_i(a\cos\alpha_i, b\sin\alpha_i), R_i\ (a\cos\beta_i, b\sin\beta_i)$, 过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 $s_i\ (t_i)(i=1,2,3)$, 则

$$D_{s_1s_2s_3}=\frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{\delta_1C_3'+\delta_2C_1'+\delta_3C_2'}{\delta_1C_3+\delta_2C_1+\delta_3C_2}\right)^2D_{P_1P_2P_3},\tag{9.4.1}$$

$$D_{t_1t_2t_3}=\frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{\delta_1C_3''+\delta_2C_1''+\delta_3C_2''}{\delta_1C_3+\delta_2C_1+\delta_3C_2}\right)^2D_{P_1P_2P_3},\tag{9.4.2}$$

其中$\delta_i=\sin\dfrac{\alpha_{i+1}+\beta_{i+1}-\alpha_i-\beta_i}{2}, C_i'=b^2\sin\alpha_i\cos\dfrac{\alpha_i+\beta_i}{2}-a^2\cos\alpha_i\sin\dfrac{\alpha_i+\beta_i}{2}$, $C_i''=b^2\sin\beta_i\cos\dfrac{\alpha_i+\beta_i}{2}-a^2\cos\beta_i\sin\dfrac{\alpha_i+\beta_i}{2}, C_i=\cos\dfrac{\alpha_i-\beta_i}{2}$.

证明 由 Q_i, R_i 的坐标, 求得 P_iP_{i+1} 的方程为

$$b(\sin\alpha_i-\sin\beta_i)x+a(\cos\beta_i-\cos\alpha_i)y+ab\sin(\beta_i-\alpha_i)=0,$$

即

$$b\cos\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot x+a\sin\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot y-abC_i=0\ (i=1,2,3).$$

于是由线型三角形有向面积公式, 得

$$D_{P_1P_2P_3}=\frac{(ba)^2(-ab)^2}{2(ab)^3\prod\limits_{i=1}^{3}\delta_i}\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2} & \sin\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2} & C_1\\ \cos\dfrac{\alpha_2+\beta_2}{2} & \sin\dfrac{\alpha_2+\beta_2}{2} & C_2\\ \cos\dfrac{\alpha_3+\beta_3}{2} & \sin\dfrac{\alpha_3+\beta_3}{2} & C_3\end{vmatrix}^2$$

$$=\frac{ab\left(\delta_1C_3+\delta_2C_1+\delta_3C_2\right)^2}{2\prod\limits_{i=1}^{3}\delta_i}. \tag{9.4.3}$$

设 $s_i(t_i)$ 的方程

$$a\sin\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot x-b\cos\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot y+c_i=0\ (i=1,2,3),$$

分别将 $Q_i(a\cos\alpha_i,b\sin\alpha_i),R_i\ (a\cos\beta_i,b\sin\beta_i)$ 的坐标代入, 求得 $c_i=C'_i$ 和 $c_i=C''$. 于是

$$s_i: a\sin\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot x-b\cos\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot y+C'_i=0,$$

$$t_i: a\sin\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot x-b\cos\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot y+C''_i=0.$$

所以

$$D_{s_1s_2s_3}=\frac{a^2(-b)^2}{2(ab)^3\prod\limits_{i=1}^{3}\delta_i}\begin{vmatrix}\sin\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} & \cos\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} & C'_1\\ \sin\frac{\alpha_2+\beta_2}{2} & \cos\frac{\alpha_2+\beta_2}{2} & C'_2\\ \sin\frac{\alpha_3+\beta_3}{2} & \cos\frac{\alpha_3+\beta_3}{2} & C'_3\end{vmatrix}^2$$

$$=\frac{(\delta_1C'_3+\delta_2C'_1+\delta_3C'_2)^2}{2ab\prod\limits_{i=1}^{3}\delta_i}, \tag{9.4.4}$$

类似地

$$D_{t_1t_2t_3}=\frac{(\delta_1C''_3+\delta_2C''_1+\delta_3C''_2)^2}{2ab\prod\limits_{i=1}^{3}\delta_i}, \tag{9.4.5}$$

因此式 (9.4.4)÷(9.4.3), 式 (9.4.5)÷(9.4.3), 化简即得式 (9.4.1) 和 (9.4.2).

推论 9.4.1 设三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与 $\odot O: x^2+y^2=a^2$ 的交点为 $Q_i(a\cos(\theta_i-\gamma_i),a\sin(\theta_i-\gamma_i)),R_i\ (a\cos(\theta_i+\gamma_i),a\sin(\theta_i+\gamma_i))(i=1,2,3;0<\gamma_i\leqslant\pi/2)$, 三过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 $s_i\ (t_i)(i=1,2,3)$, 则

$$D_{s_1s_2s_3}=D_{t_1t_2t_3}=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)\sin\gamma_{i+2}}{\sum\limits_{i=1}^{3}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)\cos\gamma_{i+2}}\right)^2 D_{P_1P_2P_3}$$

$$=\frac{a^2\left(\sum_{i=1}^{3}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)\sin\gamma_{i+2}\right)^2}{2\prod_{i=1}^{3}\sin(\theta_{i+1}-\theta_i)}.$$

证明　令 $\alpha_i=\theta_i-\gamma_i,\beta_i=\theta_i+\gamma_i\ (i=1,2,3)$, 由定理 9.4.1 结论及证明化简即得.

推论 9.4.2　设三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的交点为 $Q_i(a\cos\alpha_i,b\sin\alpha_i),R_i\ (a\cos\beta_i,b\sin\beta_i)$, 过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 $s_i\ (t_i)(i=1,2,3)$, 则

$$D_{s_1s_2s_3}=\left(\frac{\delta_1C_3'+\delta_2C_1'+\delta_3C_2'}{\delta_1C_3''+\delta_2C_1''+\delta_3C_2''}\right)^2D_{t_1t_2t_3}. \tag{9.4.6}$$

证明　式 (9.4.1)÷(9.4.2), 化简即得式 (9.4.6).

推论 9.4.3　设三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与椭圆的交点为 Q_i,R_i, 过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 $s_i\ (t_i)(i=1,2,3)$, 则 s_1,s_2,s_3 相交于一点的充分必要条件 t_1,t_2,t_3 相交于一点.

证明　适当选择坐标系使椭圆的方程如定理 9.4.1, 根据推论 9.4.2 可知, s_1,s_2,s_3 相交于一点 $\Leftrightarrow D_{s_1s_2s_3}=0\Leftrightarrow D_{t_1t_2t_3}=0\Leftrightarrow t_1,t_2,t_3$ 相交于一点.

推论 9.4.4　设三角形 $P_1P_2P_3$ 的边 P_iP_{i+1} 与 $\odot O$ 的交点依次为 $Q_i,R_i\ (i=1,2,3)$. 则过 Q_i 作 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 的垂线相交于一点的充分必要条件是过 R_i 作 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 的垂线相交于一点.

注 9.4.1　推论 9.4.4 的必要性即 1914 年匈牙利数学奥林匹克竞赛题.

9.4.2　三角形各边所在直线与双曲线交点的垂线三角形有向面积公式及其应用

定理 9.4.2　设三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 的交点为 $Q_i(a\sec\alpha_i,b\tan\alpha_i),R_i\ (a\sec\beta_i,b\tan\beta_i)$, 过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 $s_i\ (t_i)(i=1,2,3)$,

$$D_{s_1s_2s_3}=-\frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{\delta_1C_3'+\delta_2C_1'+\delta_3C_2'}{\delta_1C_3+\delta_2C_1+\delta_3C_2}\right)^2D_{P_1P_2P_3}, \tag{9.4.7}$$

$$D_{t_1t_2t_3}=-\frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{\delta_1C_3''+\delta_2C_1''+\delta_3C_2''}{\delta_1C_3+\delta_2C_1+\delta_3C_2}\right)^2D_{P_1P_2P_3}, \tag{9.4.8}$$

其中$\delta_i=\sin\dfrac{\alpha_{i+1}+\beta_{i+1}-\alpha_i+\beta_i}{2},C_i'=b^2\tan\alpha_i\cos\dfrac{\alpha_i-\beta_i}{2}-a^2\sec\alpha_i\sin\dfrac{\alpha_i+\beta_i}{2}$, $C''_i=b^2\tan\beta_i\cos\dfrac{\alpha_i-\beta_i}{2}-a^2\sec\beta_i\sin\dfrac{\alpha_i+\beta_i}{2},C_i=\cos\dfrac{\alpha_i-\beta_i}{2}$.

证明 由 Q_i, R_i 的坐标, 求得 P_iP_{i+1} 的方程为

$$b(\tan\alpha_i - \tan\beta_i)x + a(\sec\beta_i - \sec\alpha_i)y + ab(\sec\alpha_i\tan\beta_i - \tan\alpha_i\sec\beta_i) = 0,$$

即

$$b\cos\frac{\alpha_i - \beta_i}{2}\cdot x - a\sin\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot y - abC_i = 0\ (i = 1, 2, 3).$$

于是由线型三角形有向面积公式, 得

$$\begin{aligned} D_{P_1P_2P_3} &= \frac{(-ab)^4}{2(-ab)^3\prod\limits_{i=1}^{3}\delta_i}\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha_1-\beta_1}{2} & \sin\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} & C_1 \\ \cos\frac{\alpha_2-\beta_2}{2} & \sin\frac{\alpha_2+\beta_2}{2} & C_2 \\ \cos\frac{\alpha_3-\beta_3}{2} & \sin\frac{\alpha_3+\beta_3}{2} & C_3 \end{vmatrix}^2 \\ &= -\frac{ab\left(\delta_1C_3 + \delta_2C_1 + \delta_3C_2\right)^2}{2\prod\limits_{i=1}^{3}\delta_i}. \end{aligned} \tag{9.4.9}$$

设 $s_i(t_i)$ 的方程为

$$a\sin\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot x + b\cos\frac{\alpha_i-\beta_i}{2}\cdot y + c_i = 0\ (i = 1, 2, 3),$$

分别将 $Q_i(a\sec\alpha_i, b\tan\alpha_i), R_i\ (a\sec\beta_i, b\tan\beta_i)$ 的坐标分别代入, 求得 $c_i = C'_i$ 和 $c_i = C''_i$. 于是

$$s_i : a\sin\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot x + b\cos\frac{\alpha_i-\beta_i}{2}\cdot y + C'_i = 0,$$

$$t_i : a\sin\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot x + b\cos\frac{\alpha_i-\beta_i}{2}\cdot y + C''_i = 0.$$

所以

$$\begin{aligned} D_{s_1s_2s_3} &= \frac{(ab)^2}{2(ab)^3\prod\limits_{i=1}^{3}\delta_i}\begin{vmatrix} \sin\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} & \cos\frac{\alpha_1-\beta_1}{2} & C'_1 \\ \sin\frac{\alpha_2+\beta_2}{2} & \cos\frac{\alpha_2-\beta_2}{2} & C'_2 \\ \sin\frac{\alpha_3+\beta_3}{2} & \cos\frac{\alpha_3-\beta_3}{2} & C'_3 \end{vmatrix}^2 \\ &= -\frac{(\delta_1C'_3 + \delta_2C'_1 + \delta_3C'_2)^2}{2ab\prod\limits_{i=1}^{3}\delta_i}, \end{aligned} \tag{9.4.10}$$

类似地

$$D_{t_1t_2t_3}=\frac{(\delta_1C_3''+\delta_2C_1''+\delta_3C_2'')^2}{2ab\prod_{i=1}^{3}\delta_i},\tag{9.4.11}$$

因此式 (9.4.10)÷ 式 (9.4.9), 式 (9.4.10)÷ 式 (9.4.9), 化简即得式 (9.4.7) 和 (9.4.8).

推论 9.4.5 设三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的交点为 $Q_i(a\sec\alpha_i,a\tan\alpha_i),R_i\ (a\sec\beta_i,a\tan\beta_i)$, 过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 $s_i\ (t_i)(i=1,2,3)$, 则

$$D_{s_1s_2s_3}=D_{t_1t_2t_3}=-\left(\frac{\delta_1\tilde{C}_3+\delta_2\tilde{C}_1+\delta_3\tilde{C}_2}{\delta_1C_3+\delta_2C_1+\delta_3C_2}\right)^2D_{P_1P_2P_3}=\frac{(\delta_1\tilde{C}_3+\delta_2\tilde{C}_1+\delta_3\tilde{C}_{22})^2}{2ab\delta_1\delta_2\delta_3},$$

其中 $\tilde{C}_i=\sin\dfrac{\alpha_i-\beta_i}{2}$.

证明 令 $a=b$, 则 $C_i'=-C_i''=a^2\tilde{C}_i$, 由定理 9.4.2 结论及其证明化简即得.

推论 9.4.6 设三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 的交点为 $Q_i(a\sec\alpha_i,b\tan\alpha_i),R_i\ (a\sec\beta_i,b\tan\beta_i)$, 过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 $s_i\ (t_i)(i=1,2,3)$, 则

$$D_{s_1s_2s_3}=\left(\frac{\delta_1C_1'+\delta_2C_2'+\delta_3C_3'}{\delta_1C_1''+\delta_2C_2''+\delta_3C_3''}\right)^2D_{t_1t_2t_3}.\tag{9.4.12}$$

证明 式 (9.4.7)÷ 式 (9.4.8), 化简即得 (9.4.12) 式.

推论 9.4.7 设三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与双曲线的交点为 Q_i,R_i, 过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 $s_i\ (t_i)(i=1,2,3)$, 则 s_1,s_2,s_3 相交于一点的充分必要条件 t_1,t_2,t_3 相交于一点.

证明 适当选择坐标系使双曲线的方程如定理 9.4.2, 根据推论 9.4.6 可知, s_1,s_2,s_3 相交于一点 $\Leftrightarrow D_{s_1s_2s_3}=0\Leftrightarrow D_{t_1t_2t_3}=0\Leftrightarrow t_1,t_2,t_3$ 相交于一点.

9.4.3 三角形各边所在直线与抛物线交点的垂线三角形有向面积公式及其应用

定理 9.4.3 设三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与抛物线 $y^2=2px$ 的交点为 $Q_i(2pu_i,2pu_i^2),R_i\ (2pv_i,2pv_i^2)$, 过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 $s_i\ (t_i)(i=1,2,3)$, 则

$$D_{s_1s_2s_3}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)C_{i+2}'}{\sum_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)u_{i+2}v_{i+2}}\right)^2D_{P_1P_2P_3},\tag{9.4.13}$$

$$D_{t_1t_2t_3}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)C''_{i+2}}{\sum_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)u_{i+2}v_{i+2}}\right)^2 D_{P_1P_2P_3},\tag{9.4.14}$$

其中 $\Delta u_i=u_{i+1}-u_i, \Delta v_i=v_{i+1}-v_i, C'_i=u_i[1+(u_i+v_i)u_i], C''_i=v_i[1+(u_i+v_i)v_i]$.

证明　由 Q_i, R_i 的坐标, 求得 P_iP_{i+1} 的方程为

$$2p(u_i^2-v_i^2)x+2p(v_i-u_i)y+4p^2(u_iv_i^2-u_i^2v_i)=0,$$

即

$$(u_i+v_i)\cdot x-y-2pu_iv_i=0\ (i=1,2,3).$$

于是由线型三角形有向面积公式, 得

$$D_{P_1P_2P_3}=\frac{(-2p)^2}{2\prod_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)}\begin{vmatrix}u_1-v_1 & 1 & u_1v_1\\ u_2-v_2 & 1 & u_2v_2\\ u_3-v_3 & 1 & u_3v_3\end{vmatrix}^2$$

$$=\frac{2p^2\left[\sum_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)u_{i+2}v_{i+2}\right]^2}{\prod_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)}.\tag{9.4.15}$$

设 $s_i(t_i)$ 的方程为

$$x+(u_i+v_i)y+c_i=0\ (i=1,2,3),$$

分别将 $Q_i(2pu_i,2pu_i^2), R_i\ (2pv_i,2pv_i^2)$ 的坐标分别代入, 求得 $c_i=-2pC'_{ii}$ 和 $c_i=-2pC''_i$. 于是

$$s_i: x+(u_i+v_i)y-2pC'_i=0,$$

$$t_i: x+(u_i+v_i)y-2pC''_i=0.$$

所以

$$D_{s_1s_2s_3}=\frac{(-2p)^2}{2\prod_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)}\begin{vmatrix}1 & u_1+v_1 & C'_1\\ 1 & u_2+v_2 & C'_2\\ 1 & u_3+v_3 & C'_3\end{vmatrix}^2=\frac{2p^2\left[\sum_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)C'_{i+2}\right]^2}{\prod_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)},\tag{9.4.16}$$

类似地

$$D_{t_1t_2t_3}=\frac{2p^2\left[\sum\limits_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)C''_{i+2}\right]^2}{\prod\limits_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)},\tag{9.4.17}$$

因此式 (9.4.16)÷(9.4.15), 式 (9.4.17)÷(9.4.15), 化简即得式 (9.4.13) 和 (9.4.14).

推论 9.4.8 设三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与抛物线 $y^2=2px$ 的交点为 $Q_i(2pu_i,2pu_i^2),R_i\ (2pv_i,2pv_i^2)$, 过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 $s_i\ (t_i)(i=1,2,3)$, 则

$$D_{s_1s_2s_3}=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)C'_{i+2}}{\sum\limits_{i=1}^{3}(\Delta u_i+\Delta v_i)C''_{i+2_3}}\right)^2 D_{t_1t_2t_3}.\tag{9.4.18}$$

证明 式 (9.4.16)÷ 式 (9.4.17), 化简即得式 (9.4.18).

推论 9.4.9 设三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与抛物线的交点为 Q_i,R_i, 过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 $s_i\ (t_i)(i=1,2,3)$, 则 s_1,s_2,s_3 相交于一点的充分必要条件 t_1,t_2,t_3 相交于一点.

证明 适当选择坐标系, 使抛物线的方程如定理 9.4.3, 根据推论 9.4.8 可知, s_1,s_2,s_3 相交于一点 $\Leftrightarrow D_{s_1s_2s_3}=0\Leftrightarrow D_{t_1t_2t_3}=0\Leftrightarrow t_1,t_2,t_3$ 相交于一点.

9.4.4 三角形各边所在直线与圆锥曲线交点的垂线三角形有向面积公式及其应用

定理 9.4.4 设三角形$P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与圆锥曲线 $\rho=\dfrac{a}{1-e\cos\theta}$ 的交点为$Q_i\left(\dfrac{a\cos\alpha_i}{1-e\cos\alpha_i},\dfrac{a\sin\alpha_i}{1-e\cos\alpha_i}\right),R_i\left(\dfrac{a\cos\beta_i}{1-e\cos\beta_i},\dfrac{a\sin\beta_i}{1-e\cos\beta_i}\right)$ $(i=1,2,3)$, 过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 $s_i(t_i)(i=1,2,3)$, 则

$$D_{s_1s_2s_3}=\left(\frac{\delta_1C'_3+\delta_2C'_1+\delta_3C'_2}{\delta_1C_3+\delta_2C_1+\delta_3C_2}\right)^2 D_{P_1P_2P_3},\tag{9.4.19}$$

$$D_{t_1t_2t_3}=\left(\frac{\delta_1C''_3+\delta_2C''_1+\delta_3C''_2}{\delta_1C_3+\delta_2C_1+\delta_3C_2}\right)^2 D_{P_1P_2P_3},\tag{9.4.20}$$

其中

$$\delta_i=\sin\frac{\alpha_{i+1}+\beta_{i+1}-\alpha_i-\beta_i}{2}$$

$$+e\left(\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\sin\frac{\beta_{i+1}-\beta_i}{2}+\sin\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\cos\frac{\beta_{i+1}+\beta_i}{2}\right),$$

$$C_i=\cos\frac{\alpha_i-\beta_i}{2}, C_i'=\frac{\sin\dfrac{\alpha_i-\beta_i}{2}+eC_i\sin\alpha_i}{1-e\cos\alpha_i},$$

$$C_i''=\frac{\sin\dfrac{\beta_i-\alpha_i}{2}+eC_i\sin\beta_i}{1-e\cos\alpha_i}.$$

证明 由 Q_i, R_i 的坐标, 求得 P_iP_{i+1} 的方程为

$$\left(\frac{\sin\alpha_i}{1-e\cos\alpha_i}-\frac{\sin\beta_i}{1-e\cos\beta_i}\right)x+\left(\frac{\cos\beta_i}{1-e\cos\beta_i}-\frac{\cos\alpha_i}{1-e\cos\alpha_i}\right)y$$
$$+\frac{a\sin(\beta_i-\alpha_i)}{(1-e\cos\alpha_i)(1-e\cos\beta_i)}=0,$$

即

$$\left(\cos\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}+eC_i\right)x+\sin\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot y-aC_i=0\ (i=1,2,3).$$

于是由线型三角形有向面积公式, 得

$$D_{P_1P_2P_3}=\frac{(-a)^2}{2\prod_{i=1}^{3}\delta_i}\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}+eC_1 & \sin\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2} & C_1\\ \cos\dfrac{\alpha_2+\beta_2}{2}+eC_2 & \sin\dfrac{\alpha_2+\beta_2}{2} & C_2\\ \cos\dfrac{\alpha_3+\beta_3}{2}+eC_3 & \sin\dfrac{\alpha_3+\beta_3}{2} & C_3\end{vmatrix}^2$$
$$=\frac{a^2(\delta_1C_3+\delta_2C_1+\delta_3C_2)^2}{2\prod_{i=1}^{3}\delta_i}. \tag{9.4.21}$$

设 $s_i(t_i)$ 的方程为

$$\sin\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot x-\left(\cos\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}+eC_i\right)y+c_i=0\ (i=1,2,3),$$

分别将$Q_i\left(\dfrac{a\cos\alpha_i}{1-e\cos\alpha_i},\dfrac{a\sin\alpha_i}{1-e\cos\alpha_i}\right)$,$R_i\left(\dfrac{a\cos\beta_i}{1-e\cos\beta_i},\dfrac{a\sin\beta_i}{1-e\cos\beta_i}\right)$ 的坐标代入, 求得 $c_i=aC_i'$ 和 $c_i=aC_i''$.

于是

$$s_i:\sin\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot x-\left(\cos\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}+eC_i\right)y+aC_i'=0,$$

$$t_i:\sin\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\cdot x-\left(\cos\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}+eC_i\right)y+aC_i''=0.$$

所以

$$D_{s_1s_2s_3}=\frac{a^2}{2\prod_{i=1}^{3}\delta_i}\begin{vmatrix}\sin\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} & \cos\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}+eC_1 & C_1'\\ \sin\frac{\alpha_2+\beta_2}{2} & \cos\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}+eC_2 & C_2'\\ \sin\frac{\alpha_3+\beta_3}{2} & \cos\frac{\alpha_3+\beta_3}{2}+eC_3 & C_3'\end{vmatrix}^2$$

$$=\frac{a^2(\delta_1C_3'+\delta_2C_1'+\delta_3C_2')^2}{2\prod_{i=1}^{3}\delta_i},\tag{9.4.22}$$

类似地

$$D_{t_1t_2t_3}=\frac{a^2(\delta_1C_3''+\delta_2C_1''+\delta_3C_2'')^2}{2\prod_{i=1}^{3}\delta_i},\tag{9.4.23}$$

因此式 (9.4.22)÷(9.4.21), 式 (9.4.23)÷(9.4.21), 化简即得式 (9.4.19) 和 (9.4.20).

推论 9.4.10　设三角形$P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与圆锥曲线 $\rho=\dfrac{a}{1-e\cos\theta}$ 的交点为$Q_i\left(\dfrac{a\cos\alpha_i}{1-e\cos\alpha_i},\dfrac{a\sin\alpha_i}{1-e\cos\alpha_i}\right)$, $R_i\left(\dfrac{a\cos\beta_i}{1-e\cos\beta_i},\dfrac{a\sin\beta_i}{1-e\cos\beta_i}\right)$ $(i=1,2,3)$, 过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 s_i $(t_i)(i=1,2,3)$, 则

$$D_{s_1s_2s_3}=\left(\frac{\delta_1C_3'+\delta_2C_1'+\delta_3C_2'}{\delta_1C_3''+\delta_2C_1''+\delta_3C_2''}\right)^2D_{t_1t_2t_3}.\tag{9.4.24}$$

证明　式 (9.4.22)÷ 式 (9.4.23), 化简即得式 (9.4.26).

推论 9.4.11　设三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线与圆锥曲线的交点为 Q_i,R_i, 过 $Q_i(R_i)$ 作 P_iP_{i+1} 的垂线 s_i $(t_i)(i=1,2,3)$, 则 s_1,s_2,s_3 相交于一点的充分必要条件 t_1,t_2,t_3 相交于一点.

证明　适当选择坐标系使椭圆的方程如定理 9.4.4, 根据推论 9.4.9 可知, s_1,s_2,s_3 相交于一点 $\Leftrightarrow D_{s_1s_2s_3}=0\Leftrightarrow D_{t_1t_2t_3}=0\Leftrightarrow t_1,t_2,t_3$ 相交于一点.

9.5　平面六点组坐标行列式的一个性质与应用

本节主要讨论平面六点组坐标行列式的性质与应用. 首先给出平面六点组坐标行列式的的概念; 再给出平面六点组行列式的一个性质, 并据此推出著名的二、三重透视定理, 从而进一步揭示透视定理的本质.

9.5.1 平面六点组坐标行列式的概念

给定平面六点上的 6 个点, 将其任意分成 P_1, P_2, P_3 和 Q_1, Q_2, Q_3 两组. 设两组点的坐标分别为 $P_i(x_i, y_i)(i=1,2,3)$ 和 $Q_i(u_i, v_i)(i=1,2,3)$, 记

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 - v_1 & u_1 - x_1 & x_1v_1 - u_1y_1 \\ y_2 - v_2 & u_2 - x_2 & x_2v_2 - u_2y_2 \\ y_3 - v_3 & u_3 - x_3 & x_3v_3 - u_3y_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 - v_2 & u_2 - x_1 & x_1v_2 - u_2y_1 \\ y_2 - v_3 & u_3 - x_2 & x_2v_3 - u_3y_2 \\ y_3 - v_1 & u_1 - x_3 & x_3v_1 - u_1y_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} y_2 - v_1 & u_1 - x_2 & x_2v_1 - u_1y_2 \\ y_3 - v_2 & u_2 - x_3 & x_3v_2 - u_2y_3 \\ y_1 - v_3 & u_3 - x_1 & x_1v_3 - u_3y_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} y_1 - v_1 & u_1 - x_1 & x_1v_1 - u_1y_1 \\ y_2 - v_3 & u_3 - x_2 & x_2v_3 - u_3y_2 \\ y_3 - v_2 & u_2 - x_3 & x_3v_2 - u_2y_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} y_1 - v_3 & u_3 - x_1 & x_1v_3 - u_3y_1 \\ y_2 - v_2 & u_2 - x_2 & x_2v_2 - u_2y_2 \\ y_3 - v_1 & u_1 - x_3 & x_3v_1 - u_1y_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} y_1 - v_2 & u_2 - x_1 & x_1v_2 - u_2y_1 \\ y_2 - v_1 & u_1 - x_2 & x_2v_1 - u_1y_2 \\ y_3 - v_3 & u_3 - x_3 & x_3v_3 - u_3y_3 \end{vmatrix}.$$

定义 9.5.1 上述行列式 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$ 称为该六点组 $P_i(x_i, y_i)(i=1,2,3)$ 和 $Q_i(u_i, v_i)(i=1,2,3)$ 坐标的行列式.

定义 9.5.2 给定三条直线 $a_ix + b_iy + c_i = 0\ (i=1,2,3)$, 则称该三直线组系数构成的行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

为该直线组的行列式.

显然, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$ 分别是直线组 $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3; P_1Q_2, P_2Q_3, P_3Q_1; P_2Q_1, P_3Q_2, P_1Q_3; P_1Q_1, P_2Q_3, P_3Q_2; P_1Q_3, P_2Q_2, P_3Q_1; P_1Q_2, P_2Q_1, P_3Q_3$ 的一级行列式.

9.5.2 平面六点组坐标行列式的性质

定理 9.5.1 六点组 $P_i(x_i, y_i)(i=1,2,3)$ 和 $Q_i(u_i, v_i)(i=1,2,3)$ 坐标的行列式满足如下关系:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0, \tag{9.5.1}$$

$$\Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 = 0. \tag{9.5.2}$$

证明 将式 (9.5.1) 中的三个行列式展开得

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{3} [(y_i - v_i)(u_{i+1} - x_{i+1})(x_{i+2}v_{i+2} - u_{i+2}y_{i+2})$$

$$
\begin{aligned}
&- (y_{i+2} - v_{i+2})(u_{i+1} - x_{i+1})(x_i v_i - u_i y_i)] \\
=&\sum_{i=1}^{3} (u_{i+1} - x_{i+1})(x_{i+2} y_i v_{i+2} - y_i y_{i+2} u_{i+2} - x_{i+2} v_i v_{i+2} \\
&+ y_{i+2} u_{i+2} v_i - x_i y_{i+2} v_i + y_i y_{i+2} u_i + x_i v_i v_{i+2} - y_i u_i v_{i+2}) \\
=&\sum_{i=1}^{3} (x_{i+2} y_i u_{i+1} v_{i+2} - y_i y_{i+2} u_{i+1} u_{i+2} - x_{i+2} u_{i+1} v_i v_{i+2} \\
&+ y_{i+2} u_{i+1} u_{i+2} v_i - x_i y_{i+2} u_{i+1} v_i + y_i y_{i+2} u_i u_{i+1} \\
&+ x_i u_{i+1} v_i v_{i+2} - y_i u_i u_{i+1} v_{i+2} - x_{i+1} x_{i+2} y_i v_{i+2} \\
&+ x_{i+1} y_i y_{i+2} u_{i+2} + x_{i+1} x_{i+2} v_i v_{i+2} - x_{i+1} y_{i+2} u_{i+2} v_i \\
&+ x_i x_{i+1} y_{i+2} v_i - x_{i+1} y_i y_{i+2} u_i - x_i x_{i+1} v_i v_{i+2} + x_{i+1} y_i u_i v_{i+2}) \\
=&\sum_{i=1}^{3} (x_i y_{i+1} u_{i+2} v_i - y_i y_{i+1} u_i u_{i+2} - x_i u_{i+2} v_i v_{i+1} \\
&+ y_i u_i u_{i+2} v_{i+1} - x_i y_{i+2} u_{i+1} v_i + y_i y_{i+1} u_{i+1} u_{i+2} \\
&+ x_i u_{i+1} v_i v_{i+2} - y_i u_i u_{i+1} v_{i+2} - x_i x_{i+1} y_{i+2} v_{i+1} \\
&+ x_i y_{i+1} y_{i+2} u_{i+1} + x_i x_{i+1} v_{i+1} v_{i+2} - x_i y_{i+1} u_{i+1} v_{i+2} \\
&+ x_i x_{i+1} y_{i+2} v_i - x_i y_{i+1} y_{i+2} u_{i+1} - x_i x_{i+1} v_i v_{i+2} + x_i y_{i+2} u_{i+2} v_{i+1}), \quad (9.5.3)
\end{aligned}
$$

类似地

$$
\begin{aligned}
\Delta_2 =&\sum_{i=1}^{3} (x_i y_{i+1} u_i v_{i+1} - y_i y_{i+1} u_i u_{i+1} - x_i x_{i+1} y_{i+2} v_{i+2} \\
&+ x_i y_{i+1} y_{i+2} u_{i+2} - x_i u_i v_{i+1} v_{i+2} + y_i u_i u_{i+1} v_{i+2} \\
&+ x_i x_{i+1} v_i v_{i+2} - x_i y_{i+1} u_{i+2} v_i - x_i y_{i+2} u_{i+2} v_{i+1} \\
&+ y_i y_{i+1} u_i u_{i+2} + x_i x_{i+1} y_{i+2} v_{i+1} - x_i y_{i+1} y_{i+2} u_i \\
&+ x_i u_{i+2} v_i v_{i+1} - y_i u_{i+1} u_{i+2} v_i - x_i x_{i+1} v_i v_{i+1} + x_i y_{i+2} u_i v_{i+2}), \quad (9.5.4) \\
\Delta_3 =&\sum_{i=1}^{3} (x_i y_{i+1} u_{i+1} v_{i+2} - y_i y_{i+1} u_{i+1} v_{i+2} - x_i x_{i+1} y_{i+2} v_i \\
&+ x_i y_{i+1} y_{i+2} u_i - x_i u_{i+1} v_i v_{i+2} + y_i u_{i+1} u_{i+2} v_i \\
&+ x_i x_{i+1} v_i v_{i+1} - x_i y_{i+1} u_i v_{i+1} - x_i y_{i+2} u_i v_{i+2} \\
&+ y_i y_{i+1} u_i u_{i+1} + x_i x_{i+1} y_{i+2} v_{i+2} - x_i y_{i+1} y_{i+2} u_{i+1} \\
&+ x_i u_i v_{i+1} v_{i+2} - y_i u_i u_{i+2} v_{i+1} - x_i x_{i+1} v_{i+1} v_{i+2} + x_i y_{i+2} u_{i+1} v_i). \quad (9.5.5)
\end{aligned}
$$

(9.5.3)+(9.5.4)+(9.5.5) 即得式 (9.5.1).

又记

$$M_1=\sum_{i=1}^{3}(y_i-v_i)\begin{vmatrix} u_{i+2}-x_{i+1} & x_{i+1}v_{i+2}-u_{i+2}y_{i+1} \\ u_{i+1}-x_{i+2} & x_{i+2}v_{i+1}-u_{i+1}y_{i+2} \end{vmatrix},$$

$$M_2=\sum_{i=1}^{3}(x_i-u_i)\begin{vmatrix} y_{i+1}-v_{i+2} & x_{i+1}v_{i+2}-u_{i+2}y_{i+1} \\ y_{i+2}-x_{i+1} & x_{i+2}v_{i+1}-u_{i+1}y_{i+2} \end{vmatrix},$$

$$M_3\sum_{i=1}^{3}(x_iv_i-u_iy_i)\begin{vmatrix} y_{i+1}-v_{i+2} & u_{i+2}-x_{i+1} \\ y_{i+2}-v_{i+1} & v_{i+1}-x_{i+2} \end{vmatrix}.$$

将式 (9.5.2) 右边的三个行列式展开, 得

$$\Delta_4+\Delta_5+\Delta_6=M_1+M_2+M_3.$$

由于

$$\begin{aligned}
M_1=&\sum_{i=1}^{3}(y_i-v_i)[(u_{i+2}-x_{i+1})(x_{i+2}v_{i+1}-u_{i+1}y_{i+2})\\
&-(u_{i+1}-x_{i+2})(x_{i+1}v_{i+2}-u_{i+2}y_{i+1})]\\
=&\sum_{i=1}^{3}(y_i-v_i)(x_{i+2}u_{i+2}v_{i+1}-y_{i+2}u_{i+1}u_{i+2}-x_{i+1}x_{i+2}v_{i+1}+x_{i+1}y_{i+2}u_{i+1}\\
&-x_{i+1}u_{i+1}v_{i+2}+y_{i+1}u_{i+1}u_{i+2}+x_{i+1}x_{i+2}v_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1}u_{i+2})\\
=&\sum_{i=1}^{3}(x_{i+2}y_iu_{i+2}v_{i+1}-y_iy_{i+2}u_{i+1}u_{i+2}-x_{i+1}x_{i+2}y_iv_{i+1}\\
&+x_{i+1}y_iy_{i+2}u_{i+1}-x_{i+1}y_iu_{i+1}v_{i+2}+y_iy_{i+1}u_{i+1}u_{i+2}+x_{i+1}x_{i+2}y_iv_{i+2}\\
&-x_{i+2}y_iy_{i+1}u_{i+2}-x_{i+2}u_{i+2}v_iv_{i+1}+y_{i+2}u_{i+1}u_{i+2}v_i\\
&+x_{i+1}x_{i+2}v_iv_{i+1}-x_{i+1}y_{i+2}u_{i+1}v_i+x_{i+1}u_{i+1}v_iv_{i+2}\\
&-y_{i+1}u_{i+1}u_{i+2}v_i-x_{i+1}x_{i+2}v_iv_{i+2}+x_{i+2}y_{i+1}u_{i+2}v_i)\\
=&\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}u_iv_{i+2}-y_iy_{i+1}u_iu_{i+2}-x_ix_{i+1}y_{i+2}v_i+x_iy_{i+1}y_{i+2}u_i\\
&-x_iy_{i+2}u_iv_{i+1}+y_iy_{i+1}u_{i+1}u_{i+2}+x_ix_{i+1}y_{i+2}v_{i+1}\\
&-x_iy_{i+1}y_{i+2}u_i-x_iu_iv_{i+1}v_{i+2}+y_iu_iu_{i+2}v_{i+1}+x_ix_{i+1}v_iv_{i+2}-x_iy_{i+1}u_iv_{i+2}\\
&+x_iu_iv_{i+1}v_{i+2}-y_iu_iu_{i+1}v_{i+2}-x_ix_{i+1}v_{i+1}v_{i+2}+x_iy_{i+2}u_iv_{i+1})\\
=&\sum_{i=1}^{3}(-y_iy_{i+1}u_iu_{i+2}-x_ix_{i+1}y_{i+2}v_i+y_iy_{i+1}u_{i+1}u_{i+2}+x_ix_{i+1}y_{i+2}v_{i+1}\\
&+y_iu_iu_{i+2}v_{i+1}+x_ix_{i+1}v_iv_{i+2}-y_iu_iu_{i+1}v_{i+2}-x_ix_{i+1}v_{i+1}v_{i+2}).
\end{aligned}\tag{9.5.6}$$

同理

$$M_2=\sum_{i=1}^{3}(-x_iy_{i+1}y_{i+2}u_{i+1}-x_ix_{i+1}v_iv_{i+2}+x_iy_{i+1}y_{i+2}u_{i+2}+x_ix_{i+1}v_{i+1}v_{i+2}$$

$$+ y_i y_{i+1} u_i u_{i+2} + x_i u_{i+1} v_i v_{i+2} - y_i y_{i+1} u_{i+1} u_{i+2} - x_i u_{i+2} v_i v_{i+1}) \quad (9.5.7)$$

$$M_3 = \sum_{i=1}^{3} (-x_i x_{i+1} y_{i+2} v_{i+1} - x_i u_{i+1} v_i v_{i+2} + x_i x_{i+1} y_{i+2} v_i + x_i u_{i+2} v_i v_{i+1}$$
$$+ x_i y_{i+1} y_{i+2} u_{i+1} + y_i u_i u_{i+1} v_{i+2} - x_i y_{i+1} y_{i+2} u_{i+2} - y_i u_i u_{i+2} v_{i+1}) \quad (9.5.8)$$

式 (9.5.6)+(9.5.7)+(9.5.8) 得 $M_1 + M_2 + M_3 = 0$, 因此式 (9.5.2) 成立.

9.5.3 平面六点组坐标行列式性质的应用

定理 9.5.2(双重透视定理) 设 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 是两个给定的三角形. 若直线 P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 相交于 O, 直线 P_1Q_2, P_2Q_3, P_3Q_1 相交于 O_1, 则直线 P_2Q_1, P_3Q_2, P_1Q_3 相交于一点 O_2.

证明 如图 9.5.1 所示. 设三角形 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 顶点的坐标分别为 $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ 和 $Q_i(u_i, v_i)(i = 1, 2, 3)$. 因为直线 P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 相交于 O, 直线 P_1Q_2, P_2Q_3, P_3Q_1 相交于 O_1, 故由定理 9.2.1 知这两组直线的一级行列式均为零, 即 $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, 于是由式 (9.5.1) 知, 直线 P_2Q_1, P_3Q_2, P_1Q_3 的一级行列式 $\Delta_3 = 0$, 因此由定理 9.2.1 知 P_2Q_1, P_3Q_2, P_1Q_3 相交于一点 O_2.

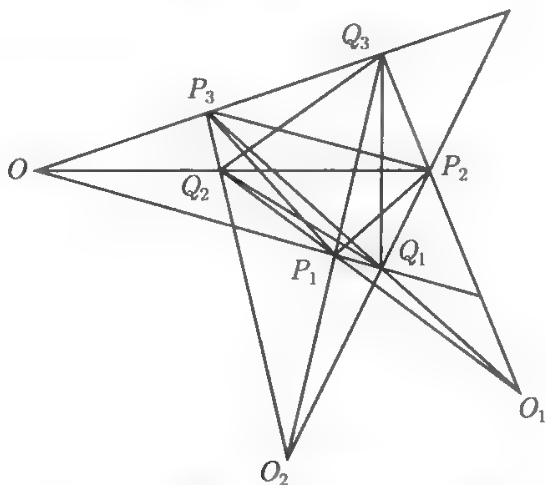


图 9.5.1 两三角形的双重透视性

注 9.5.1 将定理 9.5.2 条件和结论中的 Q_2 和 Q_3 互换, 利用式 (9.5.2) 也可以证明二重透视定理.

定理 9.5.3(三重透视定理) 设 $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ 是两个给定的三角形. 若直线 P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 相交于 O, 直线 P_1Q_1, P_2Q_3, P_3Q_2 相交于 O_1', 直线 P_1Q_3, P_2Q_2, P_3Q_1 相交于 O_2', 则直线 P_1Q_2, P_2Q_1, P_3Q_3 相交于一点 O_3'.

证明 如图 9.5.2 所示. 因为直线 P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 相交于 O, 直线 P_1Q_1, P_2Q_3, P_3Q_2 相交于 O_1', 直线 P_1Q_3, P_2Q_2, P_3Q_1 相交于 O_2', 故由定理 9.2.1 知这三组直线的一级行列式均为零, 即 $\Delta_1 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0$. 于是由式 (9.5.2) 知, 直线

P_2Q_1, P_2Q_1, P_3Q_3 的一级行列式 $\Delta_6 = 0$. 因此由定理 9.2.1 知直线 P_2Q_1, P_3Q_2, P_1Q_3 相交于一点 O_3'.

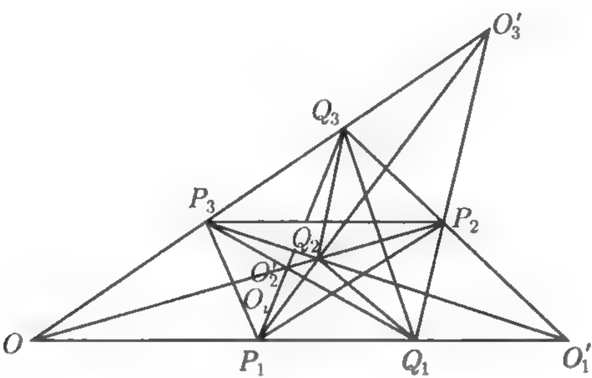


图 9.5.2 两三角形的三重透视性

注 9.5.2 由定理证明可知, 直线 P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 相交于 O 与 P_2Q_1, P_3Q_2, P_1Q_3 相交于一点 O_3' 没有直接联系, 但没有该条件只能推出二重透视定理, 而不是三重透视定理. 因此三重透视只是二重透视 "加一个" 一重透视得到的.

综上所述, 定理 9.5.1 揭示了平面六点组坐标行列式之间的关系, 它是平面六点组坐标对称性的某种必然的反映, 而多重透视定理正是源于这种必然性. 二重透视并不是两个单重透视的简单叠加, 它们需要通过式 (9.5.1) 的关系才能得到二重透视; 而三重透视则可以视为一个二重透视与一个单重透视叠加的结果, 它是由关系式 (9.5.2) 和 $D_1 = 0$ 推出的, 前者与一个二重透视有关, 后者与单重透视相连, 它们 "各行其是", 一起得出一个三重透视.

第 10 章　线三角形有向面积的定值定理及应用

10.1　分点线三角形有向面积的定值定理及应用

我们知道, 三角形的三条中线相交于一点, 这个结论至少会让初学者觉得非常奇妙. 其实, 这种偶然性的背后, 具有深刻的必然性.

本节用有向面积的观点来考察有关的问题. 首先给出分点线三角形的概念, 其次给出分点线三角形有向面积的几个定值定理, 从而揭示这些定值定理与 Pappus 重心定理、中线定理等已知结论之间的关系, 并把三角形中线定理推广到 $2k+1$ 边形的情形.

10.1.1　分点线三角形的概念

定义 10.1.1　设 $P_1P_2\cdots P_n$ 为 n 边形, Q_i 为边 P_iP_{i+1} $(i=1,2,\cdots,n)$ 所在直线上的点, 且 $\dfrac{P_iQ_i}{Q_iP_{i+1}}=\dfrac{P_2Q_2}{Q_2P_3}=\cdots=\dfrac{P_nQ_n}{Q_nP_1}=\lambda$, 则称顶点 P_i 与该顶点不相邻的分点之间的连线 P_iQ_{i+j} $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 为 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的一条 λ-分点线, 以 λ-分点线为一边的三角形为 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的一个 λ-分点线三角形 (简称分点线三角形).

特别, 当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时, n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的一条 $\dfrac{1}{2}$-分点线称为 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的一条中线, 以中线为一边的三角形称为 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的中线三角形.

显然, 过 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的一个顶点可以作 $n-2$ 条 λ-分点线, 因此 n 边形共有 $n(n-2)$ 条 λ-分点线, n 边形关于一点共有 $n(n-2)$ 个 $\lambda-$ 分点线三角形 (图 10.1.1).

10.1.2　分点线三角形有向面积的定值定理及其应用

定理 10.1.1　设 P 为 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在平面上任意一点, Q_i 为边 P_iP_{i+1} $(i=1,2,\cdots,n)$ 所在直线上的点, 且 $\dfrac{P_iQ_i}{Q_iP_{i+1}}=\dfrac{q}{p}, p+q=1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-2}D_{PP_iQ_{i+j}}=(p-q)D_{P_1P_2\cdots P_n}\tag{10.1.1}$$

其中 $P_{n+j}=P_j, Q_{n+j}=Q_j$, 以下类同.

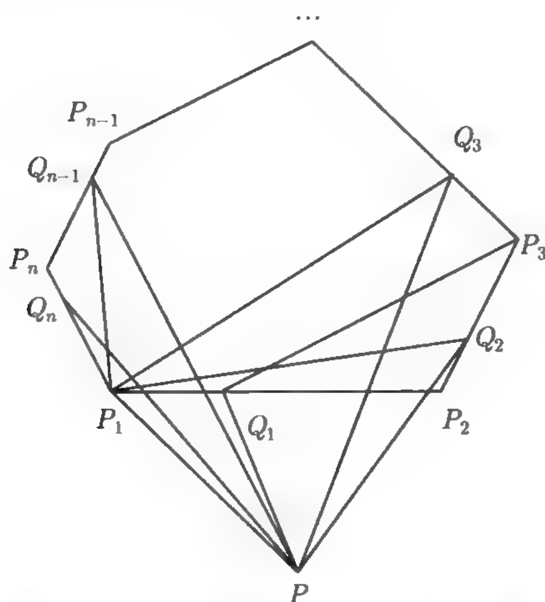


图 10.1.1 多边形的 λ-分点线三角形

证明 设 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, P 点的坐标为 $P(x,y)$. 由题设得分点 Q_i 的坐标 $Q_i(px_i+qx_{i+1},py_i+qy_{i+1})$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}D_{PP_iQ_{i+j}}\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{(xy_i-x_iy)+[x_i(py_{i+j}+qy_{i+j+1})-(px_{i+j}+qx_{i+j+1})y_i]\\
&+[p(x_{i+j}+qx_{i+j+1})y-x(py_{i+j}+qy_{i+j+1})]\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(xy_i-x_iy)+\frac{1}{2}p\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+j}-x_{i+j}y_i)+\frac{1}{2}q\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+j+1}-x_{i+j+1}y_i)\\
&+\frac{1}{2}p\sum_{i=1}^{n}(x_{i+j}y-xy_{i+j})+\frac{1}{2}q\sum_{i=1}^{n}(x_{i+j+1}y-xy_{i+j+1})\\
=&\frac{1}{2}p\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+j}-x_{i+j}y_i)+\frac{1}{2}q\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+j+1}-x_{i+j+1}y_i)(j=1,2,\cdots n-2), \quad (10.1.2)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-2}D_{PP_iQ_{i+j}}\\
=&\frac{1}{2}p\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-2}(x_iy_{i+j}-x_{i+j}y_i)+\frac{1}{2}q\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-2}(x_iy_{i+j+1}-x_{i+j+1}y_i)\\
=&\frac{1}{2}p\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+j}-x_{i+j}y_i)+\frac{1}{2}(p+q)\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)+\cdots
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(p+q)\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+n-2}-x_{i+n-2}y_i)+\frac{1}{2}q\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+n-1}-x_{i+n-1}y_i)$$

$$=\frac{1}{2}(p-q)\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)=(p-q)D_{P_1P_2\cdots P_n}.$$

注 10.1.1　定理 10.1.1 的几何意义是: n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 关于一点 P 的 $n(n-2)$ 个 λ 分点线三角形的有向面积之和恒为定值.

推论 10.1.1　设 P 为三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, Q_i 为边 P_iP_{i+1} $(i=1,2,3)$ 所在直线上的点, 且 $\dfrac{P_iQ_i}{Q_iP_{i+1}}=\dfrac{q}{p}, p+q=1$, 则

$$\sum_{i=1}^{3}D_{PP_iQ_{i+1}}=(p-q)D_{P_1P_2P_3}.$$

证明　在定理 10.1.1 中取 $n=3$ 即得.

推论 10.1.2　设 P 为 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在平面上任意一点, Q_i 为边 P_iP_{i+1} $(i=1,2,\cdots,n)$ 的中点, 则在以 P 为顶点的所有 $n(n-2)$ 个中线三角形 PP_iQ_{i+j} $(1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n-2)$ 中, 其中正向三角形的面积的和等于反向三角形的面积的和.

证明　在定理 10.1.1 中令 $p=q$, 即得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-2}D_{PP_iQ_{i+j}}=0.$$

由于正向三角形的有向面积等于三角形本身的面积, 反向三角形的有向面积等于三角形本身面积的负值, 因此上式说明推论 10.1.2 结论成立.

定理 10.1.2　设 P 为三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, $Q_1Q_2Q_3$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 分点三角形, M_i, N_i 分别是边$P_iP_{i+1}, Q_iQ_{i+1}(i=1,2,3)$ 所在直线上的点, 且 $\dfrac{P_1M_1}{M_1P_2}=\dfrac{P_2M_2}{M_2P_3}=\dfrac{P_3M_3}{M_3P_1}=\dfrac{Q_1N_1}{N_1Q_2}=\dfrac{Q_2N_2}{N_2Q_3}=\dfrac{Q_3N_3}{N_3Q_1}$, 则

$$\sum_{i=1}^{3}D_{PP_iM_{i+1}}=\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\sum_{i=1}^{3}D_{PQ_iN_{i+1}}.$$

其中 $P_{3+j}=P_j, Q_{3+j}=Q_j$, 其余类同.

证明　不妨设 $\dfrac{P_1M_1}{M_1P_2}=\dfrac{P_2M_2}{M_2P_3}=\dfrac{P_3M_3}{M_3P_1}=\dfrac{Q_1N_1}{N_1Q_2}=\dfrac{Q_2N_2}{N_2Q_3}=\dfrac{Q_3N_3}{N_3Q_1}=\dfrac{q}{p}, p+q=1$. 取 $n=3$, $j=1$, 由式 (10.1.2), 可得

$$\sum_{i=1}^{3}D_{PP_iM_{i+1}}=\frac{1}{2}p\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+\frac{1}{2}q\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)$$

$$=\frac{1}{2}p\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+\frac{1}{2}q\sum_{i=1}^{3}(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})$$
$$=\frac{1}{2}(p-q)\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)=(p-q)D_{P_1P_2P_3},$$

同理 $\sum_{i=1}^{3}D_{PQ_iN_{i+1}}=(p-q)D_{Q_1Q_2Q_3}$.

又根据定理 6.1.1, 有

$$(p-q)D_{Q_1Q_2Q_3}=\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}(p-q)D_{P_1P_2P_3},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{3}D_{PQ_iN_{i+1}}=\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\sum_{i=1}^{3}D_{PP_iM_{i+1}}.$$

推论 10.1.3 设 $Q_1Q_2Q_3$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 分点三角形. 若 $Q_1Q_2Q_3$ 不是退化的三角形, 则 G 为三角 $Q_1Q_2Q_3$ 重心的充要条件是 G 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的重心.

证明 如图 10.1.2 所示. 因为 $Q_1Q_2Q_3$ 不是退化的三角形, 所以 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3+1\neq 0$. 根据定理 10.1.2, 得 G 为三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 重心 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3}D_{PQ_iN_{i+1}}=0\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3}D_{PP_iM_{i+1}}=0\Leftrightarrow G$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的重心.

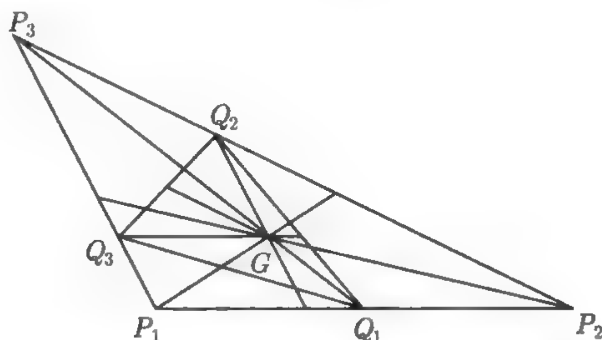


图 10.1.2 三角形的非等比分点三角形

推论 10.1.4(Pappus 重心定理) 设Q_1,Q_2,Q_3 分别为三角形 $P_1P_2P_3$ 的边 P_1P_2,P_2P_3,P_3P_1 上的点, 且 $\frac{P_1Q_1}{Q_1P_2}=\frac{P_2Q_2}{Q_2P_3}=\frac{P_3Q_3}{Q_3P_1}$, 则三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 和三角形 $P_1P_2P_3$ 具有相同的重心.

证明 在推论 10.1.3 中令 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda>0$, 即得.

引理 10.1.1　设 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+j}-x_{i+j}y_i)+\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+n-j}-x_{i+n-j}y_i)=0\ \left(j=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{n-1}{2}\right]\right). \tag{10.1.3}$$

证明　对固定的 j, $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_iy_{i+j}-x_{i+j}y_i)$ 是 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 中所有相隔 $j-1$ 个顶点的 n 对顶点 P_i, P_{i+j} $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的纵、横坐标依次交叉相乘的差的和. 因此

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+j}-x_{i+j}y_i)=\sum_{i=1}^{n}(x_{i+j}y_{n+i-j+j}-x_{n+i-j+j}y_{i+j})\\=&\sum_{i=1}^{n}(x_{i+j}y_{n+i}-x_{n+i}y_{i+j})=\sum_{i=1}^{n}(x_{i+j}y_j-x_jy_{i+j})\ \left(j=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]\right),\end{aligned}$$

从而式 (10.1.3) 成立.

特别, 当 $n=2k$ 时, $j=\left[\dfrac{n}{2}\right]=k$, 由式 (10.1.3) 得

$$\sum_{i=1}^{2k}(x_iy_{i+k}-x_{i+k}y_i)=0.$$

定理 10.1.3　设 P 为 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在平面上任意一点, Q_i 为边 P_iP_{i+1} $(i=1,2,\cdots,n)$ 的中点, 则

$$\sum_{i=1}^{n}D_{PP_iQ_{i+j}}+\sum_{i=1}^{n}D_{PP_iQ_{i+n-j-1}}=0\ \left(j=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{n-1}{2}\right]\right). \tag{10.1.4}$$

证明　在式 (10.1.2) 中令 $p=q=\dfrac{1}{2}$, 得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}D_{PP_iQ_{i+j}}=&\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+j}-x_{i+j}y_i)\\&+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+j+1}-x_{i+j+1}y_i)\ \left(j=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{n-1}{2}\right]\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}D_{PP_iQ_{i+n-j-1}}=&\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+n-j-1}-x_{i+n-j-1}y_i)\\&+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+n-j}-x_{i+n-j}y_i)\ \left(j=1,2,\cdots,\left[\frac{n-1}{2}\right]\right).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}D_{PP_iQ_{i+j}}+\sum_{i=1}^{n}D_{PP_iQ_{i+n-j-1}}\\=&\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+j}-x_{i+j}y_i)+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+n-j}-x_{i+n-j}y_i)\\&+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+j+1}-x_{i+j+1}y_i)+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+n-j-1}-x_{i+n-j-1}y_i)\\=&0\ \left(j=1,\ 2,\ \cdots,\ \left[\frac{n-1}{2}\right]\right).\end{aligned}$$

推论 10.1.5 设 P 为 $2k+1$ 边形 $P_1P_2\cdots P_{2k+1}$ 所在平面上任意一点, Q_i 为边 $P_iP_{i+1}(i=1,2\cdots,2k+1)$ 的中点, 则在中线三角形 $PP_1Q_{k+1},PP_2Q_{k+2},\cdots,PP_{2k+1}Q_k$ 中, 其中正向三角形的面积的和等于反向三角形的面积的和.

证明 当 $n=2k+1,j=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]=k$ 时, 式 (10.1.4) 中的两个和式相同. 故有

$$\sum_{i=1}^{2k+1}D_{PP_iQ_{i+j}}=0,$$

因此推论 10.1.5 结论成立.

推论 10.1.6 设 P 是三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, P_1Q_2,P_2Q_3,P_3Q_1 是三角形 $P_1P_2P_3$ 的三条中线, 则在中线三角形 PP_1Q_2,PP_2Q_3,PP_3Q_1 中, 其中一个三角形的面积等于其余两个三角形面积的和.

证明 如图 10.1.3 所示. 在推论 10.1.2 中取 $n=3$ 或推论 10.1.5 中取 $k=1$ 即得.

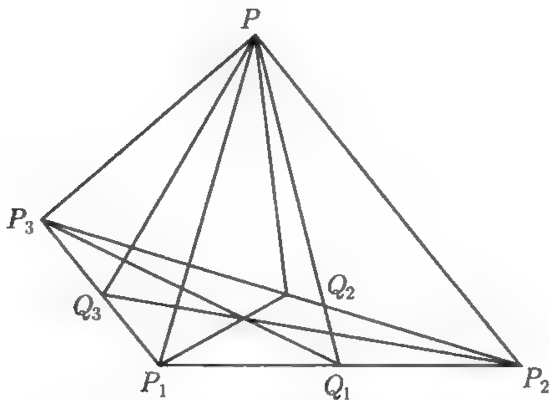


图 10.1.3 三角形的中线三角形

推论 10.1.7 在多边形 $P_1P_2\cdots P_{2k+1}$ 的中线 $P_1Q_{k+1},P_2Q_{k+2},\cdots,P_{2k+1}Q_k$ 所在的 $2k+1$ 条直线中, 如果其中有 $2k$ 条直线相交于一点, 则这 $2k+1$ 条直线相

交于一点.

证明 如图 10.1.4 所示. 不妨设 $P_1Q_{k+1}, P_2Q_{k+2}, \cdots, P_{2k}Q_{k-1}(Q_0=Q_{2k+1})$ 所在的 $2k$ 直线相交于 O 点, 由推论 10.1.5 得

$$D_{OP_{2k+1}Q_k}=0,$$

故 O 在 $P_{2k+1}Q_k$ 所在直线上. 从而 $P_1Q_{k+1}, P_2Q_{k+2}, \cdots, P_{2k+1}Q_k$ 所在的 $2k+1$ 条直线相交于一点.

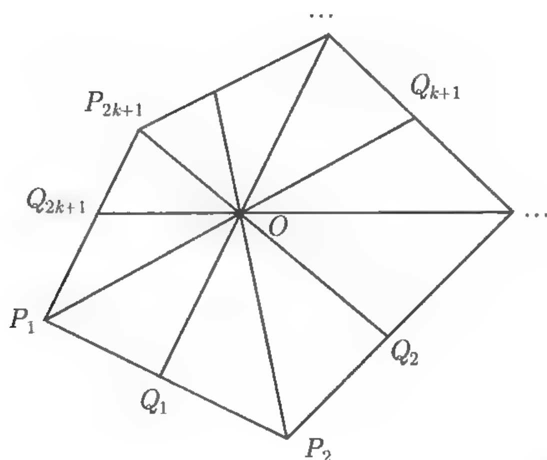


图 10.1.4 $2k+1$ 边形中分点线共点的条件

推论 10.1.8(中线定理) 三角形的三条中线相交于一点.

证明 注意到三角形的任意两条中线相交于一点, 由推论 10.1.7 即得.

推论 10.1.9 设 P 为正 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 所在平面上任意一点, Q_i 是 $P_iP_{i+1}(i=1,2,2n+1)$ 的中点, 则

$$\sum_{i=1}^{n} D_{P-P_iQ_{i+j}}+\sum_{i=1}^{n} D_{P-P_iQ_{i+n-j-1}}=0\left(j=1,\ 2,\ \cdots,\left[\frac{n-1}{2}\right]\right). \tag{10.1.5}$$

证明 由于 $P_1P_2\cdots P_n$ 为正 n 边形, 故对固定的 j $\left(j=1,\ 2,\ \cdots,\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)$, 有

$$\begin{aligned}|P_1Q_{1+j}|=&|P_2Q_{2+j}|=\cdots=|P_nQ_{n+j}|\\=&|P_1Q_{n-j}|=|P_2Q_{n-j+1}|=\cdots=|P_nQ_{2n-j-1}|,\end{aligned}$$

代入式 (10.1.4) 并化简, 即得式 (10.1.5).

推论 10.1.10 平面上任意一点 P 到正多边形 $P_1P_2\cdots P_{2k+1}$ 的中线 P_1Q_{k+1}, $P_2Q_{k+2}, \cdots, P_{2k+1}Q_k$ 所在的 $2k+1$ 条直线的有向距离之和为零.

证明 当 $n=2k+1, j=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]=k$ 时, 式 (10.1.5) 中的两个和式相同. 故有

$$\sum_{i=1}^{2k+1} D_{P_iQ_{i+k}} = 0\,,$$

因此, 推论 10.1.10 结论成立.

特别, 当 $k=1$ 时即得: 平面上任意一点 P 到正三边形中线所在的三条直线的距离中, 其中一个距离等于其余两个距离之和.

定理 10.1.4 设 P为四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 所在平面上任意一点, Q_i 为边 P_iP_{i+1} $(i=1,2,3,4)$ 所在直线上的点, 且 $\dfrac{P_iQ_i}{Q_iP_{i+1}}=\dfrac{q}{p}, p+q=1$, 则

$$\sum_{i=1}^{4} D_{PP_iQ_{i+1}} = pD_{P_1P_2P_3P_4}.$$

证明 在式 (10.1.2) 中令 $n=4, j=1$ 得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} D_{PP_iQ_{i+1}} =& \frac{1}{2}p\sum_{i=1}^{4}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+\frac{1}{2}q\sum_{i=1}^{4}(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)\\ =& \frac{1}{2}p\sum_{i=1}^{4}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)=pD_{P_1P_2P_3P_4}.\end{aligned}$$

10.2 角平分线三角形有向面积的定值定理及其应用

本节主要讨论角平分线三角形有向面积的定值定理及其应用. 首先给出角平分线三角形的概念; 其次给出角平分线三角形有向面积的定值定理及其推论, 从而揭示这些定值定理与著名的角平分线定理等结论之间的关系.

10.2.1 角平分线三角形的概念

设 $P_1P_2P_3$ 为三角形, $P_{i+2}Q_i(P_{i+2}Q_i')$ 为 $\angle P_iP_{i+2}P_{i+1}(\angle P_iP_{i+2}P_{i+1}$ 外角) 的平分线, $Q_i(Q_i')$ 是 $P_{i+2}Q_i(P_{i+2}Q_i')$ 与边 P_iP_{i+1}(边 P_iP_{i+1} 的延长线) 的交点 $(i=1,2,3; P_{3+i}=P_i; Q_{3+i}=Q_i$, 以下类同).

定义 10.2.1 以三角形 $P_1P_2P_3$ 内角平分线 $P_{i+2}Q_i$(外角平分线 $P_{i+2}Q_i'$) 为一边的三角形称为三角形 $P_1P_2P_3$ 的内角平分线三角形 (外角平分线三角形).

如图 10.2.1 所示, 三角形 $PP_1Q_2(PP_1Q_2')$ 是三角形 $P_1P_2P_3$ 的内角平分线三角形 (外角平分线三角形).

为方便起见, 我们把包含三角形一条角平分线 (外角平分线) 的线段看成是内角平分线三角形 (外角平分线三角形) 的特殊情形.

注 10.2.1 当 $\angle P_iP_{i+2}P_{i+1}$ 外角的平分线与边 P_iP_{i+1} 平行时, $Q_{i+1}'(i=1,2,3)$ 为无穷远点. 本节有关结论中均假定 $Q_{i+1}'(i=1,2,3)$ 为有限点.

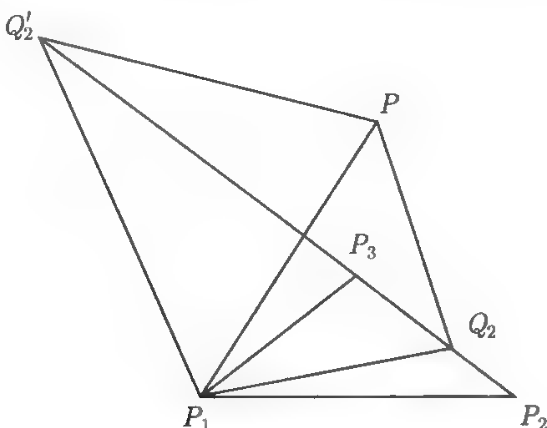


图 10.2.1　三角形的内、外角平分线三角形

定义 10.2.2　以三角形 $P_1P_2P_3$ 内角平分线与其对边三个交点 Q_1, Q_2, Q_3(外角平分线三个交点 Q_1', Q_2', Q_3') 中任意两点之间的连线为一边的三角形称为三角形 $P_1P_2P_3$ 的内角平分点三角形 (外角平分点三角形).

10.2.2　角平分线三角形有向面积的定值定理及其应用

记

$$w_i = \frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\sin\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}}{\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}},$$

$$w_i' = \frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}}{\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}},$$

其中 $\alpha_{3+i} = \alpha_i, i = 1, 2, 3$. 我们有以下的定理.

定理 10.2.1　设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点的坐标为 $P_k(a\cos\alpha_k, a\sin\alpha_k)$, $P_{k+2}Q_k(P_{k+2}Q_k')$ 为 $\angle P_kP_{k+2}P_{k+1}(\angle P_kP_{k+2}P_{k+1}$ 外角) 的平分线, $Q_k(Q_k')$ 是 $P_{k+2}Q_k$ $(P_{k+2}Q'_k)$ 与对边 P_kP_{k+1}(对边 P_kP_{k+1} 的延长线)$(k = 1, 2, 3)$ 的交点, P 是三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, 则

$$w_1D_{PP_3Q_1} + w_2D_{PP_1Q_2} + w_3D_{PP_2Q_3} = 0, \tag{10.2.1}$$

$$w_iD_{PP_{i+2}Q_i} - w_{i+1}'D_{PP_iQ_{i+1}'} + w_{i+2}'D_{PP_{i+1}Q_{i+2}'} = 0\ (i = 1, 2, 3), \tag{10.2.2}$$

$$w_iD_{PP_{i+2}Q_i} - w_{i+1}'D_{PP_iQ_{i+1}'} - w_{i+2}D_{PP_{i+1}Q_{i+2}} = D_{P_1P_2P_3}\ (i = 1, 2, 3), \tag{10.2.3}$$

$$w_1'D_{PP_3Q_1'} + w_2'D_{PP_1Q_2'} + w_3'D_{PP_2Q_3'} = 2D_{P_1P_2P_3}. \tag{10.2.4}$$

证明　设任意点的坐标为 $P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. 依题意, P_iP_{i+1} 所在的直线方程为

$$(\sin\alpha_i-\sin\alpha_{i+1})x+(\cos\alpha_{i+1}-\cos\alpha_i)y=a\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})$$

化简得

$$\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot x+\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot y=a\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}.\tag{10.2.5}$$

于是 $P_{i+1}P_{i+2}$, $P_{i+2}P_i$ 所在的直线方程分别为

$$\cos\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}\cdot x+\sin\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}\cdot y=a\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2},\tag{10.2.6}$$

$$\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cdot x+\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cdot y=a\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}.\tag{10.2.7}$$

设 $P(x,y)$ 是 $\angle P_iP_{i+2}P_{i+1}$ 平分线上任意一点, 由 (10.2.6) 和 (10.2.7) 两式可得

$$\begin{aligned}&\cos\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}\cdot x+\sin\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}\cdot y-a\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\\=&\pm\left(\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cdot x+\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cdot y-a\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\right),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\left(\cos\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}\mp\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\right)x+\left(\sin\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}\mp\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\right)y\\=&a\left(\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\mp\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\right),\end{aligned}$$

化简得 $\angle P_iP_{i+2}P_{i+1}$ 的内角平分线 $P_{i+2}Q_i$ 和外角平分线 $P_{i+2}Q_i'$ 的方程分别为

$$\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}}{4}\cdot x-\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}}{4}\cdot y=a\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4},\tag{10.2.8}$$

$$\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}}{4}\cdot x+\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}}{4}\cdot y=a\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}.\tag{10.2.9}$$

(10.2.5) 和 (10.2.8) 两式联立求得 $P_{i+2}Q_i$ 与 P_iP_{i+1} 的交点 Q_i 的坐标为

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{\delta(i)}\left(-\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}}{4}-\sin\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\right),\\y=\dfrac{a}{\delta(i)}\left(\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}}{4}-\cos\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\right),\end{cases}$$

其中 $\delta(i)=\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}$;

(10.2.5) 和 (10.2.9) 两式联立求得 $P_{i+2}Q_i'$ 与 P_iP_{i+1} 的交点 Q_i' 的坐标为

$$\begin{cases}x'=\dfrac{a}{\delta'(i)}\left(\sin\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}-\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}}{4}\right)\\y'=\dfrac{a}{\delta'(i)}\left(\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}}{4}-\cos\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\right)\end{cases},$$

其中$\delta'(i)=\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}$.

由三角形有向面积公式得

$$
\begin{aligned}
&\delta(i)D_{PP_{i+2}Q_i}\\
=&\frac{1}{2}ar(\cos\alpha\sin\alpha_{i+2}-\cos\alpha_{i+2}\sin\alpha)\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\\
&+\frac{1}{2}a^2\left(\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\right.\\
&\left.-\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{2}\right)\\
&+\frac{1}{2}ar\left(\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha}{2}\right.\\
&\left.-\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}-4\alpha}{4}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right)\\
=&\frac{1}{2}a^2\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\left(\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}-\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{2}\right)\\
&+\frac{1}{2}ar\left[\sin(\alpha_{i+2}-\alpha)\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\right.\\
&\left.+\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha}{2}\right]\\
&-\frac{1}{2}ar\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}-4\alpha}{4}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\\
=&\frac{1}{2}a^2\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\left(\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}-\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{2}\right)\\
&+\frac{1}{4}ar\left(\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}-4\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-6\alpha_{i+2}+4\alpha}{4}\right)\\
&+\frac{1}{4}ar\left(\sin\frac{3\alpha_i+3\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}-4\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}-4\alpha}{4}\right)\\
&-\frac{1}{2}ar\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}-4\alpha}{4}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\\
=&\frac{1}{2}a^2\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\left(\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}-\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{2}\right)\\
&+\frac{1}{2}ar\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{2}\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}-4\alpha}{4}\\
&-\frac{1}{2}ar\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}-4\alpha}{4}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\\
=&\frac{1}{2}a^2\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\left(\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}-\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{2}\right)\\
&+\frac{1}{2}ar\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}-4\alpha}{4}\left(\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$=a\left(a\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}-r\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}-4\alpha}{4}\right)$$
$$\cdot\sin\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\sin\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}$$

于是

$$w_iD_{PP_{i+2}Q_i}$$
$$=a\left(a\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}-r\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}-4\alpha}{4}\right)\sin\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}. \quad (10.2.10)$$

类似地

$$w_i'D_{PP_{i+2}Q_i'}$$
$$=a\left(a\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}-r\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}-4\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}. \quad (10.2.11)$$

于是

$$\begin{aligned}
&w_1D_{PP_3Q_1}+w_2D_{PP_1Q_2}+w_3D_{PP_2Q_3}\\
=&a^2\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}\sin\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}\\
&-ar\sum_{i=1}^{3}\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}+2\alpha_{i+2}-4\alpha}{4}\sin\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}\\
=&\frac{1}{2}a^2\sum_{i=1}^{3}\left(\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}}{2}-\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\right)\\
&-\frac{1}{2}ar\sum_{i=1}^{3}\left(\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}-2\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-2\alpha}{2}\right)\\
=&0.
\end{aligned}$$

故式 (10.2.1) 成立.

类似地, 由式 (10.2.10) 和 (10.2.11), 可证式 (10.2.2) 成立; 而注意到

$$D_{P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}a^2\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i),$$

可证 (10.2.3) 和 (10.2.4) 两式成立.

注意到只要选择以三角形外心为原点的直角坐标系, 任何一个三角形的顶点的坐标都可以表示成定理 10.2.1 中的形式, 我们容易得到如下的推论.

推论 10.2.1 设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点的坐标为 $P_k(a\cos\alpha_k, a\sin\alpha_k)$, $P_{k+2}Q_k$ ($P_{k+2}Q_k'$) 为 $\angle P_kP_{k+2}P_{k+1}$($\angle P_kP_{k+2}P_{k+1}$ 外角) 的平分线, $Q_k(Q_k')$ 是 $P_{k+2}Q_k$

$(P_{k+2}Q_k')$ 与对边 P_kP_{k+1}(对边 P_kP_{k+1} 的延长线) 的交点, $M_k(N_k)$ 分别是 $P_{k+2}Q_k$ $(P_{k+2}Q_k')$ 所在直线上任意一点 $(k=1,2,3)$, 则

$$w_{i+1}D_{M_iP_iQ_{i+1}}+w_{i+2}D_{M_iP_{i+1}P_{i+2}}=0\ (i=1,\ 2,\ 3), \tag{10.2.12}$$

$$w_{i+1}'D_{M_iP_iQ_{i+1}'}-w_{i+2}'D_{M_iP_{i+1}Q_{i+2}'}=0\ (i=1,2,3), \tag{10.2.13}$$

$$w_{i+1}'D_{N_iP_iQ_{i+1}'}+w_{i+2}D_{N_iP_{i+1}Q_{i+2}}=0\ (i=1,2,3), \tag{10.2.14}$$

$$w_{i+1}'D_{M_iP_iQ_{i+1}'}+w_{i+2}D_{M_iP_{i+1}Q_{i+2}}=-D_{P_1P_2P_3}\ (i=1,2,3), \tag{10.2.15}$$

$$w_{i+1}'D_{N_iP_iQ_{i+1}'}-w_{i+2}D_{N_iP_{i+1}Q_{i+2}}=-D_{P_1P_2P_3}\ (i=1,2,3), \tag{10.2.16}$$

$$w_{i+1}'D_{N_iP_iQ_{i+1}'}+w_{i+2}'D_{N_iP_{i+1}Q_{i+2}'}=2D_{P_1P_2P_3}(i=1,2,3). \tag{10.2.17}$$

证明　在式 (10.2.1) 中取任意点 P 为 $P_{i+2}Q_i$ 所在直线上的点 M_i, 并注意到 $w_iD_{M_iP_{i+2}Q_i}=0(i=1,\ 2,\ 3)$ 即得式 (10.2.12).

类似地, 可证式 (10.2.13)~(10.2.17).

推论 10.2.2(内角平分线定理)　三角形的三条内角的平分线相交于一点 (即三角形的内心).

证明　如图 10.2.2 所示. 不妨设 P_1Q_2,P_2Q_3 相交于 G 点, 由式 (10.2.1) 得 $D_{GP_3Q_1}=0$, 于是 G 在 P_3Q_1 上.

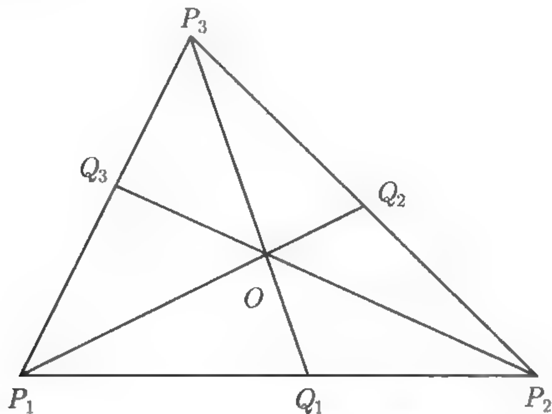


图 10.2.2　三角形内角平分线相交于一点

推论 10.2.3(外角平分线定理)　三角形的一个内角的平分线与其余两个角的外角的平分线相交于一点 (即三角形的傍心).

证明　如图 10.2.3 所示. 不妨设 $P_iQ_{i+1}',P_{i+1}Q_{i+2}'$ 相交于 G_i $(i=1,2,3)$ 点, 由式 (10.2.2) 得 $D_{G_iP_{i+2}Q_i}=0$, 于是 G_i 在 $P_{i+2}Q_i$ 上.

推论 10.2.4　设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点的坐标为 $P_k(a\cos\alpha_k,a\sin\alpha_k),P_{k+2}Q_k$ $(P_{k+2}Q_k')$ 为 $\angle P_kP_{k+2}P_{k+1}(\angle P_kP_{k+2}P_{k+1}$ 外角) 的平分线, $Q_k(Q_k')$ 是 $P_{k+2}Q_k$ $(P_{k+2}Q_k')$ 与对边 P_kP_{k+1}(对边 P_kP_{k+1} 的延长线) 的交点, O 是三角形的内心, J_k 是 $P_{k+2}Q_k,P_kQ_{k+1}',P_{k+1}Q_{k+2}'(k=1,2,3)$ 的交点 (即三角形的傍心), 则

$$|w_{i+2}|S_{J_iP_{i+1}Q_{i+2}} = S_{P_1P_2P_3}\ (i=1,2,3), \tag{10.2.18}$$

$$|w'_{i+1}|S_{OP_iQ'_{i+1}} = S_{P_1P_2P_3}\ (i=1,2,3), \tag{10.2.19}$$

$$|w'_{i+2}|S_{J_iP_{i+1}Q'_{i+2}} = 2S_{P_1P_2P_3}(i=1,2,3). \tag{10.2.20}$$

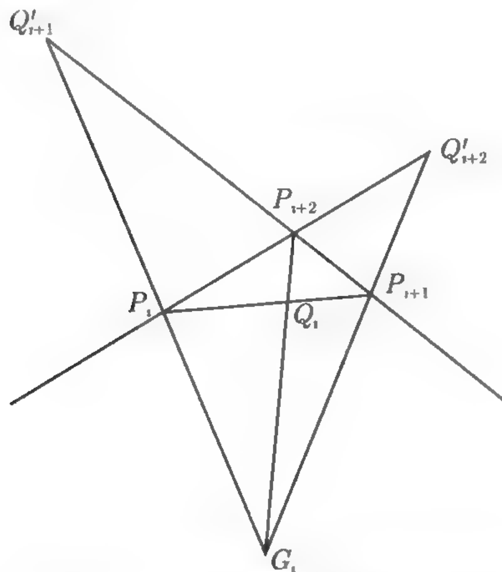


图 10.2.3 三角形外角平分线定理

证明 将 J_k 代入式 (10.2.3) 得

$$-w_{i+2}D_{J_iP_{i+1}Q_{i+2}} = D_{P_1P_2P_3}\ (i=1,2,3),$$

上式两边取绝对值即得式 (10.2.18).

类似地, 由式 (10.2.3) 和式 (10.2.4) 分别可证式 (10.2.19) 和式 (10.2.20) 成立.

10.2.3 内角平分点三角形有向面积的公式及其应用

定理 10.2.2 设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(a\cos\alpha_i, a\sin\alpha_i)$, $P_iQ_{i+1}(i=1,2,3)$ 是三内角的平分线, O 分别是它的外心, 则

$$D_{Q_iQ_{i+1}O} = \frac{a^2}{\delta(i)\delta(i+1)}\sin\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{4}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}\sigma(i)\ (i=1,2,3), \tag{10.2.21}$$

其中

$$\sigma(i)=1+4\sin\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{4}\sin\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{4}, \delta(i)=\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}.$$

证明 如图 10.2.4 所示. 依题设三角形 $P_1P_2P_3$ 外心的坐标为 $O(0,0)$. 由定理 10.2.1 的证明并化简, 可得 $P_{i+2}Q_i$ 与 P_iP_{i+1} 的交点 Q_i 的坐标为

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\delta(i)}\left(\sin\dfrac{3\alpha_{i+1}+\alpha_i}{4}\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}-\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}\right), \\ y=\dfrac{a}{\delta(i)}\left(\cos\dfrac{3\alpha_{i+1}+\alpha_i}{4}\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}+\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}\right) \end{cases} (i=1,2,3).$$

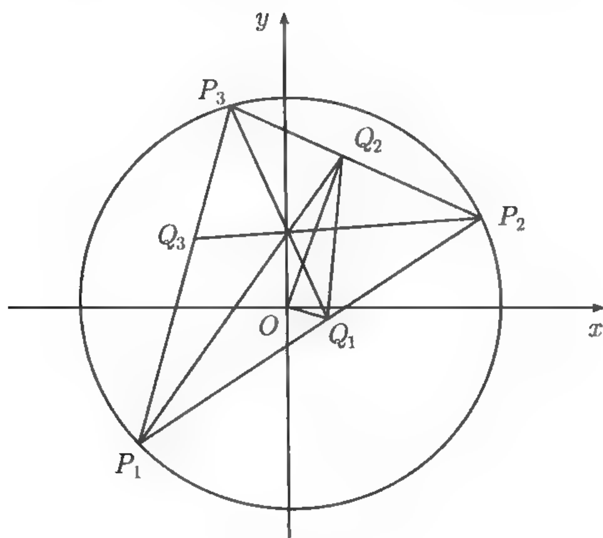


图 10.2.4

于是

$$
\begin{aligned}
&\delta(1)\delta(2)D_{Q_1Q_2O}\\
=&\frac{a^2}{2}\left[\left(\sin\frac{3\alpha_2+\alpha_1}{4}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\right)\right.\\
&\cdot\left(\cos\frac{3\alpha_3+\alpha_2}{4}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\sin\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\right)\\
&-\left(\sin\frac{3\alpha_3+\alpha_2}{4}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}-\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\right)\\
&\left.\cdot\left(\cos\frac{3\alpha_2+\alpha_1}{4}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}+\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\right)\right]\\
=&\frac{a^2}{2}\left[\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\left(\sin\frac{3\alpha_2+\alpha_1}{4}\cos\frac{3\alpha_3+\alpha_2}{4}\right.\right.\\
&\left.-\cos\frac{3\alpha_2+\alpha_1}{4}\sin\frac{3\alpha_3+\alpha_2}{4}\right)+\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\\
&\cdot\left(\sin\frac{3\alpha_2+\alpha_1}{4}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}+\cos\frac{3\alpha_2+\alpha_1}{4}\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\right)\\
&-\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\left(\sin\frac{3\alpha_3+\alpha_2}{4}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\right.\\
&\left.+\cos\frac{3\alpha_3+\alpha_2}{4}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\right)-\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\\
&\left.\cdot\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}-\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\right)\right]\\
=&\frac{a^2}{2}\left(\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3}{4}\right.\\
&+\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{4}
\end{aligned}
$$

$$-\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\cos\frac{2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}{4}$$
$$\left.-\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)$$
$$=\frac{a^2}{4}\left[\sin\frac{\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3}{4}\left(\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1}{2}-\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}\right)\right.$$
$$+\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}+\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\right)$$
$$+\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\left(\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}+\cos\frac{3\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3}{4}\right)$$
$$\left.+\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}\left(\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right)\right]$$
$$=\frac{a^2}{8}\left[\left(\sin\frac{4\alpha_2-\alpha_3-3\alpha_1}{4}+\sin\frac{5\alpha_1-5\alpha_3}{4}-\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}-\sin\frac{\alpha_1+4\alpha_2-5\alpha_3}{4}\right)\right.$$
$$+\left(\sin\frac{3\alpha_3-\alpha_1-2\alpha_2}{4}+\sin\frac{2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1}{4}+\sin\frac{3\alpha_3-3\alpha_1}{4}+\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\right)$$
$$+\left(\sin\frac{2\alpha_2-\alpha_1-\alpha_3}{4}+\sin\frac{2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1}{4}+\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}+\sin\frac{4\alpha_2+\alpha_3-5\alpha_1}{4}\right)$$
$$+\left(\sin\frac{3\alpha_3-\alpha_1-2\alpha_2}{4}+\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right.$$
$$\left.\left.+\sin\frac{\alpha_1+3\alpha_3-4\alpha_2}{4}+\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\right)\right]$$
$$=\frac{a^2}{8}\left[2\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}+2\left(\sin\frac{3\alpha_3-\alpha_1-2\alpha_2}{4}+\sin\frac{2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1}{4}\right)\right.$$
$$+\left(\sin\frac{4\alpha_2-\alpha_3-3\alpha_1}{4}+\sin\frac{4\alpha_2+\alpha_3-5\alpha_1}{4}\right)$$
$$+\left(\sin\frac{5\alpha_1-5\alpha_3}{4}+\sin\frac{3\alpha_3-3\alpha_1}{4}\right)$$
$$\left.+\left(\sin\frac{\alpha_1+3\alpha_3-4\alpha_2}{4}-\sin\frac{\alpha_1+4\alpha_2-5\alpha_3}{4}\right)\right]$$
$$=\frac{a^2}{4}\left[\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}+2\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}+\sin(\alpha_2-\alpha_1)\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right.$$
$$\left.+\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\cos(\alpha_1-\alpha_3)+\sin(\alpha_3-\alpha_2)\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right]$$
$$=\frac{a^2}{4}\left\{\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}[1-\cos(\alpha_1-\alpha_3)]+2\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right.$$
$$\left.+[\sin(\alpha_2-\alpha_1)+\sin(\alpha_3-\alpha_2)]\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right\}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\sin^2\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}+\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left(\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left(2\sin^2\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left[\left(1-\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\right)\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left[\left(\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}-\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\right)\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right]$$

$$=a^2\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left(\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}-\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right)$$

$$=a^2\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\left(1+4\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right)$$

$$=a^2\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\sigma(1),$$

所以 $i=1$ 时式 (10.2.21) 成立.

类似地, 可以证明 $i=2,3$ 时, 式 (10.2.21) 成立.

推论 10.2.5 设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点的坐标为 $P_i(a\cos\alpha_i,a\sin\alpha_i)$, P_iQ_{i+1} $(i=1,2,3)$ 是其内角的平分线, O 是它的外心, 证明: Q_i,Q_{i+1},O 三点共线的充分必要条件是 $\sigma(i)=0(i=1,2,3)$.

证明 如图 10.2.5 所示. 不妨设 $0\leqslant\alpha_i<\alpha_{i+1}<\alpha_{i+2}<2\pi$, 于是

$$0<\alpha_{i+1}-\alpha_i,\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1},\alpha_{i+2}-\alpha_i<2\pi,$$

所以

$$\sin\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{4}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}>0,$$

故由定理 10.2.2 知, Q_i,Q_{i+1},O 三点共线 $\Leftrightarrow D_{Q_iQ_{i+1}O}=0\Leftrightarrow\sigma(i)=0\ (i=1,2,3)$.

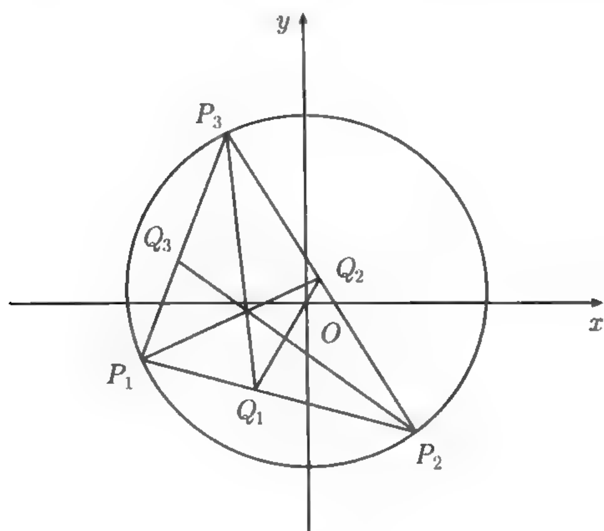


图 10.2.5

10.2.4 外角平分点三角形有向面积的公式及其应用

定理 10.2.3 设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点的坐标为 $P_i(a\cos\alpha_i, a\sin\alpha_i), P_iQ'_{i+1}$ $(i=1,2,3)$ 是三外角的平分线, O 是它的外心, 则

$$D_{Q'_iQ'_{i+1}O}=\frac{a^2}{\delta'(i)\delta'(i+1)}\sin\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+1}}{4}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}}{4}\sigma'(i)(i=1,2,3), \tag{10.2.22}$$

其中

$$\sigma'(i)=1-4\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+1}}{4}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}}{4}\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{4}, \delta'(i)=\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{4}.$$

证明 如图 10.2.6 所示. 依题设三角形 $P_1P_2P_3$ 外心的坐标为 $O(0,0)$. 由定理 10.2.1 的证明并化简, 可得 $P_{i+2}Q'_i$ 与 P_iP_{i+1} 的交点 Q'_i 的坐标

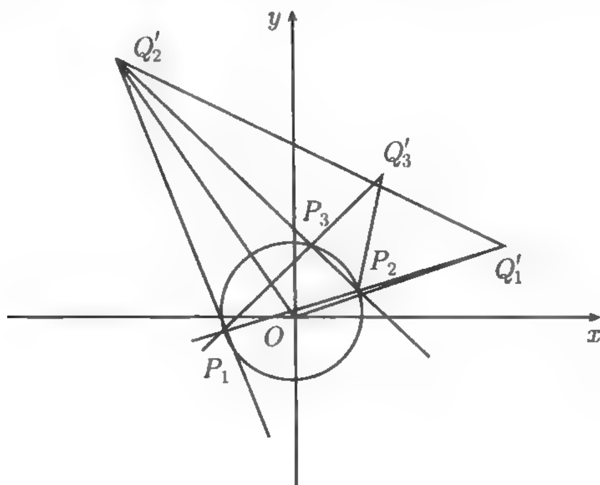


图 10.2.6

$$\begin{cases} x'=\dfrac{a}{\delta'(i)}\left(-\cos\dfrac{3\alpha_{i+1}+\alpha_i}{4}\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}+\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\sin\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}\right), \\ y'=\dfrac{a}{\delta'(i)}\left(-\sin\dfrac{3\alpha_{i+1}+\alpha_i}{4}\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}+\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\sin\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}\right) \end{cases} \quad (i=1,2,3).$$

于是

$$\begin{aligned}
&\delta'(1)\delta'(2)D_{Q_1'Q_2'O}\\
=&\frac{a^2}{2}\left[\left(-\cos\frac{3\alpha_2+\alpha_1}{4}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\right)\right.\\
&\cdot\left(-\sin\frac{3\alpha_3+\alpha_2}{4}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\sin\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\right)\\
&-\left(-\cos\frac{3\alpha_3+\alpha_2}{4}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\right)\\
&\left.\cdot\left(-\sin\frac{3\alpha_2+\alpha_1}{4}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}+\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\right)\right]\\
=&\frac{a^2}{2}\left[\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\left(\cos\frac{3\alpha_2+\alpha_1}{4}\sin\frac{3\alpha_3+\alpha_2}{4}-\sin\frac{3\alpha_2+\alpha_1}{4}\cos\frac{3\alpha_3+\alpha_2}{4}\right)\right.\\
&-\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\left(\cos\frac{3\alpha_2+\alpha_1}{4}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}-\sin\frac{3\alpha_2+\alpha_1}{4}\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\right)\\
&-\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\left(\sin\frac{3\alpha_3+\alpha_2}{4}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}-\cos\frac{3\alpha_3+\alpha_2}{4}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\right)\\
&\left.+\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}-\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\right)\right]\\
=&\frac{a^2}{2}\left(\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\frac{3\alpha_3-\alpha_1-2\alpha_2}{4}-\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{4}\right.\\
&\left.-\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1}{4}+\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\right)\\
=&\frac{a^2}{4}\left[\sin\frac{3\alpha_3-\alpha_1-2\alpha_2}{4}\left(\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1}{2}-\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}\right)\right.\\
&-\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\left(-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}+\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\right)\\
&-\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\left(-\cos\frac{2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1}{4}+\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\right)\\
&\left.+\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\left(-\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right)\right]\\
=&\frac{a^2}{8}\left[\left(\sin\frac{5\alpha_3-5\alpha_1}{4}+\sin\frac{3\alpha_1+\alpha_3-4\alpha_2}{4}-\sin\frac{5\alpha_3-\alpha_1-4\alpha_2}{4}-\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\right)\right.\\
&+\left(\sin\frac{3\alpha_3-\alpha_1-2\alpha_2}{4}+\sin\frac{2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1}{4}-\sin\frac{3\alpha_3-3\alpha_1}{4}-\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$+\left(\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}+\sin\frac{5\alpha_1-4\alpha_2-\alpha_3}{4}-\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3-3\alpha_2}{4}-\sin\frac{3\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3}{4}\right)$$

$$+\left(-\sin\frac{2\alpha_2-\alpha_3-\alpha_1}{4}+\sin\frac{\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3}{4}\right.$$

$$\left.\left.+\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}+\sin\frac{2\alpha_2-\alpha_1-3\alpha_3}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{a^2}{8}\left[2\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}+2\left(\sin\frac{3\alpha_3-2\alpha_2-\alpha_1}{4}+\sin\frac{2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1}{4}\right)\right.$$

$$+\left(\sin\frac{3\alpha_1+\alpha_3-4\alpha_1}{4}+\sin\frac{5\alpha_1-4\alpha_2-\alpha_3}{4}\right)$$

$$+\left(\sin\frac{4\alpha_2-\alpha_1-3\alpha_3}{4}-\sin\frac{5\alpha_3-\alpha_1-4\alpha_2}{4}\right)$$

$$\left.+\left(\sin\frac{5\alpha_3-5\alpha_1}{4}-\sin\frac{3\alpha_3-3\alpha_1}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{a^2}{4}\left[\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}+2\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}+\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\cos(\alpha_2-\alpha_3)+\cos(\alpha_3-\alpha_1)\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\right]$$

$$=\frac{a^2}{4}\left\{\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}[1-\cos(\alpha_3-\alpha_1)]+2\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right.$$

$$\left.+[\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\sin(\alpha_2-\alpha_3)]\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right\}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\sin^2\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}+\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\left(\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\left(2\sin^2\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\left[\left(1-\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\right)\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\left[\left(\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}-\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\right)\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right]$$
$$=a^2\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\left(-\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{4}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{4}-\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right)$$
$$=a^2\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{4}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{4}\left(1-4\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{4}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{4}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\right)$$
$$=a^2\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{4}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{4}\sigma'(1),$$

所以 $i=1$ 时式 (10.2.22) 成立.

类似地, 可以证明 $i=2,3$ 时, 式 (10.2.22) 成立.

推论 10.2.6 设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点的坐标为 $P_i(a\cos\alpha_i, a\sin\alpha_i), P_iQ'_{i+1}$ $(i=1,2,3)$ 是其内角的平分线, O 是它的外心, 证明: Q'_i, Q'_{i+1}, O 三点共线的充要条件是 $\sigma'(i)=0(i=1,2,3)$.

证明 不妨设 $0\leqslant\alpha_i<\alpha_{i+1}<\alpha_{i+2}<2\pi$, 于是

$$0<\alpha_{i+1}-\alpha_i, \alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}-\alpha_i<2\pi,$$

所以

$$\sin\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{4}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}\neq 0,$$

故由定理 10.2.3 知, Q'_i, Q'_{i+1}, O 三点共线 $\Leftrightarrow D_{Q'_iQ'_{i+1}O}=0\Leftrightarrow\sigma'(i)=0(i=1,2,3)$.

10.3 高线三角形有向面积的定值定理及其应用

众所周知, 三角形的三条高线相交于一点. 从有向面积的观点来看, 这并不是偶然的. 本节用有向面积的方法来研究有关的问题.

首先给出 $2n+1$ 边形中高线及高线三角形的概念; 其次给出三角形中有向面积的定理, 从而推出著名的三角形的高线定理; 最后给出圆内接 $2n+1$ 边形高线三角形有向面积的定值定理, 从而把三角形的高线定理推广到圆内接 $2n+1$ 边形的情形.

10.3.1 高线三角形的概念

定义 10.3.1 设 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 为 $2n+1$ 边形, $P_{i+n+1}Q_i\perp P_iP_{i+1}$ 于 $Q_i(i=1,2,\cdots,2n+1; P_{2n+1+i}=P_i$, 以下类同), 则称 $P_{i+n+1}Q_i$ 为 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 的边 P_iP_{i+1} 上的高线, 称以 $P_{i+n+1}Q_i$ 为一边的三角形为多边形 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 的高线三角形.

例如, 五边形 $P_1P_2\cdots P_5$ 有五条高线, 过不在任何一条高线上的一点可以作五个高线三角形 (图 10.3.1).

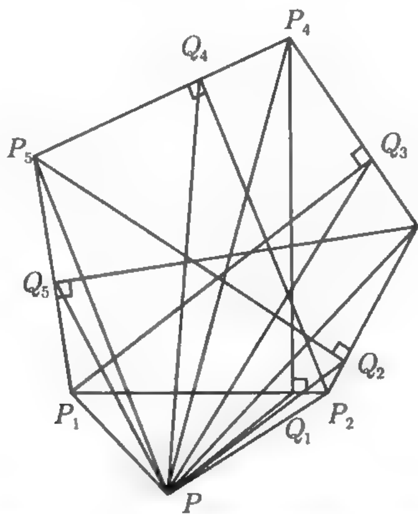


图 10.3.1 五边形的高线三角形

特别, 当 $n=1$ 时, 三角形 $P_1P_2P_3$ 三边 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 上的高线 P_1Q_2, P_2Q_3, P_3Q_1 即三角形的三条高.

为方便起见, 我们把包含多边形 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 的一条高线的任意一条线段看成是高线三角形的特殊情形.

10.3.2 三角形中高线三角形有向面积的定值定理

引理 10.3.1 设 $\pi_i(\alpha)=\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}-\alpha)+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha)-\sin(\alpha_i-\alpha)-\sin(\alpha_{i+1}-\alpha)$, $\sigma_i(\alpha)=\sin(\alpha_i-\alpha_{i+2})+\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2})$, $\alpha_{i+3}=\alpha_i$. 则

$$(1)\ \sum_{i=1}^{3}\pi_i(\alpha)=\sum_{i=1}^{3}\pi_i(\alpha)\cos(\alpha_{i+1}-\alpha_i),\tag{10.3.1}$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{3}\sigma_i(\alpha)=\sum_{i=1}^{3}\sigma_i(\alpha)\cos(\alpha_{i+1}-\alpha_i).\tag{10.3.2}$$

证明 因为 $\alpha_{i+3}=\alpha_i$, 所以

$$\sum_{i=1}^{3}\cos(\alpha_i-\alpha)=\sum_{i=1}^{3}\cos(\alpha_{i+1}-\alpha)=\sum_{i=1}^{3}\cos(\alpha_{i+2}-\alpha),$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\cos(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}-\alpha)&=\sum_{i=1}^{3}\cos(\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i-\alpha)\\&=\sum_{i=1}^{3}\cos(\alpha_{i+2}+\alpha_i-\alpha_{i+1}-\alpha)\end{aligned}$$

于是由积化和差及以上两式, 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3}\pi_i(\alpha)\cos(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}[\sin(2\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}-\alpha)+\sin(2\alpha_i-\alpha_{i+2}-\alpha)\\
&+\sin(\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i-\alpha)+\sin(\alpha_i+\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}-\alpha)-\sin(\alpha_{i+1}-\alpha)\\
&-\sin(2\alpha_i-\alpha_{i+1}-\alpha)-\sin(2\alpha_{i+1}-\alpha_i-\alpha)-\sin(\alpha_i-\alpha)]\\
=&\sum_{i=1}^{3}[\sin(\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i-\alpha)-\sin(\alpha_i-\alpha)]=\sum_{i=1}^{3}\pi_i(\alpha),
\end{aligned}$$

所以式 (10.3.1) 成立.

类似地可以证明式 (10.3.2) 成立.

定理 10.3.1　设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点的坐标为 $P_i(c_1+a\cos\alpha_i, c_2+a\sin\alpha_i)$, $P_{i+2}Q_i$ 为边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 上的高线, P 为三角形所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{3}\sin^2\frac{\alpha_i-\alpha_{i+1}}{2}D_{PP_{i+2}Q_i}=0, \tag{10.3.3}$$

其中 $P_{i+3}=P_i, \alpha_{i+3}=\alpha_i$.

证明　不妨设 $c_1=c_2=0$, 三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意点的坐标设为 $P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. 于是 P_iP_{i+1} 的直线方程为

$$(\sin\alpha_i-\sin\alpha_{i+1})x+(\cos\alpha_{i+1}-\cos\alpha_i)y=a\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1}),$$

即

$$\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot x+\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot y=a\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}. \tag{10.3.4}$$

$P_{i+2}Q_i$ 的直线方程设为

$$\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot x-\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot y=C,$$

将点 $P_{i+2}(a\cos\alpha_{i+2}, a\sin\alpha_{i+2})$ 代入上式得

$$C=a\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i-2\alpha_{i+2}}{2}.$$

所以

$$\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot x-\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot y=a\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i-2\alpha_{i+2}}{2}. \tag{10.3.5}$$

式 (10.3.4) 和式 (10.3.5) 联立, 求得 Q_i 的坐标

$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}[\cos\alpha_i+\cos\alpha_{i+1}+\cos\alpha_{i+2}-\cos(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})],\\ y=\dfrac{a}{2}[\sin\alpha_i+\sin\alpha_{i+1}+\sin\alpha_{i+2}-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})]\end{cases}\quad(i=1,2,3).$$

由三角形有向面积公式得

$$\begin{aligned}
&D_{PP_{i+2}Q_i}\\
=&\frac{1}{2}ar(\cos\alpha\sin\alpha_{i+2}-\sin\alpha\cos\alpha_{i+2})\\
&+\frac{1}{4}a^2\{\cos\alpha_{i+2}[\sin\alpha_i+\sin\alpha_{i+1}+\sin\alpha_{i+2}-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})]\\
&-\sin\alpha_{i+2}[\cos\alpha_i+\cos\alpha_{i+1}+\cos\alpha_{i+2}-\cos(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})]\}\\
&+\frac{1}{4}ar\{[\cos\alpha_i+\cos\alpha_{i+1}+\cos\alpha_{i+2}-\cos(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})]\sin\alpha\\
&-[\sin\alpha_i+\sin\alpha_{i+1}+\sin\alpha_{i+2}-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})]\cos\alpha\}\\
=&\frac{1}{2}ar\sin(\alpha_{i+2}-\alpha)+\frac{1}{4}a^2[\sin(\alpha_i-\alpha_{i+2})+\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})\\
&-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2})]-\frac{1}{4}ar[\sin(\alpha_i-\alpha)+\sin(\alpha_{i+1}-\alpha)\\
&+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha)-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}-\alpha)]\\
=&\frac{1}{4}ar[\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}-\alpha)+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha)-\sin(\alpha_i-\alpha)-\sin(\alpha_{i+1}-\alpha)]\\
&+\frac{1}{4}a^2[\sin(\alpha_i-\alpha_{i+2})+\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2})]\\
=&\frac{1}{4}ar\pi_i(\alpha)+\frac{1}{4}a^2\sigma_i(\alpha)
\end{aligned}$$

故由引理 10.3.1 得

$$\sum_{i=1}^{3}\sin^2\frac{\alpha_i-\alpha_{i+1}}{2}D_{PP_{i+2}Q_i}=\frac{1}{8}a\sum_{i=1}^{3}[1-\cos(\alpha_i-\alpha_{i+1})]\,[r\pi_i(\alpha)+a\sigma_i(\alpha)]=0.$$

推论 10.3.1 设三角形 $P_1P_2P_3$ 的三条高为 $P_{i+2}Q_i(i=1,2,3)$, 则

$$S_{P_iQ_{i+1}P_{i+2}}\cdot S_{Q_iP_{i+1}Q_{i+2}}=S_{P_{i+1}Q_{i+2}P_{i+2}}\cdot S_{Q_iP_iQ_{i+1}}(i=1,2,3) \tag{10.3.6}$$

其中 $P_{i+3}=P_i, Q_{i+3}=Q_i$.

证明 由题设易知式 (10.3.6) 中至少有一个三角形的面积不为 0, 不妨设 $S_{Q_iP_iQ_{i+1}}\neq 0$, 则 $\angle P_iP_{i+1}P_{i+2}\neq 90°$. 于是 $S_{Q_iP_{i+1}Q_{i+2}}\neq 0$. 在式 (10.3.3) 中分别取 P 为 P_{i+2},Q_i, 得

$$\sin^2\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}}{2}D_{P_{i+2}P_iQ_{i+1}}=-\sin^2\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}D_{P_{i+2}P_{i+1}Q_{i+2}}, \tag{10.3.7}$$

$$\sin^2\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}}{2}D_{Q_iP_iQ_{i+1}}=-\sin^2\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}D_{Q_iP_{i+1}Q_{i+2}}. \tag{10.3.8}$$

式 (10.3.7)÷ 式 (10.3.8) 后等式两边取绝对值得

$$S_{P_iQ_{i+1}P_{i+2}}/S_{Q_iP_iQ_{i+1}}=S_{P_{i+1}P_{i+2}Q_{i+2}}/S_{Q_iP_{i+1}Q_{i+2}},$$

化简即得式 (10.3.6).

推论 10.3.2　三角形 $P_1P_2P_3$ 的三条高线 $P_{i+2}Q_i(i=1,2,3)$ 所在直线相交于一点.

证明　如图 10.3.2 所示. 不妨设 P_1Q_2, P_2Q_3 所在直线相交于 H 点, 将 H 及 $D_{HP_1Q_2}=D_{HP_2Q_3}=0$ 代入式 (10.3.2), 得

$$\sin^2\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}D_{HP_3Q_1}=0.$$

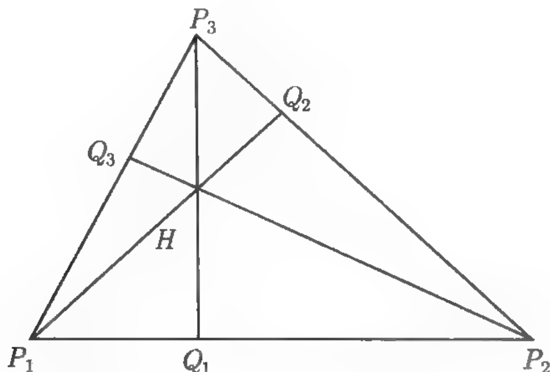


图 10.3.2　三角形的高线相交于一点

注意到$\sin^2\dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\neq 0$ 得 $D_{HP_3Q_1}=0$, 即 H 在直线 P_3Q_1 上. 所以三角形 $P_1P_2P_3$ 的三条高线 P_1Q_2, P_2Q_3, P_3Q_1 所在直线相交于 H 点.

推论 10.3.3　设 P 是正三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, 则在 $P_1P_2P_3$ 的三个高线三角形 $PP_{i+2}Q_i(i=1,2,3)$ 中, 其中一个高线三角形的面积等于其余两个高线三角形的面积的和.

证明　将 $|\alpha_{i+1}-\alpha_i|=\dfrac{2\pi}{3}$ 代入式 (10.3.3) 并化简, 得

$$D_{PP_3Q_1}+D_{PP_1Q_2}+D_{PP_2Q_3}=0,$$

从而推论 10.3.3 结论成立.

10.3.3　圆内接 $2n+1$ 边形中高线三角形有向面积的定值定理

引理 10.3.2　设 $\alpha_{i+2n+1}=\alpha_i$, $\delta_i(\alpha)=\sin\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}$, 则

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\delta_i(\alpha)\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+n+1}}{2}=0 \tag{10.3.9}$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\delta_i(\alpha)\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha}{2}=0, \tag{10.3.10}$$

证明 由积化和差公式及 $\alpha_{i+2n+1}=\alpha_i$, 得

$$\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{2n+1}\delta_i(\alpha)\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+n+1}}{2}\\
=&\sum_{i=1}^{2n+1}\cos(\alpha_i-\alpha_{i+n+1})-\sum_{i=1}^{2n+1}\cos(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1})\\
=&\sum_{i=1}^{n}\cos(\alpha_i-\alpha_{i+n+1})-\sum_{i=1}^{n}\cos(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1})\\
&+\sum_{i=n+1}^{2n+1}\cos(\alpha_i-\alpha_{i+n+1})-\sum_{i=n+1}^{2n+1}\cos(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1})\\
=&\sum_{i=1}^{n}\cos(\alpha_i-\alpha_{i+n+1})-\sum_{i=1}^{n}\cos(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1})\\
&+\sum_{i=1}^{n}\cos(\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+1})+\cos(\alpha_{n+1}-\alpha_1)\\
&-\sum_{i=1}^{n}\cos(\alpha_{i+n+1}-\alpha_i)-\cos(\alpha_1-\alpha_{n+1})\\
=&0.
\end{aligned}$$

因此式 (1.3.9) 成立. 类似地, 可以证明式 (10.3.10).

定理 10.3.2 设为圆内接 $2n+1$ 边形 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 顶点的坐标为 $P_i(c_1+a\cos\alpha_i, c_2+a\sin\alpha_i)$, $P_{i+n+1}Q_i\perp P_iP_{i+1}$ 于 $Q_i(i=1,2,\cdots,2n+1), P$ 是 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\left(\cot\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+1}}{2}-\cot\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_i}{2}\right)D_{PP_{i+n+1}Q_i}=0. \tag{10.3.11}$$

其中 $P_{i+2n+1}=P_i$, $\alpha_{i+2n+1}=\alpha_i$, 其余类同.

证明 不妨设 $c_1=c_2=0$, 于是 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 所在平面上任意点的坐标可设为 $P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. 由题设求得 P_iP_{i+1} 和 $P_{i+n+1}Q_i$ 的直线方程分别为

$$\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot x+\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot y=a\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}, \tag{10.3.12}$$

$$\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot x-\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot y=a\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i-2\alpha_{i+n+1}}{2}. \tag{10.3.13}$$

(10.3.12) 和 (10.3.13) 两式联立, 求得 Q_i 的坐标

$$\begin{cases}x_i=\dfrac{a}{2}[\cos\alpha_i+\cos\alpha_{i+1}+\cos\alpha_{i+n+1}-\cos(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1})],\\ y_i=\dfrac{a}{2}[\sin\alpha_i+\sin\alpha_{i+1}+\sin\alpha_{i+n+1}-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1})]\end{cases}\quad (i=1,2,3).$$

由三角形有向面积公式得

$$
\begin{aligned}
&D_{PP_{i+n+1}Q_i}\\
=&\frac{1}{2}ar(\cos\alpha\sin\alpha_{i+n+1}-\sin\alpha\cos\alpha_{i+n+1})\\
&+\frac{1}{4}a^2\{\cos\alpha_{i+n+1}[\sin\alpha_i+\sin\alpha_{i+1}+\sin\alpha_{i+n+1}-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1})]\\
&-\sin\alpha_{i+n+1}[\cos\alpha_i+\cos\alpha_{i+1}+\cos\alpha_{i+n+1}-\cos(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1})]\\
&+\frac{1}{4}ar\{[\cos\alpha_i+\cos\alpha_{i+1}+\cos\alpha_{i+n+1}-\cos(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1})]\sin\alpha\\
&-[\sin\alpha_i+\sin\alpha_{i+1}+\sin\alpha_{i+n+1}-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1})]\cos\alpha\}\\
=&\frac{1}{2}ar\sin(\alpha_{i+n+1}-\alpha)+\frac{1}{4}a^2[\sin(\alpha_i-\alpha_{i+n+1})\\
&+\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1})-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+n+1})]\\
&-\frac{1}{4}ar[\sin(\alpha_i-\alpha)+\sin(\alpha_{i+1}-\alpha)+\sin(\alpha_{i+n+1}-\alpha)\\
&-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1}-\alpha)]\\
=&\frac{1}{4}ar\{[\sin(\alpha_{i+n+1}-\alpha)+\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1}-\alpha)]\\
&-[\sin(\alpha_i-\alpha)+\sin(\alpha_{i+1}-\alpha)]\}\\
&+\frac{1}{4}a^2\{[\sin(\alpha_i-\alpha_{i+n+1})+\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+n+1})]-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+n+1})\}\\
=&\frac{1}{2}ar\left(\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+n+1}}{2}\right.\\
&\left.-\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right)\\
&+\frac{1}{2}a^2\left(\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+n+1}}{2}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right.\\
&\left.-\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+n+1}}{2}\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+n+1}}{2}\right)\\
=&\frac{1}{2}\left(ar\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha}{2}-a^2\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+n+1}}{2}\right)\\
&\cdot\left(\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+n+1}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right)\\
=&\left(a^2\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+n+1}}{2}-ar\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha}{2}\right)\\
&\cdot\sin\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+1}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_i}{2},
\end{aligned}
$$

所以

$$
\frac{D_{PP_{i+n+1}Q_i}}{\sin\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+1}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_i}{2}}
$$

$$=a^2\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+n+1}}{2}-ar\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha}{2}.$$

从而

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2n+1}\left(\cot\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+1}}{2}-\cot\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_i}{2}\right)D_{PP_{i+n+1}Q_i}\\=&\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+1}}{2}\sin\dfrac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_i}{2}}D_{PP_{i+n+1}Q_i}\\=&a^2\sum_{i=1}^{2n+1}\delta_i(\alpha)\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+n+1}}{2}-ar\sum_{i=1}^{2n+1}\delta_i(\alpha)\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha}{2}\\=&0.\end{aligned}$$

注 10.3.1　在式 (10.3.10) 中令 $n=1$, 化简可得式 (10.3.3).

推论 10.3.4　设 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 是圆内接 $2n+1$ 边形, $P_{i+n+1}Q_i\perp P_iP_{i+1}$ 于 Q_i. 若 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 的 $2n+1$ 条高线 $P_{i+n+1}Q_i(i=1,2,\cdots,2n+1)$ 所在直线中有 $2n$ 条直线相交于一点, 则这 $2n+1$ 条高线所在直线相交于一点.

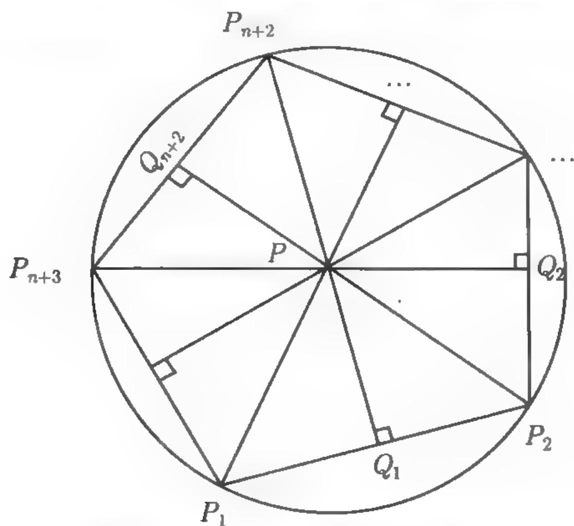


图 10.3.3　圆内接 $2n+1$ 边形高线相交于一点的条件

证明　仿推论 10.3.2 可以证明.

注 10.3.2　在推论 10.3.4 中注意到三角形的任意两条高线所在直线相交于一点, 即得推论 10.3.2.

推论 10.3.5　设 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 是正 $2n+1$ 边形, $P_{i+n+1}Q_i\perp P_iP_{i+1}$ 于 $Q_i(i=1,2,\cdots,2n+1)$, P 是 $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{2n+1}D_{PP_{i+n+1}Q_i}=0.$$

证明　仿推论 10.3.3 可以证明.

注 10.3.3　推论 10.3.5 的几何意义是：一点的正 $2n+1$ 边形的 $2n+1$ 个高线三角形中, 其中正向三角形的面积的和等于反向三角形的面积.

10.3.4　垂点三角形有向面积的公式及其应用

定理 10.3.3　设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点的坐标为 $P_i(a\cos\alpha_i, a\sin\alpha_i), P_iN_{i+1}$ 分别是三边上的高, I 分别是它的内心, 则

$$D_{N_iN_{i+1}I} = 2a^2\sin(\alpha_i-\alpha_{i+2})\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{4}\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{4}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}\sigma(i), \tag{10.3.14}$$

其中 $\sigma(i) = 1+4\sin\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{4}\sin\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{4}$.

证明　如图 10.3.4 所示. 依题设三角形 $P_1P_2P_3$ 外心的坐标为 $O(0,0)$. 而由定理 10.2.3 的证明可得三角形内角平分线 P_1Q_2, P_2Q_3 的方程分别为

$$\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_1}{4}\cdot x-\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_1}{4}\cdot y = a\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_1}{4}, \tag{10.3.15}$$

$$\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_2}{4}\cdot x-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_2}{4}\cdot y = a\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}. \tag{10.3.16}$$

式 (10.3.15) 和式 (10.3.16) 联立, 求得三角形内心 I 的坐标为

$$\begin{cases} x_I = -a\left(\cos\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\cos\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+\cos\dfrac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\right), \\ y_I = -a\left(\sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\sin\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+\sin\dfrac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\right); \end{cases}$$

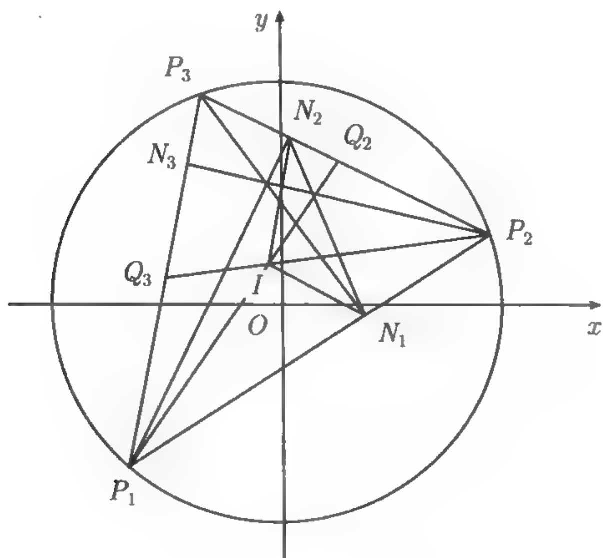


图 10.3.4

由定理 10.3.1 的证明, 可得三角形各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 上的垂足 N_i 的坐标为

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}[\cos\alpha_i+\cos\alpha_{i+1}+\cos\alpha_{i+2}-\cos(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})], \\ y=\dfrac{a}{2}[\sin\alpha_i+\sin\alpha_{i+1}+\sin\alpha_{i+2}-\sin(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})] \end{cases} \quad (i=1,2,3);$$

于是

$$\begin{aligned}
&D_{N_1N_2I}\\
=&\frac{a^2}{8}\begin{vmatrix} \cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3-\cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3) & \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3-\sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3) & 1 \\ \cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3-\cos(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1) & \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3-\sin(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1) & 1 \\ -2\left(\cos\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\cos\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+\cos\dfrac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\right) & -2\left(\sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\sin\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+\sin\dfrac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\right) & 1 \end{vmatrix}\\
=&\frac{a^2}{8}\begin{vmatrix} \cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3-\cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3) & \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3-\sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3) & 1 \\ \cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)-\cos(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1) & \sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)-\sin(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1) & 0 \\ -2\left(\cos\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\cos\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+\cos\dfrac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\right) & -2\left(\sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\sin\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+\sin\dfrac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\right) & 1 \end{vmatrix}\\
=&\frac{a^2}{8}\begin{vmatrix} \cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3-\cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3) & \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3-\sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3) & 1 \\ -2\sin\alpha_2\sin(\alpha_1-\alpha_3) & 2\cos\alpha_2\sin(\alpha_1-\alpha_3) & 0 \\ -2\left(\cos\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\cos\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+\cos\dfrac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\right) & -2\left(\sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\sin\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+\sin\dfrac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\right) & 1 \end{vmatrix}\\
=&\frac{a^2}{4}\sin(\alpha_1-\alpha_3)\left\{\sin\alpha_2\left[\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3-\sin(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)\right.\right.\\
&\left.+2\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+\sin\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\right)\right]+\cos\alpha_2\left[\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3\right.\\
&\left.\left.-\cos(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)+2\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+\cos\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\right)\right]\right\}\\
=&\frac{a^2}{4}\sin(\alpha_1-\alpha_3)\left[1+\cos(\alpha_2-\alpha_1)+\cos(\alpha_3-\alpha_2)-\cos(\alpha_3-\alpha_1)\right.\\
&\left.+2\left(\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}\right)\right]\\
=&\frac{a^2}{2}\sin(\alpha_1-\alpha_3)\left[\sin^2\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}+\left(1+\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\right)\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}\right.\\
&\left.+2\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right]\\
=&a^2\sin(\alpha_1-\alpha_3)\left[\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\right.\\
&\left.+\cos^2\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right]\\
=&a^2\sin(\alpha_1-\alpha_3)\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\left(\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\right.
\end{aligned}$$

$$+\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\Bigg)$$

$$=a^2\sin(\alpha_1-\alpha_3)\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\left(2\sin^2\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right)$$

$$=a^2\sin(\alpha_1-\alpha_3)\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\left[\left(1-\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\right)\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\right.$$

$$\left.+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right]$$

$$=a^2\sin(\alpha_1-\alpha_3)\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\left[\left(\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2}{2}-\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}\right)\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right]$$

$$=2a^2\sin(\alpha_1-\alpha_3)\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\left(\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\right.$$

$$\left.-\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right)$$

$$=2a^2\sin(\alpha_1-\alpha_3)\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}$$

$$\cdot\left(1+4\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{4}\right)$$

$$=2a^2\sin(\alpha_1-\alpha_3)\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{4}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{4}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4}\sigma(1),$$

所以 $i=1$ 时式 (10.3.14) 成立;

类似地, 可以证明 $i=2,3$ 时, 式 (10.3.14) 成立.

推论 10.3.6　设三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点坐标为 $P_i(a\cos\alpha_i, a\sin\alpha_i)$, $P_iN_{i+1}(i=1,2,3)$ 是三边上的高, I 是它的内心, 证明: N_i, N_{i+1}, I 三点共线的充要条件是 $\sin(\alpha_i-\alpha_{i+2})\sigma(i)=0(i=1,2,3)$.

证明　不妨设 $0\leqslant\alpha_i<\alpha_{i+1}<\alpha_{i+2}<2\pi$, 于是

$$0<\alpha_{i+1}-\alpha_i, \alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}-\alpha_i<2\pi,$$

所以

$$\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{4}\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{4}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{4}\neq 0,$$

故由定理 10.3.3 知, N_i, N_{i+1}, I 三点共线 $D_{N_iN_{i+1}I}=0\Leftrightarrow\sin(\alpha_i-\alpha_{i+2})\sigma(i)=0(i=1,2,3)$.

推论 10.3.7(第 38 届国际数学奥林匹克预选题)　在锐角三角形 $P_1P_2P_3$ 中, P_1N_2, P_2N_3, P_3N_1 是三边上的高, P_1Q_2, P_2Q_3, P_3Q_1 是三内角的平分线, I, O 分别

是它的内心和外心, 证明: N_i, N_{i+1}, I 三点共线的充分必要条件是 Q_i, Q_{i+1}, O 三点共线 $(i=1,2,3)$.

证明 如图 10.3.5 所示. 由于 $P_1P_2P_3$ 是锐角三角形, 所以 $\alpha_{i+2}-\alpha_i \neq \pi$, $\sin(\alpha_i-\alpha_{i+2}) \neq 0$. 于是由推论 10.3.5 和推论 10.3.6 知 N_i, N_{i+1}, I 三点共线 $\Leftrightarrow$ $D_{N_iN_{i+1}I}=0 \Leftrightarrow \sigma(1)=0 \Leftrightarrow D_{Q_iQ_{i+1}O}=0\ (i=1,2,3) \Leftrightarrow Q_i, Q_{i+1}, O$ 三点共线.

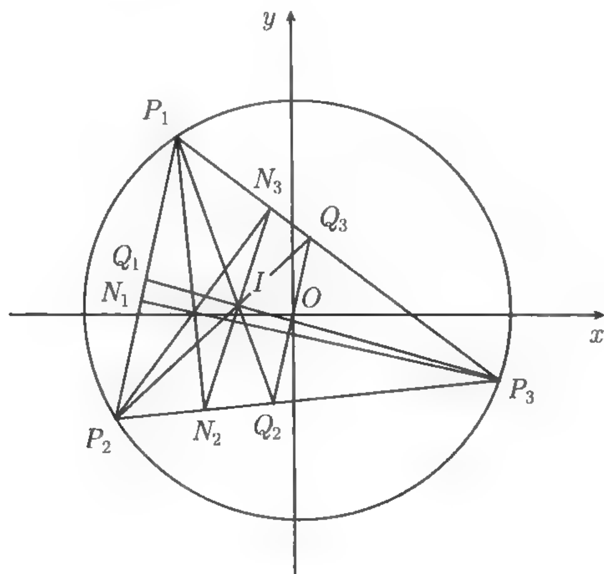


图 10.3.5

10.4 塞瓦线三角形有向面积的定值定理及其应用

塞瓦线定理是指三角形的三条塞瓦线相交于一点, 其交点也叫做三角形的葛尔刚点. 用有向面积的观点来看, 三角形的葛尔刚点只是一种必然性中的偶然, 而且还可以推广. 本节主要讨论塞瓦线三角形有向面积的定值定理及其应用.

首先, 给出内 (傍) 塞瓦线和内 (傍) 塞瓦线三角形的概念, 得出塞瓦线三角形有向面积的定值定理, 从而推出三角形的葛尔刚点; 其次, 对塞瓦线三角形有向面积的定值定理进行推广, 并据此推出两个三线共点的结论, 从而进一步揭示塞瓦线定理的背景; 最后, 利用三直线共点的充要条件, 给出与三角形内心 (傍心) 线构成三线共点的有关问题的证明.

10.4.1 塞瓦线三角形有向面积的定值定理及其应用

定义 10.4.1 三角形的一个顶点与这个顶点的对边 (对边所在直线) 和三角形内 (傍) 切圆的切点之间的连线称为三角形的一条内 (傍) 塞瓦线, 以三角形的一条内 (傍) 塞瓦线为一边的任一三角形称为三角形的内 (傍) 塞瓦线三角形.

为方便起见, 我们把包含一条内 (傍) 塞瓦线的任一线段看成是内 (傍) 塞瓦线

三角形的特殊情形.

记 $\odot C(R)$ 为圆心为 $C(a,b)$、半径为 R 的圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

定理 10.4.1　设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内 (傍) 切圆为 $\odot C(R)$, Q_iQ_{i+1}(Q_iQ_{i+1} 所在直线) 与 $\odot C(R)$ 的切点为 $P_i(a+R\cos\alpha_i, b+R\sin\alpha_i)(i=1,2,3)$, P 为三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})D_{PP_iQ_{i+2}}=0, \tag{10.4.1}$$

其中 $Q_{3+i}=Q_i$, $\alpha_{i+3}=\alpha_i$, 其余类同.

证明　如图 10.4.1 和图 10.4.2 所示. 不妨设 $a=b=0$, 于是三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 所在平面上任意一点的坐标可设为 $P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. 由 $Q_{i+2}Q_i$ 和 Q_iQ_{i+1} 的方程

$$\cos\alpha_{i+2}x+\sin\alpha_{i+2}y=R \text{ 和 } \cos\alpha_i x+\sin\alpha_i y=R$$

求得三角形顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{R\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}, \frac{R\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}\right)(i=1,2,3).$$

由三角形有向面积公式得

$$\begin{aligned}
&2\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}D_{PP_iQ_{i+2}}\\
=&Rr(\cos\alpha\sin\alpha_i-\sin\alpha\cos\alpha_i)\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}+R^2\Big(\cos\alpha_i\sin\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}\\
&-\sin\alpha_i\cos\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}\Big)+Rr\left(\cos\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}\sin\alpha-\sin\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}\cos\alpha\right)\\
=&Rr\sin(\alpha_i-\alpha)\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}+R^2\sin\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}-2\alpha_i}{2}\\
&-Rr\sin\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}-2\alpha}{2},
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})D_{PP_iQ_{i+2}}\\
=&\frac{1}{2}Rr\sin(\alpha_i-\alpha)\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})+R^2\sin\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}-2\alpha_i}{2}\sin\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\\
&-Rr\sin\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}-2\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\\
=&-\frac{1}{4}Rr[\cos(\alpha_{i+2}+\alpha_i-\alpha_{i+1}-\alpha)-\cos(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}-\alpha)]
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}R^2[\cos(\alpha_{i+1}-\alpha_i)-\cos(\alpha_{i+2}-\alpha_i)]+\frac{1}{2}Rr[\cos(\alpha_{i+2}-\alpha)-\cos(\alpha_{i+1}-\alpha)].$$

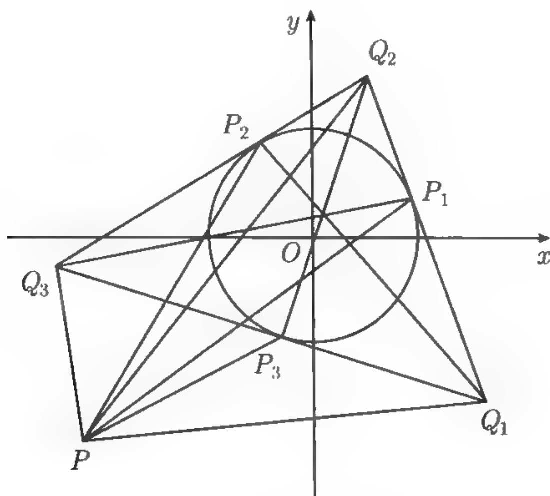


图 10.4.1 三角形的内塞瓦线三角形

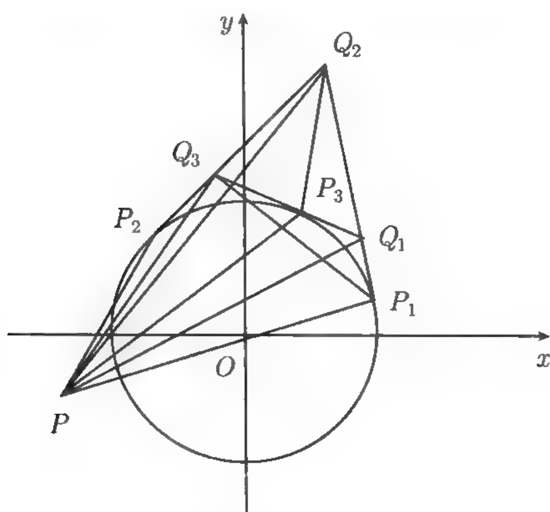


图 10.4.2 三角形的傍塞瓦线三角形

因为

$$\sum_{i=1}^{3}\cos(\alpha_{i+2}+\alpha_i-\alpha_{i+1}-\alpha)\xlongequal{i+1\text{代}}\sum_{i=1}^{3}\cos(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}-\alpha)],$$

所以

$$\sum_{i=1}^{3}[\cos(\alpha_{i+2}+\alpha_i-\alpha_{i+1}-\alpha)-\cos(\alpha_i+\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}-\alpha)]=0.$$

同理

$$\sum_{i=1}^{3}[\cos(\alpha_{i+1}-\alpha_i)-\cos(\alpha_{i+2}-\alpha_i)]=0,\ \sum_{i=1}^{3}[\cos(\alpha_{i+2}-\alpha)-\cos(\alpha_{i+1}-\alpha)]=0,$$

所以式 (10.4.1) 成立.

推论 10.4.1 设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内 (傍) 切圆为 $\odot C(R)$, Q_iQ_{i+1}(Q_iQ_{i+1} 所在直线) 与 $\odot C(R)$ 的切点为 $P_i(a+R\cos\alpha_i, b+R\sin\alpha_i)(i=1,2,3)$, P 为 P_iQ_{i+2} 所在直线上任意一点, 则

$$|\sin(\alpha_i-\alpha_{i+2})|\,S_{PP_{i+1}Q_i}=|\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)|\,S_{PP_{i+2}Q_{i+1}}(i=1,2,3). \tag{10.4.2}$$

证明 在式 (10.4.1) 中令 $D_{PP_iQ_{i+2}}=0$, 得

$$\sin(\alpha_i-\alpha_{i+2})\,D_{PP_{i+1}Q_i}=-\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\,D_{PP_{i+2}Q_{i+1}},$$

等式两边取绝对值即得式 (10.4.2).

推论 10.4.2 设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内 (傍) 切圆为 $\odot C$, Q_iQ_{i+1}(Q_iQ_{i+1} 所在直线) 与 $\odot C$ 的切点为 $P_i(i=1,2,3)$, M_1, M_2 是 P_iQ_{i+2} 所在直线上任意两点, 则

$$S_{M_1P_{i+1}Q_i}\cdot S_{M_2P_{i+2}Q_{i+1}}=S_{M_1P_{i+2}Q_{i+1}}\cdot S_{M_2P_{i+1}Q_i}(i=1,2,3). \tag{10.4.3}$$

证明 不妨设 $\odot C$ 的方程及三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 与 $\odot C$ 的切点的坐标均如定理 10.4.2, 对 M_1, M_2 分别利用式 (10.4.1) 得

$$|\sin(\alpha_i-\alpha_{i+2})|\,S_{M_1P_{i+1}Q_i}=|\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)|\,S_{M_1P_{i+2}Q_{i+1}}\ (i=1,\ 2,\ 3) \tag{10.4.4}$$

和

$$|\sin(\alpha_i-\alpha_{i+2})|\,S_{M_2P_{i+1}Q_i}=|\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)|\,S_{M_2P_{i+2}Q_{i+1}}\ (i=1,\ 2,\ 3). \tag{10.4.5}$$

又显然 $\sin(\alpha_{k+1}-\alpha_k)\neq 0(k=1,2,3)$, 故若 $S_{M_2P_{i+1}Q_i}=S_{M_2P_{i+2}Q_{i+1}}$, 式 (10.4.3) 显然成立; 若 $S_{M_2P_{i+1}Q_i}, S_{M_2P_{i+2}Q_{i+1}}$ 均不为零, 式 (10.4.4)÷ 式 (10.4.5) 并化简即得式 (10.4.3).

推论 10.4.3[17] 三角形的三条内塞瓦线相交于一点.

证明 如图 10.4.3 所示. 不妨设 $\odot C$ 的方程及三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 与 $\odot C$ 的切点的坐标均如定理 10.4.1. 设 P_2Q_1, P_3Q_2 的交点为 G, 在式 (10.4.1) 中令 $D_{GP_2Q_1}=D_{GP_3Q_2}=0$ 得 $\sin(\alpha_3-\alpha_2)\,D_{GP_1Q_3}=0$. 因 $\sin(\alpha_3-\alpha_2)\neq 0$, 故 $D_{GP_1Q_3}=0$, 即 G 在 P_1Q_3 上, 从而 P_1Q_3, P_2Q_1, P_3Q_2 相交于 G 点.

推论 10.4.4[17] 三角形任一傍切圆的两条傍塞瓦线及另一条傍塞瓦线的延长线相交于一点.

证明 如图 10.4.4 所示. 证法与推论 10.4.3 的证明类似, 从略.

注 10.4.1 推论 10.4.3 和推论 10.4.4 可以看成是 Brianchon 定理在圆外切三角形中的情形, 其中的塞瓦线的交点称为三角形的葛尔刚点 (Gergonne points).

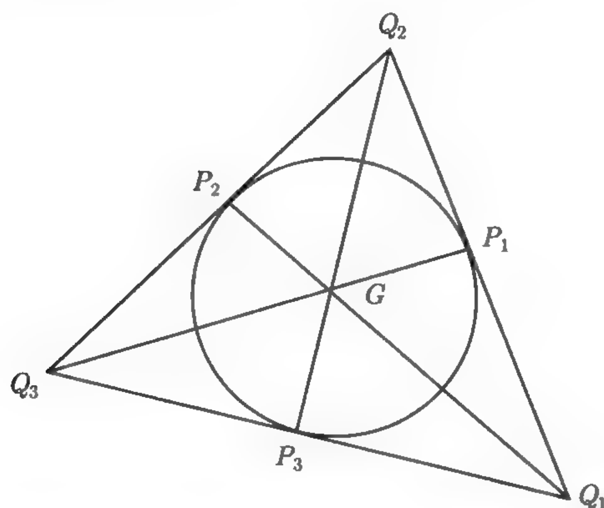


图 10.4.3 三角形的内塞瓦线相交于一点

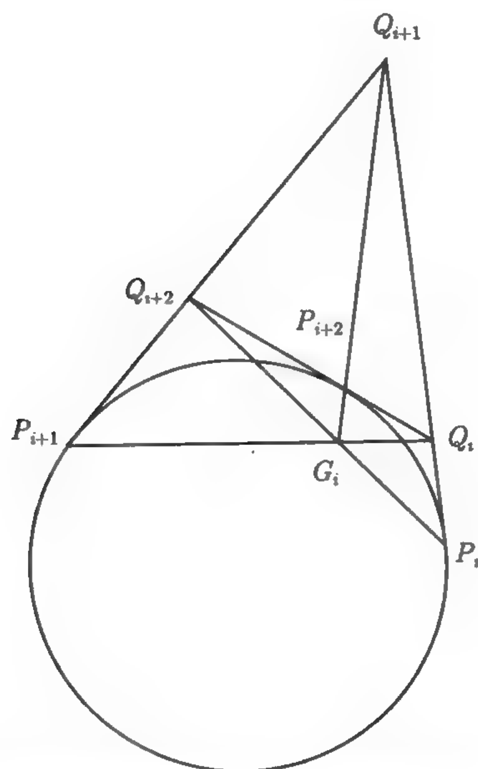


图 10.4.4 三角形的两条傍塞瓦线及另一条傍塞瓦线的延长线相交于一点

定理 10.4.2 设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内 (傍) 切圆为 $\odot C(R), Q_iQ_{i+1}(Q_iQ_{i+1}$ 所在直线) 与 $\odot C(R)$ 的切点为 $P_i(a+R\cos\alpha_i, b+R\sin\alpha_i)(i=1,2,3), M_i, N_{i+1}$ 分别是 $Q_iP_{i+1}, Q_{i+1}Q_{i+2}$ 的分点, 且 $Q_iM_i/M_iP_{i+1}=Q_{i+1}N_{i+1}/N_{i+1}Q_{i+2}=\lambda$, 则

$$D_{CM_iN_{i+1}}=c_1[(\lambda+2)\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})+\lambda\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})+\lambda\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_i)], \quad (10.4.6)$$

$$\sum_{i=1}^{3}D_{CM_iN_{i+1}}=c_2D_{P_1P_2P_3}, \quad (10.4.7)$$

其中 $i=1,2,3;c_1=(\lambda-1)R^2\Big/\left[8(1+\lambda)^2\cos\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cos\dfrac{\alpha_3-\alpha_2}{2}\cos\dfrac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\right]$,

$$c_2=(\lambda-1)(\lambda-2)\Big/\left[4(1+\lambda)^2\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\right].$$

证明　不妨设 $a=b=0$. 于是圆心的坐标为 $C(0,0)$. 由定理 33.1 的证明, 可得 $Q_iP_{i+1},Q_{i+1}Q_{i+2}$ 的分点的坐标

$$M_i\left(\frac{R}{1+\lambda}\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}+\lambda\cos\alpha_{i+1}\right),\frac{R}{1+\lambda}\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}+\lambda\sin\alpha_{i+1}\right)\right),$$

$$N_{i+1}\left(\frac{R}{1+\lambda}\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}+\lambda\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}}\right),\right.$$

$$\left.\frac{R}{1+\lambda}\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}+\lambda\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}}\right)\right).$$

根据三角形面积公式, 得

$$8(1+\lambda)^2\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}D_{CM_iN_{i+1}}$$

$$=4R^2\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}+\lambda\cos\alpha_{i+1}\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2} & \sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}+\lambda\sin\alpha_{i+1}\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\\ \begin{array}{c}\cos\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cos\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\\ +\lambda\cos\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\end{array} & \begin{array}{c}\sin\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cos\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\\ +\lambda\sin\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\end{array}\end{vmatrix}$$

$$=R^2\begin{vmatrix}\begin{array}{c}2\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}+\lambda\cos\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\\ +\lambda\cos\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\end{array} & \begin{array}{c}2\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}+\lambda\sin\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\\ +\lambda\sin\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\end{array}\\ \begin{array}{c}\cos\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_i}{2}+\cos\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\\ +\lambda\cos\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}+\lambda\cos\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_i}{2}\end{array} & \begin{array}{c}\sin\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_i}{2}+\sin\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\\ +\lambda\sin\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}+\lambda\sin\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_i}{2}\end{array}\end{vmatrix}$$

$$=R^2\begin{vmatrix}\begin{array}{c}2\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}+\lambda\cos\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\\ +\lambda\cos\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\end{array} & \begin{array}{c}2\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}+\lambda\sin\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\\ +\lambda\sin\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\end{array}\\ \begin{array}{c}\cos\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_i}{2}+\cos\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\\ +\lambda\cos\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}+\lambda\cos\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_i}{2}\end{array} & \begin{array}{c}\sin\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_i}{2}+\sin\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\\ +\lambda\sin\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}+\lambda\sin\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_i}{2}\end{array}\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)R^2\begin{vmatrix}\begin{array}{c}2\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}+\lambda\cos\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\\ +\lambda\cos\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\end{array} & \begin{array}{c}2\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}+\lambda\sin\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\\ +\lambda\sin\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\end{array}\\ \cos\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_i}{2}-\cos\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2} & \sin\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_i}{2}-\sin\dfrac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)R^2\begin{vmatrix} (\lambda+2)\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}+\lambda\cos\frac{2\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2} & (\lambda+2)\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}+\lambda\sin\frac{2\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2} \\ \cos\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_i}{2}-\cos\frac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2} & \sin\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_i}{2}-\sin\frac{2\alpha_{i+1}+\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2} \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)R^2[(\lambda+2)\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})+\lambda\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})+\lambda\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_i)],$$

注意到

$$\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}=\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2},$$

因此式 (10.4.6) 成立.

又

$$8(1+\lambda)^2\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}\sum_{i=1}^{3}D_{CM_iN_{i+1}}$$

$$=(\lambda-1)R^2\sum_{i=1}^{3}[(\lambda+2)\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})+\lambda\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})+\lambda\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_i)]$$

$$=(\lambda-1)R^2[(\lambda+2)\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})+\lambda\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})+\lambda\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_i)]$$

$$=(\lambda-1)R^2[(\lambda+2)\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)+\lambda\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})+\lambda\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})]$$

$$=(\lambda-1)(2-\lambda)R^2\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)$$

$$=2(\lambda-1)(2-\lambda)D_{P_1P_2P_3},$$

从而式 (10.4.7) 成立.

推论 10.4.5 设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内 (傍) 切圆为 $\odot C(R)$, Q_iQ_{i+1}(Q_iQ_{i+1} 所在直线) 与 $\odot C(R)$ 的切点为 $P_i(a+R\cos\alpha_i, b+R\sin\alpha_i)(i=1,2,3)$, 则三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内 (傍) 切圆的圆心 C 与 $Q_iP_{i+1}, Q_{i+1}Q_{i+2}$ 的分点 M_i, N_{i+1} 共线的充分必要条件 M_i, N_{i+1} 是 $Q_iP_{i+1}, Q_{i+1}Q_{i+2}$ 的中点.

证明 由定理 10.4.2 可知, 三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内 (傍) 切圆的圆心 C 与 $Q_iP_{i+1}, Q_{i+1}Q_{i+2}$ 的分点 M_i, N_{i+1} 共线 $\Leftrightarrow D_{CM_iN_{i+1}}=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \Leftrightarrow M_i, N_{i+1}$ 是 $Q_iP_{i+1}, Q_{i+1}Q_{i+2}$ 的中点.

注 10.4.2 推论 10.4.5 的必要条件为1997 年英国数学奥林匹克题.

推论 10.4.6 设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内 (傍) 切圆为 $\odot C(R)$, Q_iQ_{i+1}(Q_iQ_{i+1} 所在直线) 与 $\odot C(R)$ 的切点为 $P_i(a+R\cos\alpha_i, b+R\sin\alpha_i)(i=1,2,3)$, M_i, N_{i+1} 分别

是 $Q_iP_{i+1}, Q_{i+1}Q_{i+2}$ 的分点, 且 $Q_iM_i/M_iP_{i+1} = Q_{i+1}N_{i+1}/N_{i+1}Q_{i+2} = 2$, 则

$$\sum_{i=1}^{3} D_{CM_iN_{i+1}} = 0. \tag{10.4.8}$$

证明　在式 (10.4.7) 中令 $\lambda = 2$ 即得.

注 10.4.3　推论 10.4.6 的几何意义是: 在三角形 $CM_1N_2, CM_2N_3, CM_3N_1$ 中, 其中一个三角形的面积等于另两个三角形面积的和.

10.4.2　塞瓦线三角形有向面积的定值定理的推广

定理 10.4.3　设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内 (傍) 切圆为 $\odot C(R), Q_iQ_{i+1}(Q_iQ_{i+1}$ 所在直线) 与 $\odot C(R)$ 的切点为 $P_i(a + R\cos\alpha_i, b + R\sin\alpha_i)$, 射线 CP_i 与 $\odot C(R')$ 的交点为 $P_i'(i = 1, 2, 3)$, P 为三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{3} \sin(\alpha_{i+2} - \alpha_{i+1}) D_{PP_i'Q_{i+2}} = 0, \tag{10.4.7}$$

其中 $Q_{3+i} = Q_i$, $\alpha_{i+3} = \alpha_i$, 其余类同.

证明　如图 10.4.5 所示, 不妨设 $a = b = 0$, 注意到圆 $\odot C(R')$ 与射线 CP_i 交点的坐标为

$$P_i'(R'\cos\alpha_i, R'\sin\alpha_i) \ (i = 1, 2, 3) \ ,$$

在定理 10.4.1 的证明中将 R 换成 R' 即得式 (10.4.9).

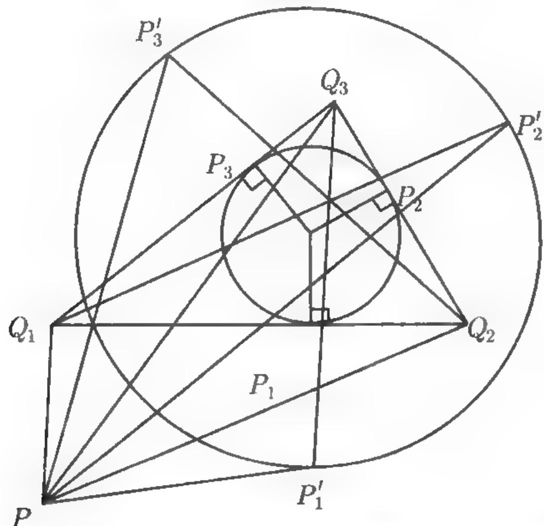


图 10.4.5　推广的三角形内塞瓦线三角形

根据定理 10.4.3, 仿推论 10.4.1~10.4.4 的证明, 可得如下推论:

推论 10.4.7　设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内 (傍) 切圆为 $\odot C(R), Q_iQ_{i+1}(Q_iQ_{i+1}$ 所在直线) 与 $\odot C(R)$ 的切点为 P_i, 射线 CP_i 与 $\odot C(R')$ 的交点为 $P_i'(i = 1, 2, 3)$, P

为 P_iQ_{i+2} 所在直线上任意一点, 则

$$|\sin(\alpha_i-\alpha_{i+2})|\, S_{PP'_{i+1}Q_i}=|\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)|\, S_{PP'_{i+2}Q_{i+1}}(i=1,2,3).$$

推论 10.4.8 设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内 (傍) 切圆为 $\odot C(R)$, Q_iQ_{i+1}(Q_iQ_{i+1} 所在直线) 与 $\odot C(R)$ 的切点为 $P_i(i=1,2,3)$, 射线 CP_i 与 $\odot C(R')$ 的交点为 $P_i'(i=1,2,3)$, M_1, M_2 是 $P_i'Q_{i+2}$ 所在直线上任意两点, 则

$$S_{M_1P_{i+1}Q_i}\cdot S_{M_2P_{i+2}Q_{i+1}}=S_{M_1P_{i+2}Q_{i+1}}\cdot S_{M_2P_{i+1}Q_i}(i=1,2,3).$$

推论 10.4.9[30] 设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内切圆为 $\odot C(R)$, Q_iQ_{i+1} 与 $\odot C(R)$ 的切点为 $P_i(i=1,2,3)$, 射线 CP_i 与 $\odot C(R')$ 的交点为 $P_i'(i=1,2,3)$, 则线段 $P_1'Q_3, P_2'Q_1, P_3'Q_2$ 相交于一点 (如图 10.4.6).

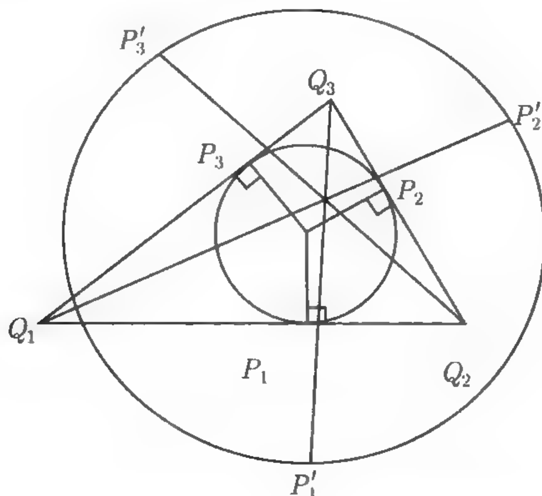


图 10.4.6 推广的三角形内塞瓦线相交于一点

推论 10.4.10[30] 设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的傍切圆为 $\odot C(R)$, Q_iQ_{i+1} 所在直线与 $\odot C(R)$ 的切点为 P_i, 射线 CP_i 与 $\odot C(R')$ 的交点为 $P_i'(i=1,2,3)$, 则 $P_1'Q_3, P_2'Q_1, P_3'Q_2$ 所在的三条直线相交于一点.

10.4.3 与三角形内心 (外心) 线构成三线共点的直线

定义 10.4.2 三角形的一个顶点与三角形内心 (外心) 所在直线分别称为三角形的内心 (外心) 线.

定理 10.4.4(1988 年加拿大数学奥林匹克训练题) 设 O 是三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内心, 三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内切圆 $\odot O$ 与 Q_iQ_{i+1} 的切点为 P_i, Q_iQ_{i+1} 的中点为 R_i, 证明三角形的内心线 Q_iO 与 P_iP_{i+1}, $R_{i+1}R_{i+2}$ 共点 $(i=1,2,3)$.

证明 如图 10.4.7 所示. 以三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内心 O 为坐标原点建立直角坐标系, 设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 各边与其内切圆 $\odot O$ 的切点的坐标为 $P_i(a\cos\alpha_i, a\sin\alpha_i)$

$(i=1,2,3)$. 故由定理 10.2.1 的证明得直线 P_iP_{i+1} 的方程为

$$\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot x+\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\cdot y-a\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}=0,$$

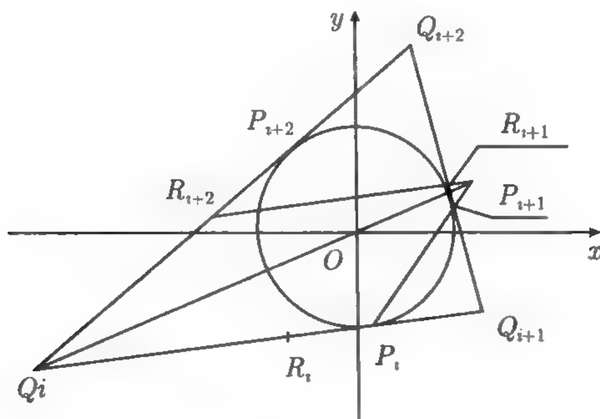


图 10.4.7

又由定理 10.4.1 的证明得三角形顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{a\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}},\frac{a\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}\right)(i=1,2,3),$$

于是三角形各边中点的坐标为

$$R_i\left(\frac{a}{2}\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}\right),\right.$$
$$\left.\frac{a}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}+\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}\right)\right)(i=1,2,3).$$

从而求得三角形内心线 Q_iO 的方程为

$$\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cdot x-\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cdot y=0,$$

直线 $R_{i+1}R_{i+2}$ 的方程为

$$\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}-\frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}\right)x+\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}-\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}\right)y$$
$$+\frac{a}{2}\left[\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}}\right)\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}}+\frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}\right)\right.$$

$$-\left(\frac{\cos\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}}{\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}\right)\left(\frac{\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}}{\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}}+\frac{\sin\frac{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+1}}{2}}{\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}{2}}\right)\Bigg]=0,$$

化简得

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})[\cos\alpha_i\cdot x+\sin\alpha_i\cdot y]\\&+\frac{a}{2}[\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_i)+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})+\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})]=0.\end{aligned}$$

由于三直线 P_iP_{i+1}, Q_iO 和 $R_{i+1}R_{i+2}$ 的一级行列式

$$\begin{aligned}&\Delta_1\\
&=\frac{a}{2}\begin{vmatrix}\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2} & \sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2} & -2\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\\ \sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2} & -\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2} & 0\\ \sin(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})\cos\alpha_i & \sin(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})\sin\alpha_i & \begin{matrix}\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_i)+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})\\+\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})\end{matrix}\end{vmatrix}\\
&=a\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})\left(\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\sin\alpha_i+\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cos\alpha_i\right)\\
&\quad+\frac{a}{2}[\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_i)+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})+\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})]\\
&\quad\cdot\left(\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}+\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}\cos\frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{2}\right)\\
&=a\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\\
&\quad+\frac{a}{2}[\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_i)+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})+\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})]\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}}{2}\\
&=\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}}{2}\left[4\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\sin\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}}{2}\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\right.\\
&\quad\left.+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_i)+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})+\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})\right]\\
&=\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}}{2}\left[2\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\sin\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right.\\
&\quad+2\cos\frac{\alpha_{i+2}-\alpha_i}{2}\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}-2\alpha_{i+2}}{2}\\
&\quad\left.+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_i)+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})+\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})\right]\\
&=\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}}{2}[\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_i)+\sin(\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2})+\sin(\alpha_i-\alpha_{i+2})\\
&\quad+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_i)+\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})+\sin(\alpha_i-\alpha_{i+1})]\end{aligned}$$

$=0,$

所以三直线 Q_iO, P_iP_{i+1} 和 $R_{i+1}R_{i+2}$ 相交于一点.

定理 10.4.5　设 O_j 三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的傍心, 三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的内切圆 $\odot O_j$ 与 Q_iQ_{i+1} 的切点为 P_i, Q_iQ_{i+1} 的中点为 R_i, 证明三角形的内心线 Q_iO_i 与直线 P_iP_{i+1}, $R_{i+1}R_{i+2}$ 共点 $(i, j = 1, 2, 3)$.

证明　如图 10.4.8 所示. 以三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的傍心 O_1 为坐标原点建立直角坐标系, 设三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 各边与其傍切圆 $\odot O_1$ 的切点的坐标为 $P_i(a\cos\alpha_i, a\sin\alpha_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. 根据定理 10.4.4 的证明可知三直线 Q_iO_1, P_iP_{i+1} 和 $R_{i+1}R_{i+2}(i = 1, 2, 3)$ 相交于一点, 其证明过程与定理 10.4.4 完全相同.

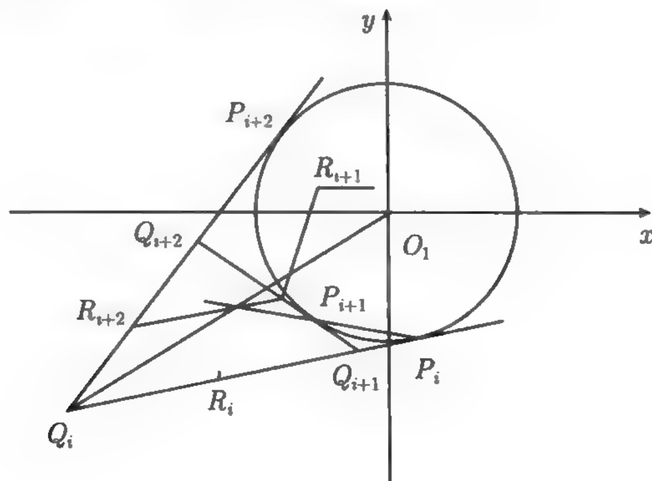


图 10.4.8

类似地, 可以证明三直线 Q_iO_2, P_iP_{i+1} 和 $R_{i+1}R_{i+2}$ 及 Q_iO_3, P_iP_{i+1} 和 $R_{i+1}R_{i+2}(i = 1, 2, 3)$ 相交于一点.

第 11 章　二次曲线外切 $n(n \geqslant 4)$ 边形中有向面积的定值定理及其应用

11.1　二次曲线外切 $n(n \geqslant 4)$ 边形中有向面积的定值定理

在二次曲线中有一个著名的定理, 即二次曲线外切六边形的三对对顶点的连线相交于一点, 这就是所谓的 Brianchon 定理. 本节用有向面积定值法研究各类二次曲线中有关的问题.

首先介绍二次曲线外切多边形以及二次曲线外切多边形的对角线三角形、切点线三角形的概念; 再分别得出椭圆类二次曲线、双曲类二次曲线和抛物类二次曲线外切 n 边形 $(n \geqslant 4)$ 中有向面积的定值定理, 从而揭示各类二次曲线 n 边形 $(n \geqslant 4)$ 中对角线三角形和切点线三角形之间的关系, 并推出著名的 Brianchon 定理.

我们发现, Brianchon 定理并不是偶然的, 它是二次曲线外切对边形中有向面积定值定理的必然结果.

11.1.1　二次曲线外切多边形有关的概念

定义 11.1.1　若多边形的各边或边的延长线都和某二次曲线相切, 则称该多边形为二次曲线的外切多边形.

定义 11.1.2　设 $Q_1Q_2\cdots Q_n(n \geqslant 4)$ 是二次曲线外切 n 边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与二次曲线的切点为 P_i, 则称以 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 的一条对角线 Q_iQ_{i+j}(两个切点之间的连线 P_iP_{i+l})$(i,l=1,2,\cdots,n; j=2,\cdots,n;\ P_{n+i}=P_i, Q_{n+i}=Q_i)$ 为一边的三角形为 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 的对角线三角形 (切点线三角形).

为方便起见, 我们把包含一条对角线 (两切点之间的连线) 的任一线段看成是对角线三角形 (切点线三角形) 的特殊情形.

11.1.2　椭圆外切 $n(n \geqslant 4)$ 边形中有向面积的定值定理

记

$$u_{i,i+j} = 2\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j}-\alpha_{i+j-1}}{2}\Big/\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2},$$

$$u'_{i,i+j} = 2\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j}-\alpha_{i+j-1}}{2}\Big/\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j-1}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j}}{2},$$

$$v_{i,i+j} = 1 \Big/ \sin^2 \frac{\alpha_i - \alpha_{i+j}}{2}, \quad \alpha_{n+i} = \alpha_i.$$

于是

$$u_{n+i,n+j} = u_{i,j}, \quad u'_{n+i,n+j} = u'_{i,j}, \quad v_{n+i,n+j} = v_{i,j}.$$

定理 11.1.1 设 $Q_1Q_2\cdots Q_n(n \geqslant 4)$ 是椭圆 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ 的外切多边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与椭圆的切点为 $P_k(a\cos\alpha_k, b\sin\alpha_k)(k = 1, 2, \cdots, n)$, P 是椭圆所在平面上任意一点, 则

$$u_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}} = v_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}} + v_{i+n-1,i+j-1}D_{PP_{i+n-1}P_{i+j-1}}, \tag{11.1.1}$$

$$u'_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}} = v_{i,i+j-1}D_{PP_iP_{i+j-1}} + v_{i+n-1,i+j}D_{PP_{i+n-1}P_{i+j}}, \tag{11.1.2}$$

其中当 n 为奇数时, $i = 1, 2, \cdots, n, j = 2, \cdots, \frac{n-1}{2}$; 当 n 为偶数时, $i = 1, 2, \cdots, n$, $j = 2, \cdots, \frac{n}{2} - 1$ 及 $i = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2}, j = \frac{n}{2}$.

证明 如图 11.1.1 所示. 设椭圆所在平面任意一点的坐标为 $P(ar\cos\alpha, br\sin\alpha)$ $(r \geqslant 0)$. 由 $Q_{i+n-1}Q_i$ 的直线方程

$$b\cos\alpha_{i+n-1} \cdot x + a\sin\alpha_{i+n-1} \cdot y = ab$$

和 Q_iQ_{i+1} 的直线方程

$$b\cos\alpha_i \cdot x + a\sin\alpha_i \cdot y = ab,$$

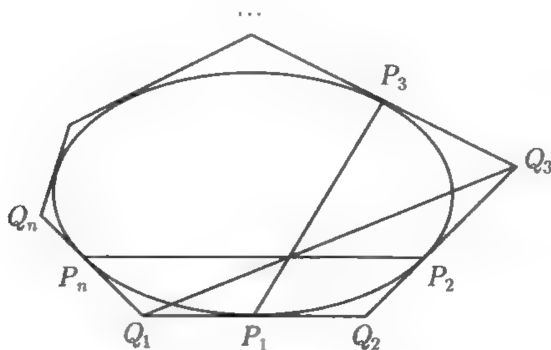


图 11.1.1 椭圆外切多边形

求得 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{a\cos\frac{\alpha_i + \alpha_{i+n-1}}{2}}{\cos\frac{\alpha_i - \alpha_{i+n-1}}{2}}, \frac{b\sin\frac{\alpha_i + \alpha_{i+n-1}}{2}}{\cos\frac{\alpha_i - \alpha_{i+n-1}}{2}}\right) (i = 1, 2, \cdots, n).$$

根据三角形有向面积公式得

$$2\cos\frac{\alpha_i - \alpha_{i+n-1}}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j} - \alpha_{i+j-1}}{2}D_{PQ_iQ_{i+j}}$$

$$
\begin{aligned}
&=abr\left(\cos\alpha\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}-\sin\alpha\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}\right)\cos\frac{\alpha_{i+j}-\alpha_{i+j-1}}{2}\\
&\quad+ab\left(\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+j}+\alpha_{i+j-1}}{2}-\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j}+\alpha_{i+j-1}}{2}\right)\\
&\quad+abr\left(\cos\frac{\alpha_{i+j}+\alpha_{i+j-1}}{2}\sin\alpha-\sin\frac{\alpha_{i+j}+\alpha_{i+j-1}}{2}\cos\alpha\right)\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}\\
&=abr\left(\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n-1}-2\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j}-\alpha_{i+j-1}}{2}\right.\\
&\quad\left.-\sin\frac{\alpha_{i+j}+\alpha_{i+j-1}-2\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}\right)\\
&\quad+ab\sin\frac{\alpha_{i+j}+\alpha_{i+j-1}-\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}\\
&=\frac{1}{2}abr\left(\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+j}+\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}-2\alpha}{2}\right.\\
&\quad\left.-\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}-\alpha_{i+n-1}-2\alpha}{2}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}abr\left(\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j}-2\alpha}{2}\right.\\
&\quad\left.-\sin\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}+\alpha_{i+n-1}-\alpha_i-2\alpha}{2}\right)\\
&\quad+ab\sin\frac{\alpha_{i+j}+\alpha_{i+j-1}-\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}\\
&=abr\left(\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+j}-2\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}\right.\\
&\quad\left.+\cos\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+n-1}-2\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}\right)\\
&\quad-ab\left(\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}+\cos\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}\right),
\end{aligned}
$$

不妨设 $0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<2\pi$, 易知 $\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}\sin\dfrac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}\neq 0$, 于是

$$
\begin{aligned}
u_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}=&abr\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+j}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_{i+j-1}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}}\right)\\
&-ab\left(\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}+\cot\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{11.1.3}
$$

又

$$
D_{PP_iP_{i+j}}=\frac{1}{2}abr\left(\cos\alpha\sin\alpha_i-\sin\alpha\cos\alpha_i\right)+\frac{1}{2}ab\left(\cos\alpha_i\sin\alpha_{i+j}-\sin\alpha_i\cos\alpha_{i+j}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}abr\left(\cos\alpha_{i+j}\sin\alpha-\sin\alpha_{i+j}\cos\alpha\right)\\
=&\frac{1}{2}abr\left[\sin\left(\alpha_i-\alpha\right)-\sin\left(\alpha_{i+j}-\alpha\right)\right]+\frac{1}{2}ab\sin\left(\alpha_{i+j}-\alpha_i\right)\\
=&abr\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+j}-2\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}-ab\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
v_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}}=abr\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+j}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}}-ab\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2} \tag{11.1.4}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
&v_{i+n-1,i+j-1}D_{PP_{i+n-1}P_{i+j-1}}\\
=&abr\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_{i+j-1}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}}-ab\cot\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}
\end{aligned} \tag{11.1.5}
$$

由式 (11.1.3)、式 (11.1.4) 和式 (11.1.5) 即得式 (11.1.1).

类似地, 可以证明式 (11.1.2) 成立.

11.1.3 双曲线外切 $n(n \geqslant 4)$ 边形中有向面积的定值定理

记

$$
\begin{aligned}
s_{i,i+j}=&2\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}}{2}\Big/\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2},\\
s'_{i,i+j}=&2\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}}{2}\Big/\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j-1}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j}}{2},\\
t_{i,i+j}=&\cos\alpha_i\cos\alpha_{i+j}/\sin^2\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2},\quad \alpha_{n+i}=\alpha_i.
\end{aligned}
$$

显然, $s_{n+i,n+j}=s_{i,j}, s'_{n+i,n+j}=s'_{i,j}, t_{n+i,n+j}=t_{i,j}$.

定理 11.1.2 设 $Q_1Q_2\cdots Q_n(n\geqslant 4)$ 是双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 外切 n 边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与双曲线的切点为 $P_k(a\sec\alpha_k, b\tan\alpha_k)(k=1,2,\cdots,n)$, P 是双曲线所在平面上任意一点, 则

$$
s_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}=t_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}}+t_{i+n-1,i+j-1}D_{PP_{i+n-1}P_{i+j-1}}, \tag{11.1.6}
$$

$$
s'_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}=t_{i,i+j-1}D_{PP_iP_{i+j-1}}+t_{i+n-1,i+j}D_{PP_{i+n-1}P_{i+j}}, \tag{11.1.7}
$$

其中当 n 为奇数时, $i=1,2,\cdots,n, j=2,\cdots,\dfrac{n-1}{2}$; 当 n 为偶数时, $i=1,2,\cdots,n$, $j=2,\cdots,\dfrac{n}{2}-1$ 及 $i=1,2,\cdots,\dfrac{n}{2}, j=\dfrac{n}{2}$.

证明 如图 11.1.2 所示. 设双曲线所在平面上任意一点的坐标为 $P(ar\cos\alpha, br\sin\alpha)$. 由切线 $Q_{i+n-1}Q_i$ 的方程

$$bx - a\sin\alpha_{i+n-1}\cdot y = ab\cos\alpha_{i+n-1}$$

和 Q_iQ_{i+1} 的方程

$$bx - a\sin\alpha_i\cdot y = ab\cos\alpha_i$$

求得 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{a\cos\dfrac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}}, \frac{b\sin\dfrac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}}\right)(i=1,2,\cdots,n).$$

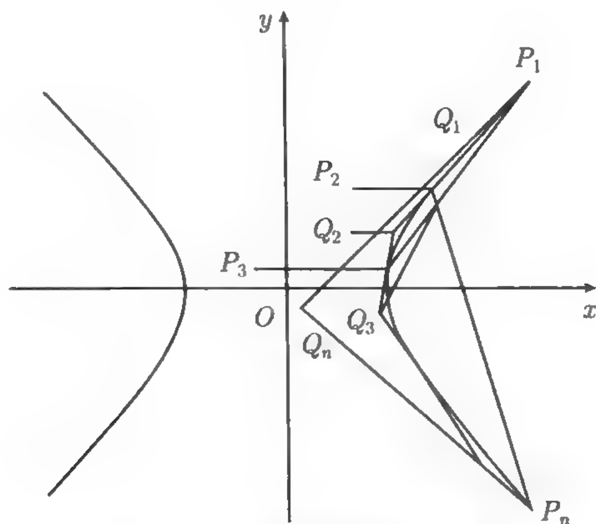


图 11.1.2 双曲线外切多边形

根据三角形有向面积公式得

$$\begin{aligned}
&2\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}}{2}D_{PQ_iQ_{i+j}}\\
=&abr\left(\cos\alpha\sin\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_i}{2}\sin\alpha\right)\cos\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}}{2}\\
&+ab\left(\cos\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_i}{2}\sin\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+j-1}-\alpha_{i+j}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}\right)\\
&+abr\left(\cos\frac{\alpha_{i+j-1}-\alpha_{i+j}}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\sin\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}}{2}\right)\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}\\
=&abr\cos\alpha\left(\sin\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}\sin\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}}{2}\right)\\
&+abr\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j-1}-\alpha_{i+j}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}}{2}\cos\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_i}{2}\right)\\
&+ab\left(\sin\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}}{2}\cos\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_i}{2}-\sin\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j-1}-\alpha_{i+j}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= abr\cos\alpha \sin\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i-\alpha_{i+j-1}-\alpha_{i+j}}{2} \\
&\quad + \frac{1}{2}abr\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i+\alpha_{i+j-1}-\alpha_{i+j}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}-\alpha_i}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}abr\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i+\alpha_{i+j}-\alpha_{i+j-1}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}+\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}ab\left(\sin\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}+\alpha_{i+n-1}-\alpha_i}{2}-\sin\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i+\alpha_{i+j-1}-\alpha_{i+j}}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}ab\left(\sin\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}+\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}-\sin\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i+\alpha_{i+j}-\alpha_{i+j-1}}{2}\right) \\
&= abr\cos\alpha\left(\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}+\cos\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}\right) \\
&\quad - abr\sin\alpha\left(\sin\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_{i+j-1}}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}+\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+j}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}\right) \\
&\quad + ab\left(\cos\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+n-1}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+j}-\alpha_i}{2}+\cos\frac{\alpha_{i+j}+\alpha_i}{2}\sin\frac{\alpha_{i+j-1}-\alpha_{i+n-1}}{2}\right),
\end{aligned}
$$

由 $-\frac{\pi}{2} < \alpha_k < \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2} < \alpha_k < \frac{3\pi}{2} (k=1,2,\cdots,n)$ 且互不相等, 上式两边同除以

$$
\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2} (\neq 0)
$$

得

$$
\begin{aligned}
s_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}} =& abr\cos\alpha\left(\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}+\cot\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}\right) \\
& - abr\sin\alpha\left(\frac{\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+j}}{2}}{\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}}+\frac{\sin\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_{i+j-1}}{2}}{\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}}\right) \\
& - ab\left(\frac{\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+j}}{2}}{\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_{i+j-1}}{2}}{\sin\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}}\right).
\end{aligned} \tag{11.1.8}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
t_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}} =& abr\cos\alpha\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2} \\
& - abr\sin\alpha\frac{\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+j}}{2}}{\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}} - ab\frac{\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+j}}{2}}{\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}},
\end{aligned} \tag{11.1.9}
$$

$$
t_{i+n-1,i+j-1}D_{PP_{i+n-1}P_{i+j-1}} = abr\cos\alpha\cot\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}
$$

$$- abr\sin\alpha\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_{i+j-1}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}} - ab\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_{i+j-1}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}}. \qquad (11.1.10)$$

由式 (11.1.8)、式 (11.1.9) 和式 (11.1.10), 即得式 (11.1.6).

类似地, 在式 (11.1.8) 的证明中注意到

$$\begin{aligned}
&abr\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j-1}-\alpha_{i+j}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}}{2}\cos\frac{\alpha_{i+n-1}-\alpha_i}{2}\right)\\
=&\frac{1}{2}abr\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i+\alpha_{i+j-1}-\alpha_{i+j}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}+\alpha_i-\alpha_{i+n-1}}{2}\right)\\
&+\frac{1}{2}abr\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_i+\alpha_{i+j}-\alpha_{i+j-1}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+n-1}+\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}-\alpha_i}{2}\right),
\end{aligned}$$

可以证明式 (11.1.7) 成立.

11.1.4 抛物线外切 $n(n \geqslant 4)$ 边形中有向面积的定值定理

记 $w_{i,j}=1/(t_i-t_j), t_{n+i}=t_i$. 于是, $w_{n+i,n+j}=w_{i,j}$. 我们有以下定理.

定理 11.1.3 设 $Q_1Q_2\cdots Q_n(n \geqslant 4)$ 是抛物线 $x^2=2py$ 的外切 n 边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与抛物线的切点为 $P_k(2pt_k, 2pt_k^2)(k=1,2,\cdots,n)$, P 是抛物线所在平面上任意一点, 则

$$2w_{i,i+j}w_{i+n-1,i+j-1}D_{PQ_iQ_{i+j}}=w_{i,i+j}^2D_{PP_iP_{i+j}}+w_{i+n-1,i+j-1}^2D_{PP_{i+n-1}P_{i+j-1}}, \qquad (11.1.11)$$

$$2w_{i,i+j-1}w_{i+n-1,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}=w_{i,i+j-1}^2D_{PP_iP_{i+j-1}}+w_{i+n-1,i+j}^2D_{PP_{i+n-1}P_{i+j}}, \qquad (11.1.12)$$

其中, 当 n 为奇数时, $i=1,2,\cdots,n, j=2,\cdots,\dfrac{n-1}{2}$; 当 n 为偶数时, $i=1,2,\cdots,n$, $j=2,\cdots,\dfrac{n}{2}-1$ 及 $i=1,2,\cdots,\dfrac{n}{2}, j=\dfrac{n}{2}$.

证明 如图 11.1.3 所示. 不妨设抛物线所在平面上任意一点的坐标为 $P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. 由题设切线 $Q_{i+n-1}Q_i$ 的方程为

$$2pt_{i+n-1}x=2p\cdot\frac{y+2pt_{i+n-1}^2}{2},$$

即

$$y-2t_{i+n-1}x=-2pt_{i+n-1}^2, \qquad (11.1.13)$$

同理可得切线 Q_iQ_{i+1} 的方程

$$y-2t_ix=-2pt_i^2. \qquad (11.1.14)$$

式 (11.1.13) 和式 (11.1.14) 联立求得 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 顶点的坐标

$$Q_i(p(t_i+t_{i+n-1}),2pt_it_{i+n-1})(i=1,2,\cdots,n).$$

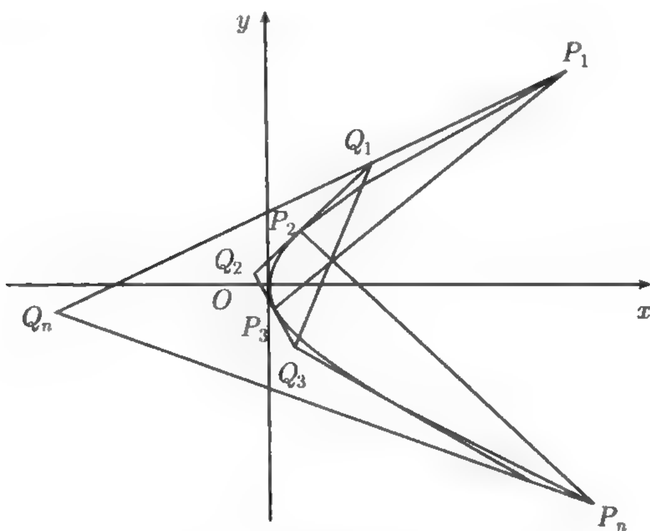


图 11.1.3 抛物线外切多边形

根据三角形有向面积公式, 得

$$\begin{aligned}2D_{PQ_iQ_{i+j}}=&pr[2t_it_{i+n-1}\cos\alpha-(t_i+t_{i+n-1})\sin\alpha]\\&+2p^2[(t_i+t_{i+n-1})t_{i+j}t_{i+j-1}-(t_{i+j}+t_{i+j-1})t_it_{i+n-1}\\&+pr[(t_{i+j}+t_{i+j-1})\sin\alpha-2t_{i+j}t_{i+j-1}\cos\alpha]\\=&2pr\cos\alpha[t_i(t_{i+n-1}-t_{i+j-1})+t_{i+j-1}(t_i-t_{i+j})]\\&-pr\sin\alpha[(t_i-t_{i+j})+(t_{i+n-1}-t_{i+j-1})]\\&-2p^2[t_it_{i+j}(t_{i+n-1}-t_{i+j-1})+t_{i+n-1}t_{i+j-1}(t_i-t_{i+j})].\end{aligned}$$

上式两边同除以 $(t_i-t_{i+j})(t_{i+n-1}-t_{i+j-1})(\neq 0)$, 得

$$\begin{aligned}&2w_{i,i+j}w_{i+n-1,i+j-1}D_{PQ_iQ_{i+j}}\\=&2pr\cos\alpha(w_{i,i+j}t_i+w_{i+n-1,i+j-1}t_{i+j-1})\\&-pr\sin\alpha(w_{i,i+j}+w_{i+n-1,i+j-1})\\&-2p^2(w_{i,i+j}t_it_{i+j}+w_{i+n-1,i+j-1}t_{i+n-1}t_{i+j-1}).\end{aligned}\tag{11.1.15}$$

又

$$\begin{aligned}D_{PP_iP_{i+j}}=&pr(t_i^2\cos\alpha-t_i\sin\alpha)+2p^2(t_it_{i+j}^2-t_{i+j}t_i^2)+pr(t_{i+j}\sin\alpha-t_{i+j}^2\cos\alpha)\\=&pr\cos\alpha(t_i-t_{i+j})(t_i+t_{i+j})-pr\sin\alpha(t_i-t_{i+j})-2p^2t_it_{i+j}(t_i-t_{i+j}),\end{aligned}$$

于是

$$w_{i,i+j}^2 D_{PP_iP_{i+j}} = prw_{i,i+j}(t_i+t_{i+j})\cos\alpha - prw_{i,i+j}\sin\alpha - 2p^2 w_{i,i+j}t_it_{i+j}. \tag{11.1.16}$$

同理

$$\begin{aligned}&w_{i+n-1,i+j-1}^2 D_{PP_{i+n-1}P_{i+j-1}}\\=&prw_{i+n-1,i+j-1}(t_{i+n-1}+t_{i+j-1})\cos\alpha\\&-prw_{i+n-1,i+j-1}\sin\alpha - 2p^2 w_{i+n-1,i+j-1}t_{i+n-1}t_{i+j-1}.\end{aligned} \tag{11.1.17}$$

注意到 $2(w_{i,i+j}t_i + w_{i+n-1,i+j-1}t_{i+j-1}) = w_{i,i+j}(t_i+t_{i+j}) + w_{i+n-1,i+j-1}(t_{i+n-1}+t_{i+j-1})$, 由式 (11.1.15)、式 (11.1.16) 和 (11.1.17), 即得式 (11.1.11).

类似地, 在式 (11.1.15) 的证明中注意到

$$\begin{aligned}2D_{PQ_iQ_{i+j}} =&2pr\cos\alpha[t_{i+n-1}(t_i-t_{i+j-1})+t_{i+j-1}(t_{i+n-1}-t_{i+j})]\\&-pr\sin\alpha[(t_i-t_{i+j-1})+(t_{i+n-1}-t_{i+j})]\\&-2p^2[t_it_{i+j-1}(t_{i+n-1}-t_{i+j})+t_{i+n-1}t_{i+j}(t_i-t_{i+j-1})]\end{aligned}$$

可以证明式 (11.1.12) 成立.

11.1.5 二次曲线外切 $n(n\geqslant 4)$ 边形中有向面积定值定理的应用

定理 11.1.4(Brianchon 定理) 设 $Q_1Q_2\cdots Q_6$ 是二次曲线外切六边形, 则 $Q_1Q_2\cdots Q_6$ 三对对顶点的连线 Q_1Q_4, Q_2Q_5 和 Q_3Q_6 所在直线相交于一点.

证明 设 Q_1Q_4 与 Q_2Q_5 所在直线的交点为 G, 在式 (11.1.1) 中令 $n=6, j=3$ 及 $D_{GQ_1Q_4}=D_{GQ_2Q_5}=0$, 并分别取 $i=1,2,3$ 得

$$v_{1,4}D_{GP_1P_4}+v_{6,3}D_{GP_6P_3}=0, \tag{11.1.18}$$

$$v_{2,5}D_{GP_2P_5}+v_{1,4}D_{GP_1P_4}=0, \tag{11.1.19}$$

$$u_{3,6}D_{GQ_3Q_6}=v_{3,6}D_{GP_3P_6}+v_{2,5}D_{GP_2P_5}. \tag{11.1.20}$$

式 (11.1.18)− 式 (11.1.19)+ 式 (11.1.20) 并注意到 $D_{GP_6P_3}=-D_{GP_3P_6}, v_{3,6}=v_{6,3}$ 及 $u_{3,6}\neq 0$ 得 $D_{GQ_3Q_6}=0$, 即 G 在直线 Q_3Q_6 上, 从而 Q_1Q_4, Q_2Q_5 和 Q_3Q_6 所在直线相交于一点. 从而 Brianchon 定理对椭圆外切六边形成立.

类似地, 利用式 (11.1.6)、式 (11.1.11) 可以证明 Brianchon 定理对双曲线外切六边形和抛物线外切六边形成立.

综上可以看出, 二次曲线外切 $n(n\geqslant 4)$ 边形有三片茂密的定值定理之 “林”, 而 Brianchon 定理只是这三片林交汇处的一棵 “树”. 利用本节有向面积的定值定理, 还可以得出二次曲线外切 $n(n\geqslant 4)$ 边形中的共点性、共线性定理, 我们将在 12.1 节用圆锥曲线外切 $n(n\geqslant 4)$ 边形中有向面积的定值定理统一处理.

11.2　二次曲线外切 $mn(m,n \geqslant 2)$ 边形中有向面积的定值定理

我们知道, Brianchon 定理不仅对二次曲线外切六边形成立, 当二次曲线外切六边形退化成外切四边形时, 可以得到 Brianchon 定理在二次曲线外切四边形的情形. 于是, 我们毕竟要问, Brianchon 定理为什么对二次曲线外切八边形、十边型等不成立? 我们发现, 在有向面积的观点下, 这两种看似对立的情况, 在二次曲线偶数外切多边中可以得到统一.

本节主要探讨各类二次曲线外切 mn 边形 $(m,n \geqslant 2)$ 中对角线三角形和切点线三角形之间的关系, 分别得出椭圆类二次曲线、双曲类二次曲线和抛物类二次曲线外切 mn 边形中有关这两类三角形有向面积的定值定理, 这些定理可以看成是 Brianchon 定理在各类二次曲线外切 mn 边形中的推广, 从而进一步揭示 Brianchon 定理的背景.

11.2.1　椭圆外切 $mn(m,n \geqslant 2)$ 边形中有向面积的定值定理

记

$$u_{i,i+j}=2\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+mn-1}}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j}-\alpha_{i+j-1}}{2}\Big/\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+mn-1}-\alpha_{i+j-1}}{2},$$

$$v_{i,i+j}=1\Big/\sin^2\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2},\quad \alpha_{mn+i}=\alpha_i.$$

于是

$$u_{mn+i,mn+j}=u_{i,j},\quad v_{mn+i,mn+j}=v_{i,j}.$$

定理 11.2.1　设 $Q_1Q_2\cdots Q_{mn}(m,n\geqslant 2)$ 是椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的外切 mn 边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与椭圆的切点为 $P_k(a\cos\alpha_k,b\sin\alpha_k)(k=1,2,\cdots,mn)$, P 是椭圆所在平面上任意一点, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}u_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}=&(-1)^n v_{n+i_0-1,n+i_0+j-1}D_{PP_{n+i_0-1}P_{n+i_0+j-1}}\\&-v_{i_0+mn-1,i_0+j-1}D_{PP_{i_0+mn-1}P_{i_0+j-1}},\quad(11.2.1)\end{aligned}$$

其中 $1\leqslant i_0\leqslant mn$, $j=2,3,\cdots,mn-1$.

证明　显然 $v_{mn+i,j}=v_{i,j},D_{PP_{mn+i}P_{i+j}}=D_{PP_iP_{i+j}}$. 由式 (11.1.1) 可得

$$u_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}=v_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}}+v_{i+mn-1,i+j-1}D_{PP_{i+mn-1}P_{i+j-1}}$$
$$(i=1,2,\cdots,mn;j=2,3,\cdots,n),$$

从而

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}u_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}\\
=&\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}v_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}}\\
&+\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}v_{i+mn-1,i+j-1}D_{PP_{i+mn-1}P_{i+j-1}}\\
=&\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}v_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}}\\
&+\sum_{i=i_0-1}^{n+i_0-2}(-1)^{i-i_0+2}v_{i+mn,i+j}D_{PP_{i+mn}P_{i+j}}\\
=&(-1)^n v_{n+i_0-1,n+i_0+j-1}D_{PP_{n+i_0-1}P_{n+i_0+j-1}}\\
&+\sum_{i=i_0}^{n+i_0-2}(-1)^{i-i_0+1}v_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}}\\
&-v_{i_0+mn-1,i_0+j-1}D_{PP_{i_0+mn-1}P_{i_0+j-1}}\\
&+\sum_{i=i_0}^{n+i_0-2}(-1)^{i-i_0+2}v_{i+mn,i+j}D_{PP_{i+mn}P_{i+j}}\\
=&(-1)^n v_{n+i_0-1,n+i_0+j-1}D_{PP_{n+i_0-1}P_{n+i_0+j-1}}\\
&-v_{i_0+mn-1,i_0+j-1}D_{PP_{i_0+mn-1}P_{i_0+j-1}}.
\end{aligned}
$$

即式 (11.2.1) 成立

定理 11.2.2 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n}(n\geqslant 2)$ 是椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的外切 $2n$ 边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与椭圆的切点为 $P_k(a\cos\alpha_k,b\sin\alpha_k)(k=1,2,\cdots,2n)$,$P$ 是椭圆所在平面上任意一点, 则

(1) 当 n 为奇数时,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i u_{i,i+n}D_{PQ_iQ_{i+n}}=0,\tag{11.2.2}$$

(2) 当 n 为偶数时,

$$\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}u_{i,i+n}D_{PQ_iQ_{i+n}}=2v_{n+i_0-1,2n+i_0-1}D_{PP_{n+i_0-1}P_{2n+i_0-1}},\tag{11.2.3}$$

其中 $1\leqslant i_0\leqslant 2n$, $j=2,3,\cdots,2n-1$.

证明 在式 (11.2.1) 中令 $m=2$, $j=n$, 并注意到

$$D_{PP_{2n+i_0-1}P_{n+i_0-1}}=-D_{PP_{n+i_0-1}P_{2n+i_0-1}}\text{及}v_{2n+i_0-1,n+i_0-1}=v_{n+i_0-1,2n+i_0-1},$$

即得式 (11.2.2) 和式 (11.2.3) 两式.

11.2.2 双曲线外切 $mn(m,n\geqslant 2)$ 边形中有向面积的定值定理

记

$$s_{i,i+j}=2\cos\frac{\alpha_{i+mn-1}+\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}}{2}\Big/\left(\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+mn-1}-\alpha_{i+j-1}}{2}\right),$$

$$t_{i,i+j}=\cos\alpha_i\cos\alpha_{i+j}/\sin^2\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2},\quad \alpha_{mn+i}=\alpha_i.$$

于是

$$s_{mn+i,mn+j}=s_{i,j},\quad t_{mn+i,mn+j}=t_{i,j}.$$

定理 11.2.3 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{mn}(m,n\geqslant 2)$ 是双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 的外切多边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与双曲线的切点为 $P_k(a\sec\alpha_k,b\tan\alpha_k)(k=1,2,\cdots,mn)$, P 是双曲线所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}s_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}=(-1)^n t_{n+i_0-1,n+i_0+j-1}D_{PP_{n+i_0-1}P_{n+i_0+j-1}}-t_{i_0+mn-1,i_0+j-1}D_{PP_{i_0+mn-1}P_{i_0+j-1}},\quad(11.2.4)$$

其中 $1\leqslant i_0\leqslant mn$, $j=2,3\ \cdots,mn-1$.

证明 由式 (11.1.2) 得

$$s_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}=t_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}}+t_{i+mn-1,i+j-1}D_{PP_{i+mn-1}P_{i+j-1}}$$
$$(i=1,2,\cdots,mn;j=2,3,\cdots,n),$$

仿定理 11.2.1 证明即得式 (11.2.4).

定理 11.2.4 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n}(n\geqslant 2)$ 是双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 外切 $2n$ 边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与双曲线的切点为 $P_k(a\sec\alpha_k,b\tan\alpha_k)(k=1,2,\cdots,2n)$, P 是双曲线所在平面上任意一点, 则

(1) 当 n 为奇数时,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i s_{i,i+n}D_{PQ_iQ_{i+n}}=0,\quad(11.2.5)$$

(2) 当 n 为偶数时,

$$\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}s_{i,i+n}D_{PQ_iQ_{i+n}}=2t_{n+i_0-1,2n+i_0-1}D_{PP_{n+i_0-1}P_{2n+i_0-1}},\quad(11.2.6)$$

其中 $1\leqslant i_0\leqslant 2n$, $j=2,3\ \cdots,2n-1$.

证明 利用式 (11.2.4), 仿定理 11.2.2 证明即得式 (11.2.5) 和式 (11.2.6).

11.2.3 抛物线外切 $mn(m,n \geqslant 2)$ 边形中有向面积的定值定理

记 $w_{i,j} = 1/(t_i - t_j), t_{mn+i} = t_i$. 于是, $w_{mn+i,mn+j} = w_{i,j}$. 我们有以下的定理.

定理 11.2.5 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{mn}(m,n \geqslant 2)$ 是抛物线 $x^2 = 2py$ 的外切 $2n$ 边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与抛物线的切点为 $P_k(2pt_k, 2pt_k^2)(k = 1,2,\cdots,mn)$, P 是抛物线所在平面上任意一点, 则

$$\begin{aligned}&2\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}w_{i,i+j}w_{i+mn-1,i+j-1}D_{PQ_iQ_{i+j}}\\=&(-1)^n w_{n+i_0-1,n+i_0+j-1}^2 D_{PP_{n+i_0-1}P_{n+i_0+j-1}}\\&-w_{i_0+mn-1,i_0+j-1}^2 D_{PP_{i_0+mn-1}P_{i_0+j-1}},\end{aligned}\tag{11.2.7}$$

其中 $1 \leqslant i_0 \leqslant mn,\ j = 2,3,\cdots,mn-1$

证明 由式 (11.1.11) 得

$$\begin{aligned}&2w_{i,i+j}w_{i+mn-1,i+j-1}D_{PQ_iQ_{i+j}}\\=&w_{i,i+j}^2D_{PP_iP_{i+j}}+w_{i+mn-1,i+j-1}^2D_{PP_{i+mn-1}P_{i+j-1}}(i=1,2,\cdots,mn;j=2,3,\cdots,n),\end{aligned}$$

仿定理 11.2.1 证明即得式 (11.2.7).

定理 11.2.6 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n}(n \geqslant 2)$ 是抛物线 $x^2 = 2py$ 的外切 $2n$ 边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与抛物线的切点为 $P_k(2pt_k, 2pt_k^2)(k = 1,2,\cdots,2n)$, P 是抛物线所在平面上任意一点, 则

(1) 当 n 为奇数时,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i w_{i,i+n}w_{i+2n-1,i+n-1}D_{PQ_iQ_{i+n}} = 0;\tag{11.2.8}$$

(2) 当 n 为偶数时,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i w_{i,i+n}w_{i+2n-1,i+n-1}D_{PQ_iQ_{i+n}}\\=&w_{n+i_0-1,2n+i_0-1}^2D_{PP_{n+i_0-1}P_{2n+i_0-1}},\end{aligned}\tag{11.2.9}$$

其中 $1 \leqslant i_0 \leqslant 2n,\ j = 2,3,\cdots,2n-1$.

证明 利用式 (11.2.7), 仿定理 11.2.2 证明即得式 (11.2.8) 和 (11.2.9).

根据定理 11.2.2、定理 11.2.4 和定理 11.2.6, 我们知道各类二次曲线外切 $2n$ 边中的定值定理对 n 是奇、偶有别的. 当 $n = 3$ 时, 很容易推出 Brianchon 定理; 而当 $n = 2$ 时, 很容易推出 Brianchon 定理在二次曲线外切四边形中的情形. 因此, 从这

个意义上来说, Brianchon 定理和 Brianchon 定理在二次曲线外切四边形中的情形还是有所不同的. 而由定理 11.2.1、定理 11.2.3 和定理 11.2.5 可以看出, 各类二次曲线外切 mn 边中的定值定理对任意 n 都是统一的, 因此, 这样看来 Brianchon 定理和 Brianchon 定理在二次曲线外切四边形中的情形是完全一致的.

11.3 二次曲线外切 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形中有向面积的定值定理

在 11.2 节中, 我们通过构造各类二次曲线外切 $mn(m,n\geqslant 2)$ 中有向面积的定值模型, 使 Brianchon 定理及其在二次曲线外切四边形中的情形得到推广和统一. 但当二次曲线外切六边形退化为二次曲线外切三边形和外切五边形时, 也可以得到 Brianchon 定理在二次曲线外切三边形和外切五边形中的情形.

本节主要探讨各类二次曲线外切五边形和一般的 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形中对角线三角形和切顶线三角形之间的关系, 分别得到椭圆类二次曲线、双曲类二次曲线和抛物类二次曲线外切五边形和一般的 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形有关这两类三角形有向面积的定值定理, 这些定理使 Brianchon 定理在各类二次曲线外切 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形中得到推广, 从另一个角度进一步揭示了 Brianchon 定理的背景.

11.3.1 切顶线三角形的概念

定义 11.3.1 设 $Q_1Q_2\cdots Q_n(n\geqslant 4)$ 是二次曲线外切 n 边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与二次曲线的切点为 P_i, 则称以 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 的一个顶点 Q_i 与一个切点 $P_{i+l}(i,l=1,2,\cdots,n)$ 之间的连线 $Q_iP_{i+l}(i,l=1,2,\cdots,n;\ P_{n+i}=P_i,Q_{n+i}=Q_i)$ 为一边的三角形为 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 的切顶线三角形.

特别, 当 $n=3$ 时, 二次曲线外切三边形的切顶线就是所谓的塞瓦线, 切顶线三角形就是所谓的塞瓦线三角形.

为方便起见, 我们把包含一条切线的任一线段看成是切顶点线三角形的特殊情形.

11.3.2 椭圆外切 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形中有向面积的定值定理

定理 11.3.1 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n+1}$ 是椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的外切 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与椭圆的切点为 $P_i(a\cos\alpha_i,b\sin\alpha_i)(i=1,2,\cdots,2n+1)$, P 是椭圆所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{2n+1} p_{i,i+n+1}D_{PP_iQ_{i+n+1}}=0, \tag{11.3.1}$$

其中

$$
\begin{aligned}
p_{i,i+n+1} &= \cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}+1\\
&= \cos\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+n}}{2}\Bigg|\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2},\\
\alpha_{i+2n+1} &= \alpha_i,
\end{aligned}
$$

其余类同.

证明 (如图 11.3.1) 设椭圆所在平面任意一点的坐标可以表示成 $P(ar\cos\alpha, br\sin\alpha)(r\geqslant 0)$. 由切线 $Q_{i+2n}Q_i$ 的方程

$$b\cos\alpha_{i+2n}\cdot x+a\sin\alpha_{i+2n}\cdot y=ab$$

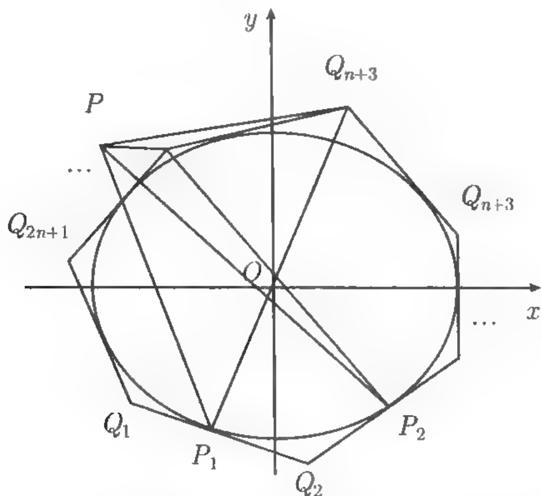


图 11.3.1 椭圆外切 $2n+1$ 边形中的切顶线三角形

和 Q_iQ_{i+1} 的方程

$$b\cos\alpha_i\cdot x+a\sin\alpha_i\cdot y=ab$$

求得 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n+1}$ 顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{a\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2n}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2n}}{2}},\frac{b\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2n}}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2n}}{2}}\right)(i=1,2,\cdots,2n+1).$$

根据三角形有向面积公式得

$$
\begin{aligned}
&2\cos\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+n}}{2}D_{PP_iQ_{i+n+1}}\\
=&abr\left(\cos\alpha\sin\alpha_i-\sin\alpha\cos\alpha_i\right)\cos\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+n}}{2}\\
&+ab\left(\cos\alpha_i\sin\frac{\alpha_{i+n+1}+\alpha_{i+n}}{2}-\sin\alpha_i\cos\frac{\alpha_{i+n+1}+\alpha_{i+n}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+abr\left(\cos\frac{\alpha_{i+n+1}+\alpha_{i+n}}{2}\sin\alpha-\sin\frac{\alpha_{i+n+1}+\alpha_{i+n}}{2}\cos\alpha\right)\\
=&abr\left[\sin(\alpha_i-\alpha)\cos\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+n}}{2}-\sin\frac{\alpha_{i+n+1}+\alpha_{i+n}-2\alpha}{2}\right]\\
&+ab\sin\frac{\alpha_{i+n+1}+\alpha_{i+n}-2\alpha_i}{2}\\
=&\frac{1}{2}abr\left(\sin\frac{2\alpha_i+\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+n}-2\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha_{i+n+1}+\alpha_{i+n}-2\alpha}{2}\right)\\
&+\frac{1}{2}abr\left(\sin\frac{2\alpha_i+\alpha_{i+n}-\alpha_{i+n+1}-2\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha_{i+n+1}+\alpha_{i+n}-2\alpha}{2}\right)\\
&+ab\sin\frac{\alpha_{i+n+1}+\alpha_{i+n}-2\alpha_i}{2}\\
=&abr\left(\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n+1}-2\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}+\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n}-2\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}\right)\\
&+ab\left(\sin\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_i}{2}\cos\frac{\alpha_{i+n}-\alpha_i}{2}+\cos\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_i}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n}-\alpha_i}{2}\right),
\end{aligned}
$$

不妨设 $0\leqslant\alpha_i<\alpha_{i+j}<2\pi$, 则 $0<\dfrac{\alpha_{i+j}-\alpha_i}{2}<\pi$, $\sin\dfrac{\alpha_{i+j}-\alpha_i}{2}\neq 0(j=n,n+1)$.

于是

$$
\begin{aligned}
&p_{i,i+n+1}D_{PP_iQ_{i+n+1}}\\
=&-\frac{1}{2}ab\left(\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}+\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}\right)\\
&+\frac{1}{2}abr\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n+1}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}}\right).
\end{aligned}
\tag{11.3.2}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2n+1}\left(\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}+\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}\right)\\
=&\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}+\sum_{i=n+1}^{2n+1}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}\\
&+\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}+\sum_{i=1}^{2n+1}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}\\
=&\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}+\sum_{i=0}^{n-1}\cot\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+1}}{2}+\cot\frac{\alpha_{2n+1}-\alpha_{n+1}}{2}\\
&+\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_i}{2}+\cot\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_{2n+1}}{2}\\
=&0.
\end{aligned}
$$

类似地

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n+1}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}}\right)=0,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2n+1}p_{i,i+n+1}D_{PP_iQ_{i+n+1}}=0.$$

推论 11.3.1 设 $Q_1Q_2Q_3$ 是椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的外切三角形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与椭圆的切点为 $P_i(a\cos\alpha_i,b\sin\alpha_i)(i=1,2,3)$, P 是椭圆所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{3}\sin(\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1})D_{PP_iQ_{i+2}}=0. \tag{11.3.3}$$

证明 在式 (11.3.1) 中令 $n=1$ 并化简即得式 (11.3.3).

注 11.3.1 尽管式 (11.3.3) 能从式 (11.3.1) 推出, 但式 (11.3.3) 并不能直接推广到任意的椭圆外切 $2n+1$ 边形中去.

推论 11.3.2 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n+1}$ 是椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的外切 $2n+1$ 边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与椭圆的切点为 $P_i(a\cos\alpha_i,b\sin\alpha_i)$ 且 $\alpha_{i+1}-\alpha_i=2\pi/(2n+1)(i=1,2,\cdots,2n+1)$, P 是椭圆所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{2n+1}D_{PP_iQ_{i+n+1}}=0. \tag{11.3.4}$$

证明 将 $\alpha_{i+n}-\alpha_i=2n\pi/(2n+1)$ 及 $\alpha_{i+n+1}-\alpha_i=2(n+1)\pi/(2n+1)$ 代入式 (11.3.1) 并化简, 即得式 (11.3.4).

推论 11.3.3 设 $Q_1Q_2Q_3$ 是椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的外切三角形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与椭圆的切点为 $P_i(a\cos\alpha_i,b\sin\alpha_i)$ 且 $\alpha_{i+1}-\alpha_i=2\pi/3(i=1,2,3)$, P 是椭圆所在平面上任意一点, 则在 $Q_1Q_2Q_3$ 的三个切顶线三角形 PP_1Q_3, PP_2Q_1, PP_3Q_2 中, 其中一个的面积等于另外两个面积的和.

特别, 当 P 在某切顶线上时, 则另外两个切顶线三角形的面积相等.

证明 将 $n=1$ 代入式 (11.3.4) 得

$$D_{PP_1Q_3}+D_{PP_2Q_1}+D_{PP_3Q_2}=0,$$

因此推论 11.3.3 结论成立.

特别地, 若 P 在某切顶线 (例如在切顶线 P_1Q_3 上) 时, 有 $D_{PP_2Q_1}+D_{PP_3Q_2}=0$, 于是 $S_{PP_2Q_1}=S_{PP_3Q_2}$.

定理 11.3.2 设 $Q_1Q_2\cdots Q_5$ 是椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的外切五边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与椭圆的切点为 $P_i(a\cos\alpha_i, b\sin\alpha_i)(i=1,2,\cdots,5)$, P 是椭圆所在平面上任意一点, 则

$$2p_{i,i+3}D_{PP_iQ_{i+3}}=u_{i,i+2}D_{PQ_iQ_{i+2}}+u_{i+1,i+4}D_{PQ_{i+1}Q_{i+4}}(i=1,2,\cdots,5), \quad (11.3.5)$$

其中 $u_{i,i+j}=2\cos\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+4}}{2}\cos\dfrac{\alpha_{i+j}-\alpha_{i+j-1}}{2}\Big/\left(\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}\sin\dfrac{\alpha_{i+4}-\alpha_{i+j-1}}{2}\right)$, $\alpha_{i+5}=\alpha_i, Q_{i+5}=Q_i$.

证明 由式 (11.3.2), 并令 $n=2$ 可得

$$\begin{aligned}2p_{i,i+3}D_{PP_iQ_{i+3}}=&-ab\left(\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+3}}{2}+\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}\right)\\&+abr\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+3}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+3}}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}\right),\end{aligned} \quad (11.3.6)$$

又在式 (11.1.3) 中令 $n=5$, $j=2$ 得

$$\begin{aligned}u_{i,i+2}D_{PQ_iQ_{i+2}}=&-ab\left(\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}+\cot\frac{\alpha_{i+4}-\alpha_{i+1}}{2}\right)\\&+abr\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+4}+\alpha_{i+1}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_{i+4}-\alpha_{i+1}}{2}}\right).\end{aligned} \quad (11.3.7)$$

同理在式 (11.1.3) 中令 $n=5$, $j=3$, 并用 $i+1$ 代 i 得

$$\begin{aligned}u_{i+1,i+4}D_{PQ_{i+1}Q_{i+4}}=&-ab\left(\cot\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+4}}{2}+\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+3}}{2}\right)\\&+abr\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+4}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+4}}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+3}-2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+3}}{2}}\right),\end{aligned} \quad (11.3.8)$$

由式 (11.3.6)、式 (11.3.7) 和式 (11.3.8) 即知式 (11.3.5) 成立.

11.3.3 双曲线外切 $2n+1(n \geqslant 1)$ 边形中有向面积的定值定理

定理 11.3.3 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n+1}$ 是双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 的外切 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与双曲线的切点为 $P_i(a\sec\alpha_i, b\tan\alpha_i)(i=1,2,\cdots,2n+1)$, P 是双曲线所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{2n+1} q_{i,i+n+1}D_{PP_iQ_{i+n+1}}=0, \quad (11.3.9)$$

其中 $q_{i,i+n+1}=\cos\alpha_i\cos\dfrac{\alpha_{i+n}+\alpha_{i+n+1}}{2}\bigg/\left(\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}\right)$, $\alpha_{i+2n+1}=\alpha_i, Q_{i+2n+1}=Q_i$, 其余类同.

证明 不妨设双曲线所在平面任意一点的坐标为 $P(ar\cos\alpha, br\sin\alpha)$. 由切线 $Q_{i+2n}Q_i$ 的方程

$$bx-a\sin\alpha_{i+2n}\cdot y=ab\cos\alpha_{i+2n}$$

和 Q_iQ_{i+1} 的方程

$$bx-a\sin\alpha_i\cdot y=ab\cos\alpha_i,$$

求得 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n+1}$ 顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{a\cos\dfrac{\alpha_{i+2n}-\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+2n}+\alpha_i}{2}},\frac{b\sin\dfrac{\alpha_{i+2n}+\alpha_i}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_{i+2n}+\alpha_i}{2}}\right)\ (i=1,2,\cdots,2n+1).$$

根据三角形有向面积公式得

$$\begin{aligned}
&2\cos\alpha_i\cos\frac{\alpha_{i+n}+\alpha_{i+n+1}}{2}D_{PP_iQ_{i+n+1}}\\
=&abr\,(\cos\alpha\sin\alpha_i-\sin\alpha)\cos\frac{\alpha_{i+n}+\alpha_{i+n+1}}{2}\\
&+ab(\sin\frac{\alpha_{i+n}+\alpha_{i+n+1}}{2}-\sin\alpha_i\cos\frac{\alpha_{i+n}-\alpha_{i+n+1}}{2})\\
&+abr\left(\cos\frac{\alpha_{i+n}-\alpha_{i+n+1}}{2}\sin\alpha-\sin\frac{\alpha_{i+n}+\alpha_{i+n+1}}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha_i\\
=&abr\cos\alpha\left(\sin\alpha_i\cos\frac{\alpha_{i+n}+\alpha_{i+n+1}}{2}-\cos\alpha_i\sin\frac{\alpha_{i+n}+\alpha_{i+n+1}}{2}\right)\\
&+abr\sin\alpha\left(\cos\alpha_i\cos\frac{\alpha_{i+n}-\alpha_{i+n+1}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+n}+\alpha_{i+n+1}}{2}\right)\\
&+ab\left(\sin\frac{\alpha_{i+n}+\alpha_{i+n+1}}{2}-\cos\frac{\alpha_{i+n}-\alpha_{i+n+1}}{2}\sin\alpha_i\right)\\
=&abr\cos\alpha\sin\frac{2\alpha_i-\alpha_{i+n}-\alpha_{i+n+1}}{2}+\frac{1}{2}abr\sin\alpha\left(\cos\frac{2\alpha_i+\alpha_{i+n}-\alpha_{i+n+1}}{2}\right.\\
&\left.+\cos\frac{2\alpha_i+\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+n}}{2}-2\cos\frac{\alpha_{i+n}+\alpha_{i+n+1}}{2}\right)\\
&+\frac{1}{2}ab\left(2\sin\frac{\alpha_{i+n}+\alpha_{i+n+1}}{2}-\sin\frac{2\alpha_i+\alpha_{i+n}-\alpha_{i+n+1}}{2}\right.\\
&\left.-\sin\frac{2\alpha_i+\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+n}}{2}\right)\\
=&abr\cos\alpha\left(\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}+\cos\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$- abr\sin\alpha\left(\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n}}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}+\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}\sin\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n+1}}{2}\right)$$
$$+ab\left(\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_i}{2}+\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i+n+1}}{2}\sin\frac{\alpha_{i+n}-\alpha_i}{2}\right),$$

由于 $\alpha_i, \alpha_{i+n}, \alpha_{i+n+1}$ 均在一、四或二、三象限且互不相等, 故上式两边同除以

$$2\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}(\neq 0),$$

得

$$\begin{aligned}
&q_{i,i+n+1}D_{PP_iQ_{i+n+1}}\\
=&-\frac{1}{2}abr\sin\alpha\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}}+\frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n+1}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}}\right)\\
&-\frac{1}{2}ab\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n+1}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}}\right)\\
&+\frac{1}{2}abr\cos\alpha\left(\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}+\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}\right).
\end{aligned}\tag{11.3.10}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2n+1}\left(\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}+\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}\right)\\
=&\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}\\
&+\sum_{i=n+1}^{2n+1}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}+\sum_{i=n+1}^{2n+1}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}\\
=&\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}\\
&+\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_i}{2}+\cot\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_{2n+1}}{2}\\
&+\sum_{i=0}^{n-1}\cot\frac{\alpha_{i+n+1}-\alpha_{i+1}}{2}+\cot\frac{\alpha_{2n+1}-\alpha_{n+1}}{2}=0.
\end{aligned}$$

同理

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}}+\frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n+1}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}}\right)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+n+1}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+n+1}}{2}}\right)=0,$$

从而式 (11.3.9) 成立.

推论 11.3.4 设 $Q_1Q_2Q_3$ 是双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 的外切三角形边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与双曲线的切点为 $P_i(a\sec\alpha_i,b\tan\alpha_i)(i=1,2,3)$, P 是双曲线所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i(\sin\alpha_{i+1}-\sin\alpha_{i+2})D_{PP_iQ_{i+2}}=0. \tag{11.3.11}$$

证明 在式 (11.3.9) 中令 $n=1$ 并化简, 即得式 (11.3.11).

定理 11.3.4 设 $Q_1Q_2\cdots Q_5$ 是双曲线 $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 的外切五边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与双曲线的切点为 $P_i(a\sec\alpha_i,b\tan\alpha_i)(i=1,2,\cdots,5)$, P 是双曲线所在平面上任意一点, 则

$$2q_{i,i+3}D_{PP_iQ_{i+3}}=s_{i,i+2}D_{PQ_iQ_{i+2}}+s_{i+1,i+4}D_{PQ_{i+1}Q_{i+4}}(i=1,2,\cdots,5), \tag{11.3.12}$$

其中 $s_{i,i+j}=\cos\dfrac{\alpha_{i+4}+\alpha_i}{2}\cos\dfrac{\alpha_{i+j-1}+\alpha_{i+j}}{2}\Big/\left(\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}\sin\dfrac{\alpha_{i+4}-\alpha_{i+j-1}}{2}\right)$, $\alpha_{i+5}=\alpha_i$, $Q_{i+5}=Q_i$.

证明 由式 (11.3.10), 并令 $n=2$ 可得

$$\begin{aligned}&2q_{i,i+3}D_{PP_iQ_{i+3}}\\&=-abr\sin\alpha\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}+\frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+3}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+3}}{2}}\right)\\&\quad-ab\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+3}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+3}}{2}}\right)\\&\quad+abr\cos\alpha\left(\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}+\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+3}}{2}\right).\end{aligned}$$

又在式 (11.1.8) 中令 $n=5,j=2$ 得

$$\begin{aligned}&s_{i,i+2}D_{PQ_iQ_{i+2}}\\&=-abr\sin\alpha\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}+\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+4}+\alpha_{i+1}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_{i+4}-\alpha_{i+1}}{2}}\right)\end{aligned}$$

$$- ab\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+2}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+4}+\alpha_{i+1}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_{i+4}-\alpha_{i+1}}{2}}\right)$$

$$+ abr\cos\alpha\left(\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+2}}{2}+\cot\frac{\alpha_{i+4}-\alpha_{i+1}}{2}\right),$$

同理在式 (11.1.8) 中令 $n=5,\ j=3$, 并用 $i+1$ 代 i 得

$$\begin{aligned}
&s_{i+1,i+4}D_{PQ_{i+1}Q_{i+4}}\\
=&-abr\sin\alpha\left(\frac{\sin\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+3}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+3}}{2}}+\frac{\sin\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+4}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+4}}{2}}\right)\\
&-ab\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+3}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_i-\alpha_{i+3}}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+4}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+4}}{2}}\right)\\
&+abr\cos\alpha\left(\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+3}}{2}+\cot\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_{i+4}}{2}\right).
\end{aligned}$$

从而式 (11.3.12) 成立.

11.3.4 抛物线外切 $2n+1(n \geqslant 1)$ 边形中有向面积的定值定理

定理 11.3.5 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n+1}$ 是抛物线 $x^2=2py$ 的外切 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与抛物线的切点为 $P_k(2pt_k, 2pt_k^2)(k=1,2,\cdots,2n+1)$, P 是抛物线所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{2n+1} w_{i,i+n+1}w_{i,i+n}D_{PP_iQ_{i+n+1}}=0, \tag{11.3.13}$$

其中 $w_{i,i+n+1}=1/(t_i-t_{i+n+1}), t_{i+2n+1}=t_i$.

证明 不妨设抛物线所在平面上任意一点的坐标为 $P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$. 由题设切线 $Q_{i+2n}Q_i$ 的方程为

$$2pt_{i+2n}x=2p\cdot\frac{y+2pt_{i+2n}^2}{2},$$

即

$$y-2t_{i+2n}x=-2pt_{k+2n}^2, \tag{11.3.14}$$

同理可得切线 Q_iQ_{i+1} 的方程

$$y-2t_ix=-2pt_i^2. \tag{11.3.15}$$

式 (11.3.14) 和式 (11.3.15) 联立, 求得 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n+1}$ 顶点的坐标

$$Q_i(p(t_i+t_{i+2n}),2pt_it_{i+2n})(i=1,2,\cdots,2n+1).$$

根据三角形有向面积公式得

$$\begin{aligned}2D_{PP_iQ_{i+n+1}}=&2pr(t_i^2\cos\alpha-t_i\sin\alpha)+2p^2[2t_it_{i+n}t_{i+n+1}-t_i^2(t_{i+n}+t_{i+n+1})]\\&+pr[(t_{i+n}+t_{i+n+1})\sin\alpha-2t_{i+n}t_{i+n+1}\cos\alpha]\\=&2pr\cos\alpha[t_i(t_i-t_{i+n})+t_{i+n}(t_i-t_{i+n+1})]\\&-pr\sin\alpha[(t_i-t_{i+n+1})+(t_i-t_{i+n})]\\&-2p^2[t_it_{i+n}(t_i-t_{i+n+1})+t_it_{i+n+1}(t_i-t_{i+n})].\end{aligned}$$

上式两边同除以 $(t_i-t_{i+n})(t_i-t_{i+n+1})(\neq 0)$, 得

$$\begin{aligned}&2w_{i,i+n+1}w_{i,i+n}D_{PP_iQ_{i+n+1}}\\=&2pr\cos\alpha(w_{i,i+n}t_{i+n}+w_{i,i+n+1}t_i)-pr\sin\alpha(w_{i,i+n}+w_{i,i+n+1})\\&-2p^2(w_{i,i+n}t_it_{i+n}+w_{i,i+n+1}t_it_{i+n+1}).\end{aligned}\tag{11.3.16}$$

因为

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2n+1}(w_{i,i+n}t_{i+n}+w_{i,i+n+1}t_i)\\=&\sum_{i=1}^{n}(w_{i,i+n}t_{i+n}+w_{i,i+n+1}t_i)+\sum_{i=n+1}^{2n+1}(w_{i,i+n}t_{i+n}+w_{i,i+n+1}t_i)\\=&\sum_{i=1}^{n}w_{i,i+n}t_{i+n}+\sum_{i=1}^{n}w_{i,i+n+1}t_i+\sum_{i=1}^{n}w_{i+n+1,i}t_i+u_{n+1,2n+1}t_{2n+1}\\&+\sum_{i=1}^{n}w_{i+n,i}t_{i+n}+w_{2n+1,n+1}t_{2n+1}\\=&0,\end{aligned}$$

同理

$$\sum_{i=1}^{2n+1}(w_{i,i+n}+w_{i,i+n+1})=0,\quad \sum_{i=1}^{2n+1}(w_{i,i+n}t_it_{i+n}+w_{i,i+n+1}t_it_{i+n+1})=0.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2n+1}w_{i,i+n+1}w_{i,i+n}D_{PP_iQ_{i+n+1}}=0.$$

推论 11.3.5 设 $Q_1Q_2Q_3$ 是抛物线 $x^2=2py$ 的外切三角形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与抛物线的切点为 $P_k(2pt_k,2pt_k^2)(k=1,2,3)$, P 是抛物线所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{3}(t_{i+2}-t_{i+1})D_{PP_iQ_{i+2}}=0. \tag{11.3.17}$$

证明 在式 (11.3.13) 中令 $n=1$ 并化简, 即得式 (11.3.17).

定理 11.3.6 设 $Q_1Q_2\cdots Q_5$ 是抛物线 $x^2=2py$ 的外切五边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与抛物线的切点为 $P_k(2pt_k,2pt_k^2)(k=1,2,\cdots,5)$, P 是抛物线所在平面上任意一点, 则

$$\begin{aligned}w_{i,i+3}w_{i,i+2}D_{PP_iQ_{i+3}}=&w_{i,i+2}w_{i+4,i+1}D_{PQ_iQ_{i+2}}\\&+w_{i+1,i+4}w_{i,i+3}D_{PQ_{i+1}Q_{i+4}}\ (i=1,2,\cdots,5),\end{aligned} \tag{11.3.18}$$

其中 $w_{i,j}=1/(t_i-t_j), t_{5+i}=t_i$.

证明 不妨设抛物线所在平面任意一点的坐标可以表示成 $P(r\cos\alpha,r\sin\alpha)$. 在式 (11.3.11) 中令 $n=2$ 可得

$$\begin{aligned}2w_{i,i+2}w_{i,i+3}D_{PP_iQ_{i+3}}=&2pr\cos\alpha(w_{i,i+2}t_{i+2}+w_{i,i+3}t_i)-pr\sin\alpha(w_{i,i+2}+w_{i,i+3})\\&-2p^2(w_{i,i+2}t_it_{i+2}+w_{i,i+3}t_it_{i+3}),\end{aligned} \tag{11.3.19}$$

又在式 (11.3.15) 中令 $n=5, j=2$ 可得

$$\begin{aligned}2w_{i,i+2}w_{i+4,i+1}D_{PQ_iQ_{i+2}}=&2pr\cos\alpha(w_{i+4,i+1}t_{i+1}+w_{i,i+2}t_i)\\&-pr\sin\alpha(w_{i,i+2}+w_{i+4,i+1})\\&-2p^2(w_{i,i+2}t_it_{i+2}+w_{i+4,i+1}t_{i+1}t_{i+4}).\end{aligned} \tag{11.3.20}$$

又在式 (11.3.15) 中令 $n=5, j=3$ 并用 $i+1$ 代 i 分别可得

$$\begin{aligned}2w_{i+1,i+4}w_{i,i+3}D_{PQ_{i+1}Q_{i+4}}=&2pr\cos\alpha(w_{i+1,i+4}t_{i+1}+w_{i,i+3}t_{i+3})\\&-pr\sin\alpha(w_{i+1,i+4}+w_{i,i+3})\\&-2p^2(w_{i+1,i+4}t_{i+1}t_{i+4}+w_{i,i+3}t_it_{i+3}),\end{aligned} \tag{11.3.21}$$

由式 (11.3.19)~(11.3.21), 即知式 (11.3.18) 成立.

根据定理 11.3.1、定理 11.3.3 和定理 11.3.5, 很容易推出 Brianchon 定理在二次曲线外切三边形中的情形, 而根据定理 11.3.2、定理 11.3.4 和定理 11.3.6, 很容易推出 Brianchon 定理在二次曲线外切五边形中的情形. 其具体证明, 我们将在 12.3 节中用圆锥曲线外切 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形中有向面积的定值定理统一处理.

第12章　圆锥曲线外切多边形中有向面积的定值定理及应用

12.1　圆锥曲线外切 $n(n \geqslant 4)$ 边形中有向面积的定值定理及应用

在 11.1 节中, 我们得出了各类二次曲线曲线外切 $n(n \geqslant 4)$ 边形中有向面积的定值定理, 但由于各类二次曲线在圆锥曲线下可以得到统一, 因此我们毕竟要问, 这些定值定理是否也可以在圆锥曲线下统一起来? 本节主要利用圆锥曲线的极坐标方程和有向面积定值法, 探讨圆锥曲线外切多边形的对角线三角形和切点线三角形有向面积之间的关系, 得出相应的定值定理, 从而使各类二次曲线曲线外切 $n(n \geqslant 4)$ 边形中有向面积的定值定理得到统一.

首先介绍圆锥曲线有关的知识; 其次得出圆锥曲线外切 $n(n \geqslant 4)$ 边形中有关这两类三角形有向面积的定值定理, 最后根据定值定理得出圆锥曲线外切多边形中的共点线定理、共线点定理、等积定理等结论, 其中仅定理 12.3.2 就包括圆锥曲线外切 $n(n \geqslant 4)$ 边形中多达 $n(n-3)$ 个三线共点的点. 这些定值定理也可以看成是 Brianchon 定理和 Brianchon 定理在圆锥曲线外切四角形中的情形在有向面积下的推广, 可见定值定理的涵盖面十分广泛.

12.1.1　圆锥曲线的基本知识

圆锥曲线是椭圆、双曲线和抛物线的统称, 因为椭圆、双曲线和抛物线都可以作为圆锥面与平面相截所得出的曲线.

用不通过锥面顶点的平面去截圆锥面, 研究它们的交线. 可以证明, 若平面仅和锥面的一腔相交, 而不和母线平行, 则截线为椭圆, 如图 12.1.1 所示; 若平面仅和锥面的一腔相交且平行于圆锥的底面, 则截线为圆; 若平面仅和锥面的一腔相交且平行于锥面的一条母线, 则截线为抛物线; 若平面和锥面的两腔都相交, 则截线为双曲线, 如图 12.1.2 所示.

圆锥曲线也可以看成是到一个定点 F 与一条定直线 l 的距离之比为常数 e 的动点的轨迹 (图 12.1.3), 其中 F 称为焦点, l 称为准线, e 称为离心率.

当 $0<e<1$ 时为椭圆; $e=1$ 时为抛物线; $e>1$ 时为双曲线; 当 $e=0$, 即准线 l 为无穷远直线时为圆.

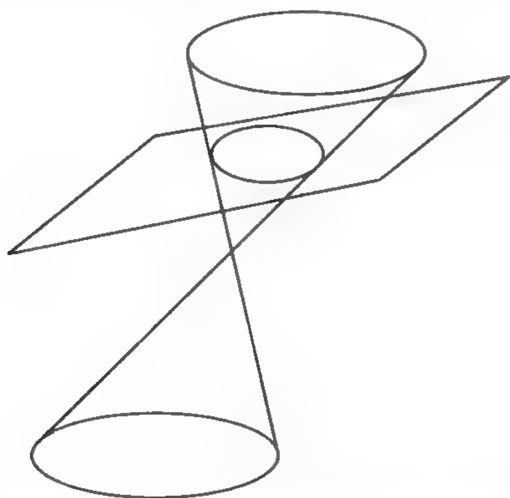


图 12.1.1 平面与一腔圆锥相截出的椭圆

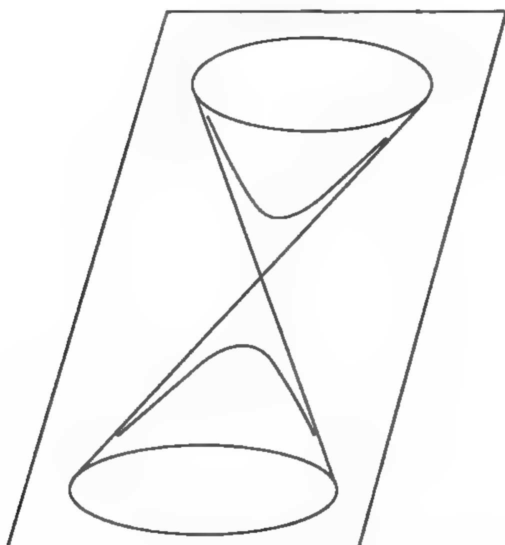


图 12.1.2 平面与两腔圆锥相截出的双曲线

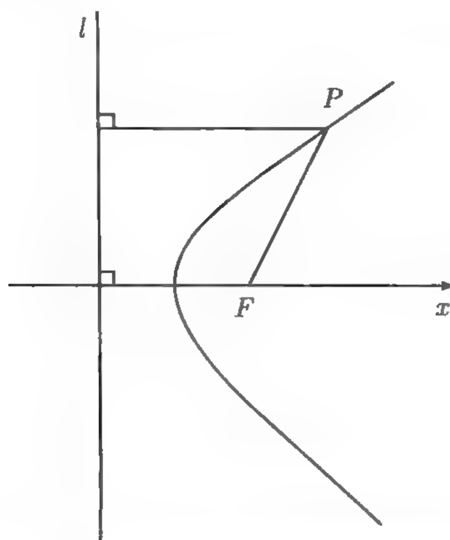


图 12.1.3 作为点的轨迹的圆锥曲线

如图 12.1.4 所示，取焦点 F 为极点 O，过 F 且垂直于 l 的直线为极轴，从 l 到 F 的方向为极轴的正向，F 到垂直于极轴的直线与 l 的交点之间的距离为 d，那么圆锥曲线的极坐标方程为

$$L: \quad \rho = \frac{a}{1 - e\cos\theta}\ (a = ed, e \geqslant 0). \tag{12.1.1}$$

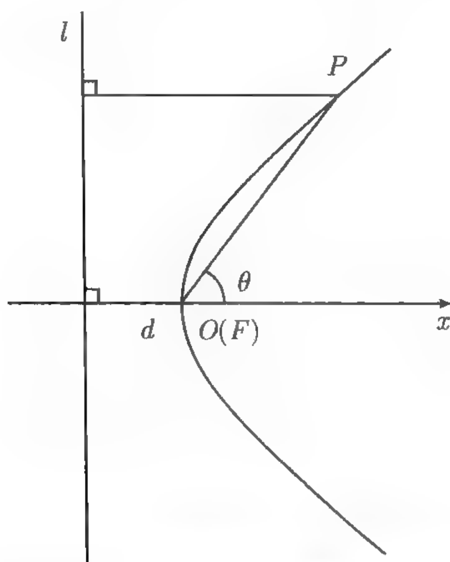


图 12.1.4　圆锥曲线的极坐标方程

12.1.2　圆锥曲线外切 n $(n \geqslant 4)$ 边形中有向面积的定值定理

记

$$a_{i,i+j} = \frac{2\left(\cos\frac{\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2} - e\cos\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+j}}{2} - e\cos\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}}{2}\right)}{\sin\frac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+n-1}}{2}\sin\frac{\theta_{i+j}-\theta_i}{2}},$$

$$b_{i,i+j} = \frac{2\left(\cos\frac{\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2} - e\cos\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+j}}{2} - e\cos\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}}{2}\right)}{\sin\frac{\theta_{i+j-1}-\theta_i}{2}\sin\frac{\theta_{i+j}-\theta_{i+n-1}}{2}},$$

$$c_{i,j} = \frac{(1-e\cos\theta_i)(1-e\cos\theta_{i+j})}{\sin^2\frac{\theta_{i+j}-\theta_i}{2}}, .\quad \theta_{n+i} = \theta_i.$$

于是

$$a_{n+i,n+j} = a_{n+i,j} = a_{i,n+j} = a_{i,j},$$

$$b_{n+i,n+j} = b_{n+i,j} = b_{i,n+j} = b_{i,j},$$

$$c_{n+i,n+j} = c_{n+i,j} = c_{i,n+j} = c_{i,j}.$$

我们有如下的结论.

定理 12.1.1 设$Q_1Q_2\cdots Q_n(n\geqslant 4)$ 是式 (12.1.1) 所表示的圆锥曲线 L 的切多边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与圆锥曲线的切点为 $P_k\left(\dfrac{a\cos\theta_k}{1-e\cos\theta_k},\dfrac{a\sin\theta_k}{1-e\cos\theta_k}\right)$ $(k=1,2,\cdots,n)$, P 是圆锥曲线所在平面上任意一点, 则

$$a_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}=c_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}}+c_{i+n-1,i+j-1}D_{PP_{i+n-1}P_{i+j-1}},\tag{12.1.2}$$

$$b_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}=c_{i,i+j-1}D_{PP_iP_{i+j-1}}+c_{i+n-1,i+j}D_{PP_{i+n-1}P_{i+j}},\tag{12.1.3}$$

其中当 n 为奇数时, $i=1,2,\cdots,n,j=2,\cdots,\dfrac{n-1}{2}$; 当 n 为偶数时, $i=1,2,\cdots,n$, $j=2,\cdots,\dfrac{n}{2}-1$ 及$i=1,2,\cdots,\dfrac{n}{2},j=\dfrac{n}{2}$. $D_{PQ_iQ_{i+j}}$ 表示三角形 PQ_iQ_{i+j}①的有向面积, 其余类同.

证明 设圆锥曲线所在平面任意一点的坐标为 $P(r\cos\theta,r\sin\theta)(r\geqslant 0)$. 因为圆锥曲线的参数方程为

$$x=\frac{a\cos\theta}{1-e\cos\theta},\quad y=\frac{a\sin\theta}{1-e\cos\theta},$$

所以

$$y'_x=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{a\sin\theta}{1-e\cos\theta}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{a\cos\theta}{1-e\cos\theta}\right)}=\frac{\dfrac{a\cos\theta(1-e\cos\theta)-a\sin\theta\cdot e\sin\theta}{(1-e\cos\theta)^2}}{\dfrac{-a\sin\theta(1-e\cos\theta)-a\cos\theta\cdot e\sin\theta}{(1-e\cos\theta)^2}}=\frac{e-\cos\theta}{\sin\theta}.$$

于是由直线 $Q_{i+n-1}Q_i$ 的斜率

$$k_{Q_{i+n-1}Q_i}=\frac{e-\cos\theta_{i+n-1}}{\sin\theta_{i+n-1}}$$

求得 $Q_{i+n-1}Q_i$ 的直线方程

$$(\cos\theta_{i+n-1}-e)x+\sin\theta_{i+n-1}\cdot y=a.\tag{12.1.4}$$

同理 Q_iQ_{i+1} 的直线方程为

$$(\cos\theta_i-e)x+\sin\theta_i\cdot y=a.\tag{12.1.5}$$

式 (12.1.4) 和式 (12.1.5) 联立, 求得 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{a\cos\dfrac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}}{\cos\dfrac{\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2}-e\cos\dfrac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}},\frac{a\sin\dfrac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}}{\cos\dfrac{\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2}-e\cos\dfrac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}}\right)(i=1,2,\cdots,n).$$

①当 $\theta=0,\pi$ 时, y'_x 不存在, 但式 (12.1.4) 和 (12.1.5) 仍成立.

根据三角形有向面积公式得

$$
\begin{aligned}
&2\left(\cos\frac{\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2}-e\cos\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+j}}{2}-e\cos\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}}{2}\right)D_{PQ_iQ_{i+j}}\\
=&ar\left(\cos\theta\sin\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}-\cos\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}\sin\theta\right)\left(\cos\frac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+j}}{2}-e\cos\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}}{2}\right)\\
&+a^2\left(\cos\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}}{2}-\sin\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}}{2}\right)\\
&+ar\left(\cos\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}}{2}\sin\theta-\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}}{2}\cos\theta\right)\left(\cos\frac{\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2}-e\cos\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}\right)\\
=&ar\left(\sin\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i-2\theta}{2}\cos\frac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+j}}{2}-\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}-2\theta}{2}\cos\frac{\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2}\right)\\
&+are\left(\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}-2\theta}{2}\cos\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i}{2}-\sin\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i-2\theta}{2}\cos\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}}{2}\right)\\
&+a^2\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}-\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2}\\
=&\frac{1}{2}ar\left(\sin\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i+\theta_{i+j-1}-\theta_{i+j}-2\theta}{2}+\sin\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i+\theta_{i+j}-\theta_{i+j-1}-2\theta}{2}\right)\\
&-\frac{1}{2}ar\left(\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}+\theta_{i+n-1}-\theta_i-2\theta}{2}+\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}+\theta_i-\theta_{i+n-1}-2\theta}{2}\right)\\
&+\frac{1}{2}are\left(\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}+\theta_{i+n-1}+\theta_i-2\theta}{2}+\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}-\theta_{i+n-1}-\theta_i-2\theta}{2}\right)\\
&-\frac{1}{2}are\left(\sin\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i+\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}-2\theta}{2}+\sin\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i-\theta_{i+j-1}-\theta_{i+j}-2\theta}{2}\right)\\
&+a^2\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}-\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2}\\
=&ar\left(\cos\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_{i+j-1}-2\theta}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+j}}{2}+\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+j}-2\theta}{2}\sin\frac{\theta_{i+n-1}-\theta_{i+j-1}}{2}\right)\\
&+are\cos\theta\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}-\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2}+a^2\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}-\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2}\\
=&ar\left(\cos\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_{i+j-1}-2\theta}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+j}}{2}+\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+j}-2\theta}{2}\sin\frac{\theta_{i+n-1}-\theta_{i+j-1}}{2}\right)\\
&+(are\cos\theta+a^2)\left(\sin\frac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+n-1}}{2}\cos\frac{\theta_{i+j}-\theta_i}{2}+\cos\frac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+n-1}}{2}\sin\frac{\theta_{i+j}-\theta_i}{2}\right),
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
a_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}=&-ar\left(\frac{\cos\dfrac{\theta_{i+j}+\theta_i-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+j}-\theta_i}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\theta_{i+n-1}+\theta_{i+j-1}-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+n-1}}{2}}\right)\\
&+(are\cos\theta+a^2)\left(\cot\frac{\theta_{i+j}-\theta_i}{2}+\cot\frac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+n-1}}{2}\right). \quad (12.1.6)
\end{aligned}
$$

又

$$2(1-e\cos\theta_i)(1-e\cos\theta_{i+j})D_{PP_iP_{i+j}}$$

$$
\begin{aligned}
&=ar\left(\cos\theta\sin\theta_i-\cos\theta_i\sin\theta\right)\left(1-e\cos\theta_{i+j}\right)+a^2\left(\cos\theta_i\sin\theta_{i+j}-\cos\theta_{i+j}\sin\theta_i\right)\\
&\quad+ar\left(\cos\theta_{i+j}\sin\theta-\sin\theta_{i+j}\cos\theta\right)\left(1-e\cos\theta_i\right)\\
&=ar[\sin(\theta_i-\theta)-\sin(\theta_{i+j}-\theta)]+a^2\sin(\theta_{i+j}-\theta_i)\\
&\quad+are[\sin(\theta_{i+j}-\theta)\cos\theta_i-\sin(\theta_i-\theta)\cos\theta_{i+j}]\\
&=2ar\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+j}-2\theta}{2}\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i+j}}{2}+a^2\sin(\theta_{i+j}-\theta_i)\\
&\quad+\frac{1}{2}are[\sin(\theta_{i+j}+\theta_i-\theta)+\sin(\theta_{i+j}-\theta_i-\theta)-\sin(\theta_i+\theta_{i+j}-\theta)\\
&\quad-\sin(\theta_i-\theta_{i+j}-\theta)]\\
&=2ar\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+j}-2\theta}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+j}}{2}+a^2\sin(\theta_{i+j}-\theta_i)+are\cos\theta\sin(\theta_{i+j}-\theta_i)\\
&=2ar\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+j}-2\theta}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+j}}{2}+2(are\cos\theta+a^2)\sin\frac{\theta_{i+j}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+j}-\theta_i}{2}
\end{aligned}
$$

于是

$$
c_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}}=-ar\frac{\cos\dfrac{\theta_i+\theta_{i+j}-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+j}-\theta_i}{2}}+(are\cos\theta+a^2)\cot\frac{\theta_{i+j}-\theta_i}{2}. \tag{12.1.7}
$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
c_{i+n-1,i+j-1}D_{PP_{i+n-1}P_{i+j-1}}=&-ar\frac{\cos\dfrac{\theta_{i+n-1}+\theta_{i+j-1}-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+n-1}}{2}}\\
&+(are\cos\theta+a^2)\cot\frac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+n-1}}{2},
\end{aligned} \tag{12.1.8}
$$

由式 (12.1.6)、式 (12.1.7) 和式 (12.1.8) 即得式 (12.1.2).

在式 (12.1.6) 的证明中, 注意到

$$
\begin{aligned}
&ar\left(\sin\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i-2\theta}{2}\cos\frac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+j}}{2}-\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}-2\theta}{2}\cos\frac{\theta_{i+n-1}-\theta_i}{2}\right)\\
=&\frac{1}{2}ar\left(\sin\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i+\theta_{i+j-1}-\theta_{i+j}-2\theta}{2}-\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}+\theta_i-\theta_{i+n-1}-2\theta}{2}\right)\\
&+\frac{1}{2}ar\left(\sin\frac{\theta_{i+n-1}+\theta_i+\theta_{i+j}-\theta_{i+j-1}-2\theta}{2}-\sin\frac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}+\theta_i-\theta_{i+n-1}-2\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

可以证明式 (12.1.3) 成立.

12.1.3 圆锥曲线外切 n $(n\geqslant 4)$ 边形中有向面积的定值定理的应用

注意到圆锥曲线都可以化为式 (12.1.1) 的形式, 由定理 12.1.1 可以得到如下的结论.

定理 12.1.2 设 $Q_1Q_2\cdots Q_n(n \geqslant 4)$ 是圆锥曲线切多边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与圆锥曲线的切点为 $P_k(k=1,2\cdots,n)$, 则

(1) Q_iQ_{i+j}, P_iP_{i+j} 和 $P_{i+n-1}P_{i+j-1}$ 所在直线相交于一点 M_{ij}(图 12.1.5);

(2) Q_iQ_{i+j}, P_iP_{i+j-1} 和 $P_{i+n-1}P_{i+j}$ 所在直线相交于一点 N_{ij} 或相互平行 (即相交于无穷远点 $N_{\infty ij}$)(图 12.1.6),

其中当 n,i,j 的取值同定理 12.1.1.

证明 设 P_iP_{i+j} 与 $P_{i+n-1}P_{i+j-1}$ 所在直线相交于一点 M_{ij}. 将 $D_{M_{ij}P_iP_{i+j}}=D_{M_{ij}P_{i+j-1}P_{i+n-1}}=0$ 及 M_{ij} 代入式 (12.1.2) 并注意到 $a_{i,i+j}\neq 0$ 得 $D_{M_{ij}Q_iQ_{i+j}}=0$, 即 M_{ij} 在直线 Q_iQ_{i+j} 上. 从而 (1) 中结论成立.

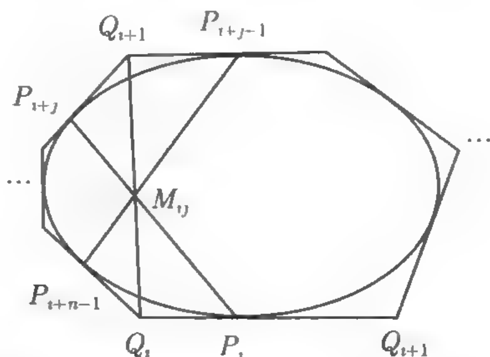


图 12.1.5 直线 $Q_iQ_{i+j}, P_iP_{i+j}, P_{i+n-1}P_{i+j-1}$ 相交于一点

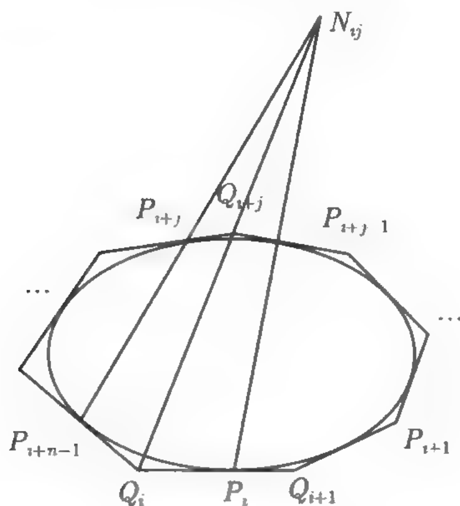


图 12.1.6 直线 $Q_iQ_{i+j}, P_iP_{i+j-1}, P_{i+n-1}P_{i+j}$ 的交点

类似地, 可以证明 (2) 中结论成立.

推论 12.1.1 圆锥曲线切四边形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 的对角线 Q_1Q_3, Q_2Q_4 所在直线分别经过它与圆锥曲线四个切点所组成的两组直线 P_1P_2 和 P_3P_4, P_2P_3 和 P_4P_1 的交点或分别与这两组直线平行.

证明 在定理 12.1.2(2) 中令 $n=4, j=2$, 并分别取 $i=1,2$ 即得.

定理 12.1.3 设 $Q_1Q_2\cdots Q_n(n \geqslant 4)$ 是圆锥曲线切 n 边形, Q_kQ_{k+1} 所在直

线与圆锥曲线的切点为 $P_k(k=1,2,\cdots,n)$, 则

$$S_{Q_iP_iP_{i+j}}\cdot S_{Q_{i+j}P_{i+n-1}P_{i+j-1}}=S_{Q_iP_{i+n-1}P_{i+j-1}}\cdot S_{Q_{i+j}P_iP_{i+j}},\tag{12.1.9}$$

$$S_{P_iQ_iQ_{i+j}}\cdot S_{P_{i+j}P_{i+n-1}P_{i+j-1}}=S_{P_{i+j}Q_iQ_{i+j}}\cdot S_{P_iP_{i+n-1}P_{i+j-1}},\tag{12.1.10}$$

$$S_{P_{i+n-1}Q_iQ_{i+j}}\cdot S_{P_{i+j-1}P_iP_{i+j}}=S_{P_{i+j-1}Q_iQ_{i+j}}\cdot S_{P_{i+n-1}P_iP_{i+j}},\tag{12.1.11}$$

$$S_{Q_iP_iP_{i+j-1}}\cdot S_{Q_{i+j}P_{i+n-1}P_{i+j}}=S_{Q_iP_{i+n-1}P_{i+j}}\cdot S_{Q_{i+j}P_iP_{i+j-1}},\tag{12.1.12}$$

$$S_{P_iQ_iQ_{i+j}}\cdot S_{P_{i+j-1}P_{i+n-1}P_{i+j}}=S_{P_{i+j-1}Q_iQ_{i+j}}\cdot S_{P_iP_{i+n-1}P_{i+j}},\tag{12.1.13}$$

$$S_{P_{i+n-1}Q_iQ_{i+j}}\cdot S_{P_{i+j}P_iP_{i+j-1}}=S_{P_{i+j}Q_iQ_{i+j}}\cdot S_{P_{i+n-1}P_iP_{i+j-1}}.\tag{12.1.14}$$

其中 n,i,j 的取值同定理 12.1.1.

证明 将 Q_i 代入式 (12.1.2) 并化简得

$$c_{i,i+j}D_{Q_iP_iP_{i+j}}=-c_{i+n-1,i+j-1}D_{Q_iP_{i+n-1}P_{i+j-1}},\tag{12.1.15}$$

同理

$$c_{i,i+j}D_{Q_{i+j}P_iP_{i+j}}=-c_{i+n-1,i+j-1}D_{Q_{i+j}P_{i+n-1}P_{i+j-1}}.\tag{12.1.16}$$

(12.1.15) 和 (12.1.16) 两式相除后等式两边取绝对值, 化简即得式 (12.1.9).

类似地, 可以证明式 (12.1.10)~ 式 (12.1.14).

定理 12.1.4 (如图 12.1.7) 设 $Q_1Q_2\cdots Q_n(n\geqslant 4)$ 是圆锥曲线切多边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与圆锥曲线的切点为 $P_k(k=1,2,\cdots,n)$, P_iP_{i+j} 和 $P_{i+n-1}P_{i+j-1}$ 所在直线相交于点 M_{ij},P_iP_{i+j-1} 和 $P_{i+n-1}P_{i+j}$ 所在直线相交于点 N_{ij}, 则 Q_i, Q_{i+j}, M_{ij}, N_{ij} 四点共线 (其中当 n,i,j 的取值同定理 12.1.1).

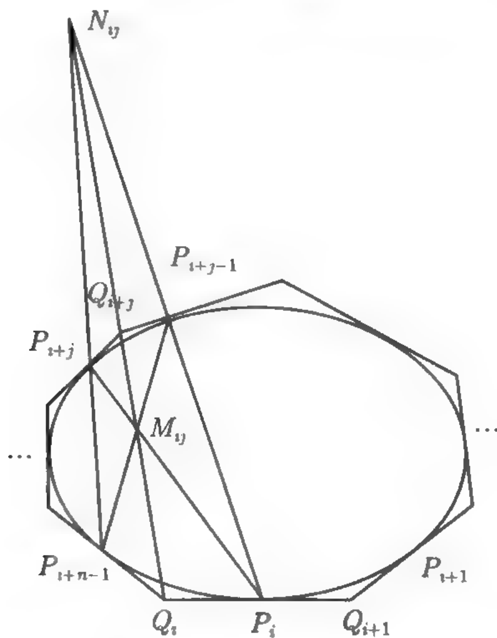


图 12.1.7 $Q_i,Q_{1+j},Q_{ij},N_{ij}$ 四点共线

证明 如图 12.1.7 所示. 由定理 12.1.2 知 Q_i, Q_{i+j}, M_{ij} 和 Q_i, Q_{i+j}, N_{ij} 均三点共线, 从而 Q_i, Q_{i+j}, M_{ij}, N_{ij} 四点共线.

定理 12.1.5(Brianchon 定理) 设 $Q_1Q_2\cdots Q_6$ 是二次曲线外切六边形, 则 $Q_1Q_2\cdots Q_6$ 的三对对顶点的连线 Q_1Q_4、Q_2Q_5 和 Q_3Q_6 所在的三条直线相交于一点.

证明 如图 12.1.8 所示. 设 Q_1Q_4 与 Q_2Q_5 所在直线的交点为 G, 在式 (12.1.2) 中令 $n=6, j=3$ 及 $D_{GQ_1Q_4}=D_{GQ_2Q_5}=0$, 并分别取 $i=1,2,3$, 得

$$c_{1,4}D_{GP_1P_4}+c_{6,3}D_{GP_6P_3}=0, \tag{12.1.17}$$

$$c_{2,5}D_{GP_2P_5}+c_{1,4}D_{GP_1P_4}=0, \tag{12.1.18}$$

$$a_{3,6}D_{GQ_3Q_6}=c_{3,6}D_{GP_3P_6}+c_{2,5}D_{GP_2P_5}. \tag{12.1.19}$$

式 (12.1.19)−(12.1.14)+(12.1.18) 并注意到 $D_{GP_6P_3}=-D_{GP_3P_6}$, $c_{3,6}=c_{6,3}$ 及 $a_{3,6}\neq 0$, 得 $D_{GQ_3Q_6}=0$, 即 G 在直线 Q_3Q_6 上, 从而 Q_1Q_4, Q_2Q_5 和 Q_3Q_6 所在的三条直线相交于一点.

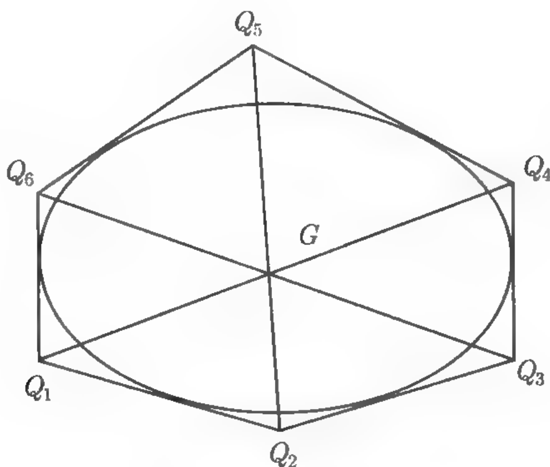


图 12.1.8 Brianchon 定理

定理 12.1.6(Brianchon 定理在圆锥曲线外切四边形的情形) 设 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 是圆锥曲线外切四边形, P_k 是它的边 $Q_kQ_{k+1}(k=1,2,3,4)$ 与二次曲线的切点, 则四边形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 的两条对角线 Q_1Q_3, Q_2Q_4 所在的两条直线和二次曲线的四个切点所组成的两条直线 P_1P_3, P_2P_4 相交于一点.

证明 如图 12.1.9 所示. 设 P_1P_3, P_2P_4 所在直线的交点为 G, 在式 (12.1.2) 中令 $n=4, j=2$ 及 $D_{GP_1P_3}=D_{GP_2P_4}=0$, 得 $a_{i,i+2}D_{GQ_iQ_{i+2}}=0(i=1,2)$. 注意到 $a_{i,i+2}\neq 0$, 故 $D_{GQ_iQ_{i+2}}=0(i=1,2)$, 即 G 在 Q_1Q_3 和 Q_2Q_4 所在直线上, 从而 Q_1Q_3, Q_2Q_4 所在的两条直线和 P_1P_3, P_2P_4 所在的两条直线相交于一点.

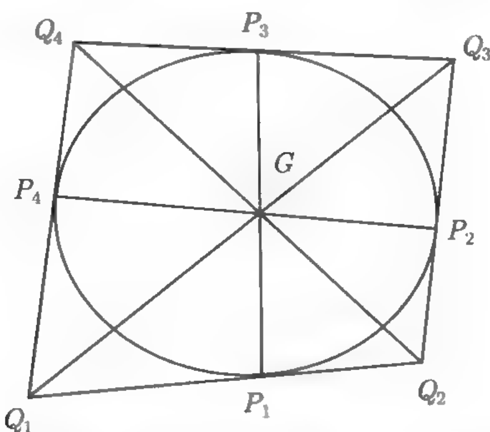


图 12.1.9　圆锥曲线外切四边形中的 Brianchon 定理

12.2　圆锥曲线外切 $mn(m,n \geqslant 2)$ 边形中有向面积的定值定理及应用

在 11.1 节中, 我们得出了各类二次曲线曲线外切 $mn(m,n \geqslant 2)$ 边形中有向面积的定值定理, 本节主要利用圆锥曲线的极坐标方程和有向面积定值法, 探讨圆锥曲线外切 $mn(m,n \geqslant 2)$ 边形中对角线三角形和切点线三角形之间的关系, 得出相应的定值定理. 从而使各类二次曲线曲线外切 $mn(m,n \geqslant 2)$ 边形中有向面积的定值定理得到统一.

首先, 得出圆锥曲线外切 $mn(m,n \geqslant 2)$ 边形中有关对角线三角形和切点线三角形有向面积的定值定理; 其次, 根据定值定理得出圆锥曲线外切 $mn(m,n \geqslant 2)$ 边形中的共点线定理、共线点定理、等积定理和著名的 Brianchon 定理等结论. 这些定值定理也可以看成是 Brianchon 定理在圆锥曲线外切 $mn(m,n \geqslant 2)$ 形中的推广, 可见定值定理的涵盖面十分广泛.

12.2.1　圆锥曲线外切 $mn(m,n \geqslant 2)$ 边形中有向面积的定值定理

记

$$a_{i,i+j} =$$

$$\frac{2\left(\cos\dfrac{\theta_{i+mn-1}-\theta_i}{2}-e\cos\dfrac{\theta_{i+mn-1}+\theta_i}{2}\right)\left(\cos\dfrac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+j}}{2}-e\cos\dfrac{\theta_{i+j-1}+\theta_{i+j}}{2}\right)}{\sin\dfrac{\theta_{i+j-1}-\theta_{i+mn-1}}{2}\sin\dfrac{\theta_{i+j}-\theta_i}{2}},$$

$$c_{i,j} = \frac{(1-e\cos\theta_i)(1-e\cos\theta_{i+j})}{\sin^2\dfrac{\theta_{i+j}-\theta_i}{2}}, \quad \theta_{mn+i}=\theta_i, \tag{12.2.1}$$

于是 $a_{mn+i,mn+j} = a_{mn+i,j} = a_{i,mn+j} = a_{i,j}, c_{mn+i,mn+j} = c_{mn+i,j} = c_{i,mn+j} = c_{i,j}$. 我们有如下的定理.

定理 12.2.1 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{mn}$ $(mn \geqslant 4,\ m \geqslant 2)$ 是式 (12.1.1) 所表示的圆锥曲线 L 的切多边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与圆锥曲线的切点为 $P_k\left(\dfrac{a\cos\theta_k}{1-e\cos\theta_k}, \dfrac{a\sin\theta_k}{1-e\cos\theta_k}\right)$ $(k=1,2,\cdots,mn)$, P 是其上任意一点, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}a_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}\\
=&(-1)^n c_{n+i_0-1,n+i_0+j-1}D_{PP_{n+i_0-1}P_{n+i_0+j-1}}\\
&-c_{i_0+mn-1,i_0+j-1}D_{PP_{i_0+mn-1}P_{i_0+j-1}},
\end{aligned}\tag{12.2.2}$$

其中 $1 \leqslant i_0 \leqslant mn$, $j = 2, 3\ \cdots, mn-1$.

证明 由式 (12.1.2) 可得

$$a_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}} = c_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}} + c_{i+mn-1,i+j-1}D_{PP_{i+mn-1}P_{i+j-1}}\quad (i=1,2,\cdots,mn; j=2,3,\cdots,n),$$

从而

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}a_{i,i+j}D_{PQ_iQ_{i+j}}\\
=&\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}c_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}}\\
&+\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}c_{i+mn-1,i+j-1}D_{PP_{i+mn-1}P_{i+j-1}}\\
=&\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}c_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}}+\sum_{i=i_0-1}^{n+i_0-2}(-1)^{i-i_0+2}c_{i+mn,i+j}D_{PP_{i+mn}P_{i+j}}\\
=&(-1)^n c_{n+i_0-1,n+i_0+j-1}D_{PP_{n+i_0-1}P_{n+i_0+j-1}}+\sum_{i=i_0}^{n+i_0-2}(-1)^{i-i_0+1}c_{i,i+j}D_{PP_iP_{i+j}}\\
&-c_{i_0+mn-1,i_0+j-1}D_{PP_{i_0+mn-1}P_{i_0+j-1}}+\sum_{i=i_0}^{n+i_0-2}(-1)^{i-i_0+2}c_{i+mn,i+j}D_{PP_{i+mn}P_{i+j}}\\
=&(-1)^n c_{n+i_0-1,n+i_0+j-1}D_{PP_{n+i_0-1}P_{n+i_0+j-1}}-c_{i_0+mn-1,i_0+j-1}D_{PP_{i_0+mn-1}P_{i_0+j-1}}.
\end{aligned}$$

定理 12.2.2 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n}$ $(n \geqslant 2)$ 是式 (12.1.1) 所表示的圆锥曲线 L 的切

多边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与圆锥曲线的切点为 $P_k\left(\dfrac{a\cos\theta_k}{1-e\cos\theta_k},\dfrac{a\sin\theta_k}{1-e\cos\theta_k}\right)$ $(k=1,2,\cdots,n)$, P 是圆锥曲线所在平面上任意一点, 则

(1) 当 n 为奇数时,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_{i,i+n}D_{PQ_iQ_{i+n}}=0, \tag{12.2.3}$$

(2) 当 n 为偶数时,

$$\sum_{i=i_0}^{n+i_0-1}(-1)^{i-i_0+1}a_{i,i+n}D_{PQ_iQ_{i+n}}=2c_{n+i_0-1,2n+i_0-1}D_{PP_{n+i_0-1}P_{2n+i_0-1}}, \tag{12.2.4}$$

其中 $1\leqslant i_0\leqslant 2n$, $j=2,3\ \cdots,2n-1$.

证明　在式 (12.2.1) 中令 $m=2$, $j=n$ 并注意到

$$D_{PP_{2n+i_0-1}P_{n+i_0-1}}=-D_{PP_{n+i_0-1}P_{2n+i_0-1}}及c_{2n+i_0-1,n+i_0-1}=c_{n+i_0-1,2n+i_0-1},$$

即得 (12.2.3) 和 (12.2.4) 两式.

12.2.2　圆锥曲线外切 $mn(m,n\geqslant 2)$ 边形中有向面积的定值定理的应用

由于坐标系的选择不同, 11.2 节中相应的结论并不能作为本节定理 12.2.1 和定理 12.2.2 的直接推论. 但注意到圆锥曲线都可以化为式 (12.1.1) 的形式, 由定理 12.2.1 和定理 12.2.2 得

定理 12.2.3　设 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n}$(n 为奇数) 是圆锥曲线外切 $2n$ 边形, 若 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n}$ 的 n 对对顶点的连线 $Q_1Q_{n+1},Q_2Q_{n+2},\cdots,Q_nQ_{2n}$ 所在的 n 条直线相交于一点的充分必要条件是这 n 条直线中共有 $n-1$ 条相交于一点.

证明　如图 12.2.1 所示. 必要性显然, 现证充分性. 不妨设 Q_1Q_{n+1}, Q_2Q_{n+2}, $\cdots,Q_{n-1}Q_{2n-1}$ 所在的 $n-1$ 条直线相交于 G 点. 注意到 $D_{GQ_1Q_{n+1}}=D_{GQ_2Q_{n+2}}=\cdots=D_{GQ_{n-1}Q_{2n-1}}=0$ 及 $a_{n,2n}\neq 0$, 由式 (12.2.3) 得 $D_{GQ_nQ_{2n}}=0$. 即 G 在直线 Q_nQ_{2n} 上, 从而直线 Q_1Q_{n+1},Q_2Q_{n+2},$\cdots,Q_nQ_{2n}$ 相交于 G 点.

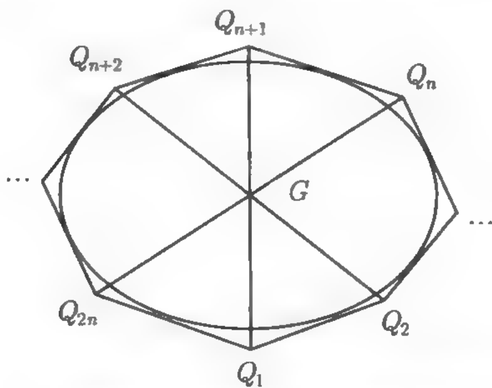


图 12.2.1　圆锥曲线外切 $2n$ 边形对角线共点

定理 12.2.4(Brianchon 定理) 设 $Q_1Q_2\cdots Q_6$ 是圆锥曲线切六边形, 则 $Q_1Q_2\cdots Q_6$ 三对对顶点的连线 Q_1Q_4, Q_2Q_5 和 Q_3Q_6 所在直线相交于一点.

证明 如图 12.2.2 所示. 在定理 12.2.3 中令 $n=3$ 并注意到圆锥曲线外切六边形任意两对对顶点的连线所在直线相交于一点即得.

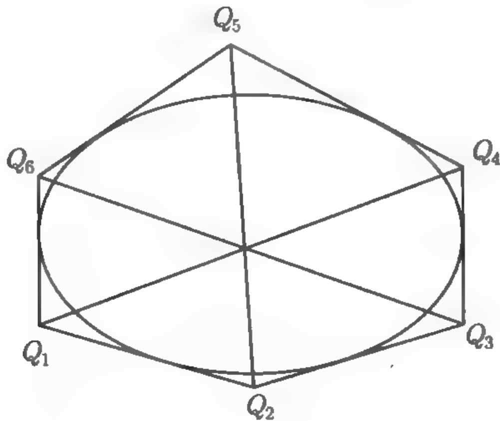


图 12.2.2 Brianchon 定理

定理 12.2.5 设 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n}$(n 为偶数) 是圆锥曲线外切 $2n$ 边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与圆锥曲线的切点为 $P_k(k=1,2,\cdots,2n)$. 若对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 两相对切点的连线 P_iP_{n+i} 及该外切 $2n$ 边形 n 对对顶点的连线 Q_1Q_{n+1},$Q_2Q_{n+2},\cdots$, Q_nQ_{2n} 所在的 $n+1$ 条直线中都有 n 条相交于一点, 则 $Q_1Q_{n+1},Q_2Q_{n+2},\cdots,Q_nQ_{2n}$ 及 P_1P_{n+1},$P_2P_{n+2},\cdots,P_nP_{2n}$ 所在的 $2n$ 条直线相交于一点.

证明 对任意整数 i_0 $(1\leqslant i_0\leqslant n)$, 由式 (12.2.4), 仿定理 12.2.3 可以证明 $Q_1Q_{n+1},Q_2Q_{n+2},\cdots,Q_nQ_{2n}$ 及 $P_{n+i_0-1}P_{2n+i_0-1}$ 所在直线相交于一点. 即知定理 12.2.5 结论成立.

定理 12.2.6(Brianchon 定理在圆锥切四边形中的情形) 设 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 是圆锥曲线切四边形, P_k 是 Q_kQ_{k+1} 所在直线与圆锥曲线的切点 $(k=1,2,3,4)$, 则四边形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 的两条对角线 Q_1Q_3, Q_2Q_4 所在直线和圆锥曲线四个切点所组成的两条直线 P_1P_3, P_2P_4 相交于一点.

证明 如图 12.2.3 所示. 在定理 12.2.4 中令 $n=2$ 并注意到圆锥曲线外切四边形的两对角线所在直线与两相对切点所在直线相交于一点即得.

定理 12.2.7 设 $Q_1Q_2\cdots Q_6$ 是圆锥曲线外切六边形, 则

$$S_{Q_iQ_{i+2}Q_{i+3}}\cdot S_{Q_{i+1}Q_{i+4}Q_{i+5}}=S_{Q_iQ_{i+3}Q_{i+5}}\cdot S_{Q_iQ_{i+2}Q_{i+4}}(i=1,2,\cdots,6).\quad(12.2.5)$$

证明 在定理 12.2.2(1) 中取 $n=3$, 并分别将 Q_{i+2}, Q_{i+5} 代入式 (12.2.3) 得

$$a_{i,i+3}D_{Q_{i+2}Q_iQ_{i+3}}=a_{i+1,i+4}D_{Q_{i+2}Q_{i+1}Q_{i+4}},\quad(12.2.6)$$

$$a_{i,i+3}D_{Q_{i+5}Q_iQ_{i+3}}=a_{i+1,i+4}D_{Q_{i+5}Q_{i+1}Q_{i+4}}.\quad(12.2.7)$$

(12.2.6) 和 (12.2.7) 两式相除后等式两边取绝对值并化简, 即得式 (12.2.5).

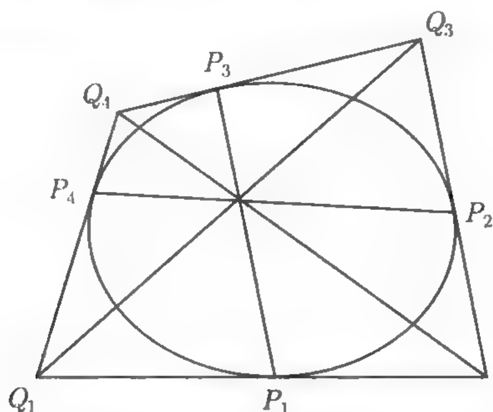


图 12.2.3 圆锥切四边形中的 Brianchon 定理

定理 12.2.8 设 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 是圆锥外切四边形, P_k 是 Q_kQ_{k+1} 所在直线与圆锥曲线的切点 $(k=1,2,3,4)$, 则

$$S_{P_2Q_2Q_3}\cdot S_{P_4Q_2Q_4}=S_{P_2Q_2Q_4}\cdot S_{P_4Q_1Q_3},\tag{12.2.8}$$

$$S_{P_1Q_1Q_3}\cdot S_{P_3Q_2Q_4}=S_{P_1Q_2Q_4}\cdot S_{P_3Q_1Q_3},\tag{12.2.9}$$

$$S_{Q_2Q_1Q_3}\cdot S_{Q_4P_2P_4}=S_{Q_2P_2P_4}\cdot S_{Q_4Q_1Q_3},\tag{12.2.10}$$

$$S_{Q_1Q_2Q_4}\cdot S_{Q_3P_2P_4}=S_{Q_1P_2P_4}\cdot S_{Q_3Q_2Q_4},\tag{12.2.11}$$

$$S_{Q_1Q_2Q_4}\cdot S_{Q_3P_1P_3}=S_{Q_1P_1P_3}\cdot S_{Q_2Q_3Q_4},\tag{12.2.12}$$

$$S_{Q_1Q_2Q_3}\cdot S_{Q_4P_1P_3}=S_{Q_2P_1P_3}\cdot S_{Q_1Q_3Q_4}.\tag{12.2.13}$$

证明 在定理 12.2.2 中取 $n=2$, 仿定理 12.27 证明可得式 (12.2.8)~ 式 (12.2.13).

12.3 圆锥曲线外切 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形中有向面积的定值定理及应用

在 11.3 节中, 我们得到了各类二次曲线曲线外切五边形和一般的 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形中有向面积的定值定理. 本节主要利用圆锥曲线的极坐标方程和有向面积定值法, 探讨圆锥曲线外切五边形和一般的 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形中对角线三角形和切顶线三角形之间的关系, 从而使各类二次曲线曲线外切 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形中有向面积的定值定理得到统一.

首先, 给出圆锥曲线外切五边形和一般的 $2n+1$ 边形中有关对角线三角形和切顶线三角形有向面积的定值定理; 其次根据定值定理得出圆锥曲线外切五边形和一般的外切 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形中的共点线定理、共线点定理、等积定理等结论. 这

些定值定理也可以看成是 Brianchon 定理在圆锥曲线外切三角形和外切五边型中的情形的推广, 可见定值定理的涵盖面十分广泛.

12.3.1 圆锥曲线外切 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形中有向面积的定值定理

定理 12.3.1 设$Q_1Q_2\cdots Q_{2n+1}$ 是式 (12.1.1) 所表示的圆锥曲线 L 的切多边形, Q_kQ_{k+1} 所在直线与圆锥曲线 L 的切点为$P_k\left(\dfrac{a\cos\theta_k}{1-e\cos\theta_k},\dfrac{a\sin\theta_k}{1-e\cos\theta_k}\right)$ $(k=1,2,\cdots,2n+1)$, P 是圆锥曲线所在平面上任意一点, 则

$$\sum_{i=1}^{2n+1} h_{i,i+n+1}D_{PP_iQ_{i+n+1}}=0, \tag{12.3.1}$$

其中

$$h_{i,i+n+1}=\frac{(1-e\cos\theta_i)\left(\cos\dfrac{\theta_{i+n}-\theta_{i+n+1}}{2}-e\cos\dfrac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}}{2}\right)}{\sin\dfrac{\theta_{i+n}-\theta_i}{2}\sin\dfrac{\theta_{i+n+1}-\theta_i}{2}}$$

$$\theta_{2n+1+i}=\theta_i,\quad Q_{2n+1+i}=Q_i.$$

证明 设圆锥曲线所在平面任意一点的坐标为 $P(r\cos\theta,r\sin\theta)(r\geqslant 0)$. 圆锥曲线的参数方程

$$L:\ x=\frac{a\cos\theta}{1-e\cos\theta},\ y=\frac{a\sin\theta}{1-e\cos\theta},$$

所以

$$y'_x=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{a\sin\theta}{1-e\cos\theta}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{a\cos\theta}{1-e\cos\theta}\right)}=\frac{\dfrac{a\cos\theta(1-e\cos\theta)-a\sin\theta\cdot e\sin\theta}{(1-e\cos\theta)^2}}{\dfrac{-a\sin\theta(1-e\cos\theta)-a\cos\theta\cdot e\sin\theta}{(1-e\cos\theta)^2}}=\frac{e-\cos\theta}{\sin\theta}.$$

于是由直线 $Q_{i+2n}Q_i$ 的斜率

$$k_{Q_{i+2n}Q_i}=\frac{e-\cos\theta_{i+2n}}{\sin\theta_{i+2n}}$$

求得 $Q_{i+2n}Q_i$ 的直线方程

$$(\cos\theta_{i+2n}-e)x+\sin\theta_{i+2n}\cdot y=a, \tag{12.3.2}$$

同理 Q_iQ_{i+1} 的直线方程为

$$(\cos\theta_i-e)x+\sin\theta_i\cdot y=a. \tag{12.3.3}$$

式 (12.3.2) 和式 (12.3.3) 联立, 求得 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 顶点的坐标

$$Q_i\left(\frac{a\cos\frac{\theta_{i+2n}+\theta_i}{2}}{\cos\frac{\theta_{i+2n}-\theta_i}{2}-e\cos\frac{\theta_{i+2n}+\theta_i}{2}},\frac{a\sin\frac{\theta_{i+2n}+\theta_i}{2}}{\cos\frac{\theta_{i+2n}-\theta_i}{2}-e\cos\frac{\theta_{i+2n}+\theta_i}{2}}\right)$$
$$(i=1,2,\cdots,2n+1).$$

根据三角形有向面积公式得

$$\begin{aligned}
&2(1-e\cos\theta_i)\left(\cos\frac{\theta_{i+n}-\theta_{i+n+1}}{2}-e\cos\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}}{2}\right)D_{PP_iQ_{i+n+1}}\\
=&ar\left(\cos\theta\sin\theta_i-\cos\theta_i\sin\theta\right)\left(\cos\frac{\theta_{i+n}-\theta_{i+n+1}}{2}-e\cos\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}}{2}\right)\\
&+a^2\left(\cos\theta_i\sin\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}}{2}-\sin\theta_i\cos\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}}{2}\right)\\
&+ar\left(\cos\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}}{2}\sin\theta-\cos\theta\sin\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}}{2}\right)(1-e\cos\theta_i)\\
=&ar\left(\sin(\theta_i-\theta)\cos\frac{\theta_{i+n}-\theta_{i+n+1}}{2}-\sin\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}-2\theta}{2}\right)\\
&+a^2\sin\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}-2\theta_i}{2}\\
&+are\left(\sin\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}-2\theta}{2}\cos\theta_i-\sin(\theta_i-\theta)\cos\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}}{2}\right)\\
=&\frac{1}{2}ar\left(\sin\frac{2\theta_i+\theta_{i+n}-\theta_{i+n+1}-2\theta}{2}+\sin\frac{2\theta_i+\theta_{i+n+1}-\theta_{i+n}-2\theta}{2}\right.\\
&\left.-2\sin\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}-2\theta}{2}\right)\\
&+\frac{1}{2}are\left(\sin\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}+2\theta_i-2\theta}{2}+\sin\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}-2\theta_i-2\theta}{2}\right)\\
&-\frac{1}{2}are\left(\sin\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}+2\theta_i-2\theta}{2}+\sin\frac{2\theta_i-\theta_{i+n}-\theta_{i+n+1}-2\theta}{2}\right)\\
&+a^2\sin\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}-2\theta_i}{2}\\
=&ar\left(\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+n}-2\theta}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+n+1}}{2}+\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+n+1}-2\theta}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+n}}{2}\right)\\
&+are\cos\theta\sin\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}-2\theta_i}{2}+a^2\sin\frac{\theta_{i+n}+\theta_{i+n+1}-2\theta_i}{2}\\
=&ar\left(\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+n}-2\theta}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+n+1}}{2}+\cos\frac{\theta_i+\theta_{i+n+1}-2\theta}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+n}}{2}\right)\\
&+(are\cos\theta+a^2)\left(\sin\frac{\theta_{i+n}-\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_{i+n+1}-\theta_i}{2}+\cos\frac{\theta_{i+n}-\theta_i}{2}\sin\frac{\theta_{i+n+1}-\theta_i}{2}\right),
\end{aligned}$$

于是

$$h_{i,i+n+1}D_{PP_iQ_{i+n+1}}=-\frac{1}{2}ar\left(\frac{\cos\dfrac{\theta_{i+n}+\theta_i-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+n}-\theta_i}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\theta_{i+n+1}+\theta_i-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+n+1}-\theta_i}{2}}\right)$$
$$+\frac{1}{2}(are\cos\theta+a^2)\left(\cot\frac{\theta_{i+n}-\theta_i}{2}+\cot\frac{\theta_{i+n+1}-\theta_i}{2}\right).\quad(12.3.4)$$

由于

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2n+1}\left(\cot\frac{\theta_{i+n}-\theta_i}{2}+\cot\frac{\theta_{i+n+1}-\theta_i}{2}\right)\\
=&\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\theta_{i+n}-\theta_i}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\theta_{i+n+1}-\theta_i}{2}\\
&+\sum_{i=n+1}^{2n+1}\cot\frac{\theta_{i+n}-\theta_i}{2}+\sum_{i=n+1}^{2n+1}\cot\frac{\theta_{i+n+1}-\theta_i}{2}\\
=&\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\theta_{i+n}-\theta_i}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\theta_{i+n+1}-\theta_i}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\theta_i-\theta_{i+n+1}}{2}\\
&+\cot\frac{\theta_{2n+1}-\theta_{n+1}}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_i-\alpha_{i+n}}{2}+\cot\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_{2n+1}}{2}\\
=&0.\end{aligned}$$

同理

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\left(\frac{\cos\dfrac{\theta_{i+n}+\theta_i-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+n}-\theta_i}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\theta_{i+n+1}+\theta_i-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+n+1}-\theta_i}{2}}\right)=0,$$

从而式 (12.3.2) 成立①.

定理 12.3.2 设$Q_1Q_2\cdots Q_5$ 是圆锥曲线 $\rho=\dfrac{a}{1-e\cos\theta}$ $(a>0,e\geqslant 0)$ 的外切五边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与圆锥曲线的切点为$P_k\left(\dfrac{a\cos\theta_k}{1-e\cos\theta_k},\dfrac{a\sin\theta_k}{1-e\cos\theta_k}\right)$ $(k=1,2,\cdots,5)$, P 是圆锥曲线所在平面上任意一点, 则

$$h_{i,i+3}D_{PP_iQ_{i+3}}=g_{i,i+2}D_{PQ_iQ_{i+2}}+g_{i+1,i+4}D_{PQ_{i+1}Q_{i+4}}(i=1,2,\cdots,5),\quad(12.3.5)$$

其中 $\theta_{i+5}=\theta_i,Q_{i+5}=Q_i$.

① 当 $\theta=0,\pi$ 时, y'_x 不存在, 但方程 (12.3.2) 和 (12.3.3) 仍成立.

证明 在式 (12.1.6) 中令 $n=5, j=2$, 并注意到 $g_{ij}=a_{ij}/2$, 得

$$g_{i,i+2}D_{PQ_iQ_{i+2}}=-\frac{1}{2}ar\left(\frac{\cos\dfrac{\theta_{i+2}+\theta_i-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+2}-\theta_i}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\theta_{i+4}+\theta_{i+1}-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+1}-\theta_{i+4}}{2}}\right)$$
$$+\frac{1}{2}(are\cos\theta+a^2)\left(\cot\frac{\theta_{i+2}-\theta_i}{2}+\cot\frac{\theta_{i+1}-\theta_{i+4}}{2}\right). \quad (12.3.6)$$

又在式 (12.1.6) 中先以 $i+1$ 代 i, 再令 $n=5, j=3$, 并注意到 $g_{ij}=a_{ij}/2$, 得

$$g_{i+1,i+4}D_{PQ_{i+1}Q_{i+4}}=-\frac{1}{2}ar\left(\frac{\cos\dfrac{\theta_{i+4}+\theta_{i+1}-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+4}-\theta_{i+1}}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\theta_i+\theta_{i+3}-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+3}-\theta_i}{2}}\right)$$
$$+\frac{1}{2}(are\cos\theta+a^2)\left(\cot\frac{\theta_{i+4}-\theta_{i+1}}{2}+\cot\frac{\theta_{i+3}-\theta_i}{2}\right), \quad (12.3.7)$$

在式 (12.3.4) 中令 $n=2$, 得

$$h_{i,i+3}D_{PP_iQ_{i+3}}=-\frac{1}{2}ar\left(\frac{\cos\dfrac{\theta_{i+2}+\theta_i-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+2}-\theta_i}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\theta_{i+3}+\theta_i-2\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta_{i+3}-\theta_i}{2}}\right)$$
$$+\frac{1}{2}(are\cos\theta+a^2)\left(\cot\frac{\theta_{i+2}-\theta_i}{2}+\cot\frac{\theta_{i+3}-\theta_i}{2}\right), \quad (12.3.8)$$

由式 (12.3.6)~(12.3.8) 知式 (12.3.8) 成立.

12.3.2 圆锥曲线外切 $2n+1(n\geqslant 1)$ 边形中有向面积的定值定理的应用

由于坐标系的选择不同, 除圆 (即 $e=0$) 的情形外, 11.3 节中相应的结论并不能作为定理 12.3.1 的直接推论. 但注意到圆锥曲线都可以化为式 (12.1.1) 的形式, 由定理 12.3.1 和定理 12.3.2 得出的如下统一的结论.

定理 12.3.3 设 $Q_1Q_2Q_3$ 是圆锥曲线的外切三角形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与圆锥曲线的切点为 $P_i(i=1,2,3)$, M_1, M_2 是 P_iQ_{i+2} 所在直线上任意两点, 则

$$S_{M_1P_{i+1}Q_i}\cdot S_{M_2P_{i+2}Q_{i+1}}=S_{M_1P_{i+2}Q_{i+1}}\cdot S_{M_2P_{i+1}Q_1}\ (i=1,2,3). \quad (12.3.9)$$

证明 令 $n=1$, 对 M_1, M_2 分别利用式 (12.1.1) 得

$$h_{i+1,i}D_{M_1P_{i+1}Q_i}=-h_{i+2,i+1}D_{M_1P_{i+2}Q_{i+1}}, \quad (12.3.10)$$
$$h_{i+1,i}D_{M_2P_{i+1}Q_i}=-h_{i+2,i+1}D_{M_2P_{i+2}Q_{i+1}}, \quad (12.3.11)$$

故若 $S_{M_2P_{i+1}Q_i}=S_{M_2P_{i+2}Q_{i+1}}=0$, 式 (12.3.9) 显然成立; 若 $S_{M_2P_{i+1}Q_i}$ 及 $S_{M_2P_{i+2}Q_{i+1}}$ 均不为零, 式 (12.3.10)÷ 式 (12.3.11) 后等式两边取绝对值并化简, 即得式 (12.3.9).

定理 12.3.4　设 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n+1}$ 是圆锥曲线外切 $2n+1$ 边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与圆锥曲线的切点为 $P_i(i=1,2,\cdots,2n+1)$, 如果 $Q_1Q_2\cdots Q_{2n+1}$ 中形如 P_iQ_{i+n+1} 的 $2n+1$ 条切顶线所在直线中有 2n 条相交于一点, 则这 $2n+1$ 条切顶线所在直线相交于一点.

证明　如图 12.3.1 所示. 不妨设 $P_1Q_{n+2},P_2Q_{n+3},\cdots,P_{2n}Q_n$ 所在直线相交于 G 点, 将 $D_{GP_1Q_{n+2}}=D_{GP_2Q_{n+3}}=\cdots=D_{GP_{2n}Q_n}=0$ 及 G 代入式 (12.3.1) 得 $h_{2n+1,n+1}D_{GP_{2n+1}Q_{n+1}}=0$. 由于 $h_{2n+1,n+1}\neq 0$, 所以 $D_{GP_{2n+1}Q_{n+1}}=0$. 即 G 在 $P_{2n+1}Q_{n+1}$ 所在直线上, 从而 $P_1Q_{n+2},P_2Q_{n+3},\cdots,P_{2n}P_n,P_{2n+1}Q_{n+1}$ 所在直线相交于一点.

定理 12.3.5(Brianchon 定理在圆锥曲线外切三角形中的情形)　设 $Q_1Q_2Q_3$ 是二次曲线外切三角形, Q_1Q_2, Q_2Q_3,P_3Q_1 所在直线与二次曲线的切点分别为 P_1,P_2,P_3, 则 $Q_1Q_2Q_3$ 的三条切顶线 P_1P_3,P_2Q_1, P_3Q_2 相交于一点.

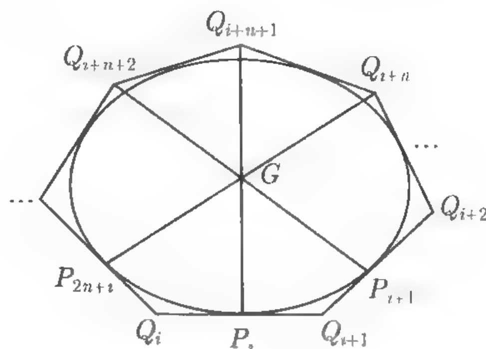


图 12.3.1　圆锥曲线外切 $2n+1$ 边形对角线的共点的条件

证明　如图 12.3.2 所示. 注意到二次曲线外切三角形的任意两条切顶线所在直线相交于一点, 由定理 12.3.4 即知 P_1Q_3, P_2Q_1,Q_3Q_2 所在直线相交于一点.

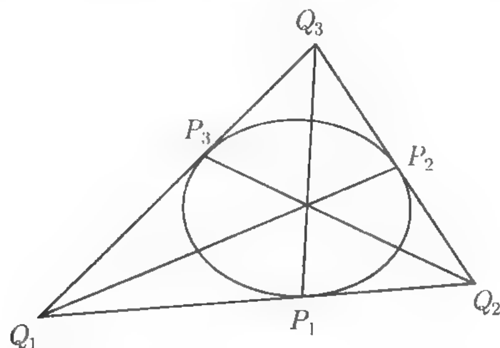


图 12.3.2　圆锥曲线外切三角形中的 Brianchon 定理

定理 12.3.6　设 $Q_1Q_2\cdots Q_5$ 是圆锥曲线外切五边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与圆锥曲线的切点为 $P_i(i=1,2,\cdots,5),M_1,M_2,M_1,N_2,N_1,R_2$ 分别是 P_iQ_{i+3},Q_iQ_{i+2},

$Q_{i+1}Q_{i+4}$ 上任意两点, 则

$$S_{M_1Q_iQ_{i+2}} \cdot S_{M_2Q_{i+1}Q_{i+4}} = S_{M_1Q_{i+1}Q_{i+4}} \cdot S_{M_2Q_iQ_{i+2}} \ (i=1,2,\cdots,5). \quad (12.3.12)$$

$$S_{N_1P_iQ_{i+3}} \cdot S_{N_2Q_{i+1}Q_{i+4}} = S_{N_1Q_{i+1}Q_{i+4}} \cdot S_{N_2P_iQ_{i+3}} \ (i=1,2,\cdots,5), \quad (12.3.13)$$

$$S_{R_1P_iQ_{i+3}} \cdot S_{R_2Q_iQ_{i+2}} = S_{R_1Q_iQ_{i+2}} \cdot S_{R_2P_iQ_{i+3}} \ (i=1,2,\cdots,5). \quad (12.3.14)$$

证明 根据式 (12.3.5), 仿定理 12.3.3 可以证明式 (12.3.12)~(12.3.14) 成立.

定理 12.3.7(Brianchon 定理在圆锥曲线外切五边形中的情形) 设 $Q_1Q_2\cdots Q_5$ 是圆锥曲线外切五边形, Q_iQ_{i+1} 所在直线与圆锥曲线的切点为 $P_i(i=1,2,\cdots,5)$, 则切顶线 P_iQ_{i+3} 和对角线 $Q_iQ_{i+2}, Q_{i+1}Q_{i+4}(i=1,2,\cdots,5)$ 所在直线相交于一点.

证明 如图 12.3.3 所示. 显然对角线 $Q_iQ_{i+2}, Q_{i+1}Q_{i+4}$ 所在直线相交, 设此交点为 M_i, 将 $D_{M_iQ_iQ_{i+2}}=D_{M_iQ_{i+1}Q_{i+4}}=0$ 及 M_i 代入式 (12.3.5) 得 $h_{i,i+3}D_{M_iP_iQ_{i+3}}=0$. 注意到 $h_{i,i+3}\neq 0$ 得 $D_{M_iP_iQ_{i+3}}=0(i=1,2,\cdots,5)$, 即 M_i 在直线 P_iQ_{i+3} 上, 从而切顶线 P_iQ_{i+3} 和对角线 $Q_iQ_{i+2}, Q_{i+1}Q_{i+4}$ 所在直线相交于一点.

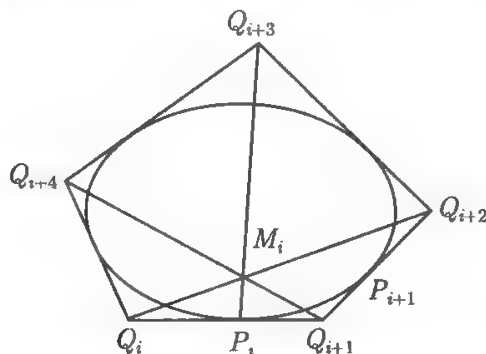


图 12.3.3 圆锥曲线外切五角形中的 Brianchon 定理

参 考 文 献

[1] 张景中. 几何新方法和新体系 [M]. 北京：科学出版社, 2009.

[2] 单墫. 数学名题词典 [M]. 南京：江苏教育出版社, 2002.

[3] 亚格龙 U M. 几何变换 3[M]. 章学成, 译. 北京：北京大学出版社, 1987.

[4] Nikolaos Dergiades, Huan Carlos Salazar. Harcourt's Theorem [J]. Forum Geometricorum, 2003, 3: 117-124.

[5] Jean-Louis Ayme. A Purely Synthetic Proof of the Droz-Farny Line Theorem[J]. Forum Geometricorum, 2004, 4: 219-224.

[6] 喻德生, 师晶. 二次曲线外切多边形中有向距离的定值定理及其应用 [J], 南昌航空大学学报, 2009, 23(4)：42-46.

[7] 梅向明, 刘增贤, 林向岩. 高等几何 [M]. 北京：高等教育出版社, 1983.

[8] 杨子胥. 高等代数习题解 (下册)[M]. 济南：山东科学技术出版社, 1982.

[9] 巴兹列夫 B T. 几何学及拓扑学习题集 [M]. 李质朴, 译. 北京：北京师范大学出版社, 1985.

[10] 喻德生. 关于平面多边形有向面积的一些定理 [[J], 赣南师范学院学报, 1999(3)：11-14.

[11] Dragutin Svrtan, Darko Veljan, Vladimir Volenec[J], Geometry of Pentagons : from Gauss to Robbins.http://218. 264.35.10.hdbsm/, 2006.

[12] 徐道. 正多边形中的定值问题 [J]. 安顺师专学报, 1999(2)：19-24.

[13] Nikolaos Dergiades. Signed distance and the Erdos-Mordell Inequality[J]. Forum Geometricorum, 2004, 4: 67-68.

[14] 喻德生. 有向面积及其应用 [J], 吉安师专学报, 1999(6)：35-40.

[15] 喻德生. 平面四边形有向面积的两个定理及其应用 [J], 赣南师范学院学报, 2000(3):18-21.

[16] 喻德生, 徐迎博, 刘朝霞. 四边形中有向面积的定值定理及其应用. 数学研究期刊. 2011, 12(1): 1-9.

[17] 喻德生. 关于外、内三角形有向面积的两个定理及其应用 [J], 宜春学院学报, 2004, 26(6)：19-21.

[18] 考克瑟特 H S M, 格蕾策 S L. 几何学的新探索 [M]. 陈维恒, 译. 北京：北京大学出版社, 1986.

[19] 嘎尔别林 Γ A, 托尔贝戈 A K. 第 1—50 届莫斯科数学奥林匹克 [M]. 苏淳, 等译. 北京：科学出版社, 1990.

[20] 喻德生. 关于垂足三角形有向面积的一些定理 [J], 江西师范大学学报, 2001, 25(3)：214-218.

[21] 喻德生. 一类垂足多边形的有向面积公式及其应用 [J], 南昌航空工业学院学报, 2000, 14(4): 72-76.

[22] Jean-Pierre Ehrmann. Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral[J]. Forum Geometricorum, 2004, 4: 35-52.

[23] 喻德生. 线型三角形有向面积公式及其应用 [J], 南昌航空大学学报, 2010, 24(3): 51-55.

[24] 梁延堂. 关于两个三角形成正交透视的几个定理及其应用 [J]. 兰州大学学报, 2002, 38(1): 18-21.

[25] Zvonko Cerin. Rings of Squares around Orthologic Triangles[J]. Forum Geometricorum, 2009, 9: 58-80.

[26] Gruenberg K W, Weir A J. Linear Geometry [M]. New York: Springer-Verlag.

[27] 廖小勇. Menelaus 定理的矢量证明及其应用 [J]. 曲靖师范学院学报, 2003, 22(6): 29-31.

[28] 喻德生. 高线三角形有向面积的定值定理及其应用 [J]. 南昌航空工业学院学报, 2003, 17(3): 43-45.

[29] 喻德生. 关于切顶线三角形有向面积的定值定理及其应用 [J]. 南昌航空工业学院学报, 2002, 16(3): 1-3.

[30] Miklos Hoffmann, Sonja Gorjanc. On the Generalized Gergonne Point and Beyeond[J]. Forum Geometricorum, 2008, 8: 151-155.

[31] 喻德生. 椭圆类二次曲线外切多边形中有向面积的定值定理及其应用 [J]. 南昌大学学报, 2003, 25(3): 94-97.

[32] 喻德生. 双曲类二次曲线外切多边形中有向面积的定值定理及其应用 [J]. 福州大学学报, 2004, 32(5): 522-525.

[33] 喻德生. 椭圆外切 $2n+1$ 边形中切定线三角形有向面积的定值定理及其应用 [[J]. 南昌航空工业学院学报, 2003, 17(1): 10-12.

[34] 喻德生. 抛物类二次曲线外切多边形中有向面积的定值定理及其应用 [J]. 南昌大学数学, 2006, 22(1): 26-29.

[35] 喻德生. 圆外切五边形中有向面积的定值定理及其应用 [J]. 南昌航空工业学院学报, 2001, 15(4): 58-62.

[36] 喻德生. 抛物类二次曲线外切 $2n+1$ 边形中有向面积的定值定理及其应用 [J]. 江西师范大学学报, 2006, 30(4): 319-421.

[37] 喻德生. 双曲类二次曲线外切 $2n+1$ 边形中有向面积的定值定理及其应用 [J]. 福州大学学报, 2006, 34(2):176-179.

[38] 喻德生. Brianchon 定理在二次曲线外切 $2n$ 边形中的推广 [J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(13): 109-113.

[39] Konecny V, Heuver J, Pfiefer R E. Problem 1320 and solutions[J]. Math. Mag., 621989(62): 137; 1990(63): 130, 131.

[40] 喻德生, 师晶. 二次曲线外切多边形中有向距离的定值定理及其应用 [J]. 南昌航空大学学报, 2009, 23(4): 42-46.

[41] Yu D S. On a fixed value theorem for directed areas in conic circumscribed polygons and applications[J], 数学季刊, 2009, 24(4): 485-490.

[42] 喻德生, 师晶. 线型三角形有向面积公式及其应用 [J]. 南昌航空大学学报, 2010, 24(3): 51-55.

[43] 喻德生, 程程, 刘烨. 平面六点组坐标行列式的一个性质与应用 [J]. 南昌航空大学学报, 2011, 25(1):85-87.

[44] 喻德生, 徐迎博, 刘朝霞. 四边形中有向面积的定值定理及其应用, 数学研究期刊, 2011, 1(1): 1-9.

[45] Yu D S. On two fixed value theorems for directed areas in conic circumscribed $2n+1$ polygon and applications[J]. The 2nd International Conference on Multimedia Technology, 2011, (2): 2781-2784.

[46] 喻德生, 刘朝霞, 徐迎博. 两三角形的垂三角形有向面积的定值定理及应用 [J]. 南昌航空大学学报, 2012, 26(1): 62-67.

[47] Yu D S. On two fixed value theorems for directed areas in conic circumscribed mn-sided polygons and applications[J]. 2012 Second International Conference on Electronics, Communications and Control, 2012: 359-362.

[48] 张景中. 几何定理机器证明二十年 [J]. 科学通报, 1997, 42(21): 2248-2256.

[49] 张景中, 李永彬. 几何定理机器证明三十年 [J]. 系统科学与数学, 2009, 29(9): 1155-1168.

[50] 吴文俊. 数学机械化 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[51] 徐利治. 数学方法论十二讲 [M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2007.

[52] 朱华伟. 从数学竞赛到竞赛数学 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[53] 沈文选. 走进教育数学 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.

索　　引

第 1 章

第 2 章

第 3 章

第 4 章

第 5 章

第 6 章

第 7 章

第 8 章

第 9 章

第 10 章

第 11 章

第 12 章